國立臺灣海洋大學110年度大學生暑期實務體驗計畫執行成果報告

由土壤粒徑篩分析了解傅立葉級數分析的頻率與波數內涵

河海工程學系 3年B班 吳庭安

指導教授：陳正宗 特聘講座教授

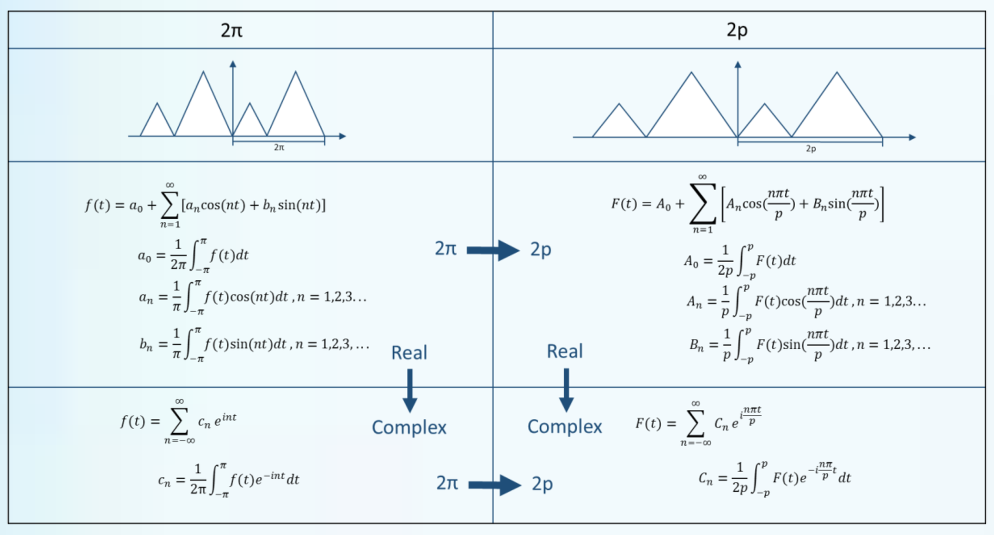
前言

在林琦焜教授的傅立葉分析與應用[1]一書中提到週期為2π的任意函數可以傅立葉級數表示之，而任意週期的函數可用週期為2p的傅立葉級數表示之，尤其是將週期增加至無窮時的傅立葉級數，更加擴大了傅立葉轉換的應用範圍，使非週期函數亦能做傅立葉轉換。傅立葉轉換，轉換了我們對該函數的「觀察座標」也就是「表述方式」，然而轉換前後所代表的依舊是同樣的受體。在顧承宇老師土壤力學實驗上課講義[2]中則提到土壤粒徑篩分析的實驗目的其一為分析土粒大小分佈情形，其二為繪製粒徑分佈曲線，求有效粒徑D，均勻係數Cu及曲率係數Cd，並求出礫石砂土沉泥及黏土分別所佔百分比，做為土壤分類之依據。繪製土壤粒徑分佈曲線，亦是將一份受體轉換為有效的「表述方式」來提供工程應用之參考。在陳正宗老師工程數學(二)講義[3]提到抽象的傅立葉函數空間可透過簡單的物理試驗體驗，獲得更具體的感受。因此本計畫以「由土壤粒徑篩分析了解傅立葉級數分析頻率與波數內涵」為題，在傅立葉分析與粒徑篩分析的連結以表格化的方式呈現其亦同之處。而在傅立葉分析方面，最深入的探討以求e^{-t^2}的傅立葉轉換為算例，透過妥善運用傅立葉轉換性質以迴避複變函數的解析函數路徑積分。

研究方法

傅立葉級數分析

將函数表示為簡單正餘弦波的組合。亦可利用尤拉關係式化簡，能得到更為簡便的複數型態之公式。



土壤粒徑篩分析

將一份含不同粒徑大小的土壤烘乾後，倒入搖篩機震盪過篩十分鐘，並由各篩上殘留之重量百分比來分析，並以累積質量百分比繪製出該份土壤的粒徑分佈曲線，即為該份土壤的級配曲線。

良好的土壤級配

指粗顆粒的空隙恰好由中顆粒填充，中顆粒的空隙恰好由細顆粒填充，如此逐級填充使砂形成最密緻的堆積狀態，空隙率達到最小值，堆積密度達最大值。

標準篩號

4、10、20、40、60、100 與 200 號篩，編號越大則篩孔越小越密集。

傅立葉轉換性質

函數	傅立葉轉換	註釋
$f(t)$	$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$	定義
$a\cdot f(t)+b\cdot g(t)$	$a\cdot F(\omega)+b\cdot G(\omega)$	線性
$f(t-a)$	$e^{-ia\omega}F(\omega)$	時域平移
$e^{ia\omega}f(t)$	$F(\omega-a)$	頻域平移
$f'(t)$	$i\omega F(\omega)$	微分性質

研究結果

傅立葉分析	任意函數	基底函數	a_0、c_0	a_n、b_n、c_n	傅立葉係柱狀圖	增大週期，會產生為零的傅立葉係數	透過正交性求傅立葉系數的順序可任意更改
粒徑篩分析	任意級配土壤	篩網	底盤留篩量	篩網留篩量	土壤級配曲線圖	增加篩網，可能會變成空篩	篩網由大到小排列不可更改

由週期看大後傅立葉級數的變化看其各自基底函數的必要性

給定一最小週期為2π的鋸齒波函數

$$f(t)=t,\ -\pi\le t\le\pi,\ f(t+2\pi)=f(t)$$

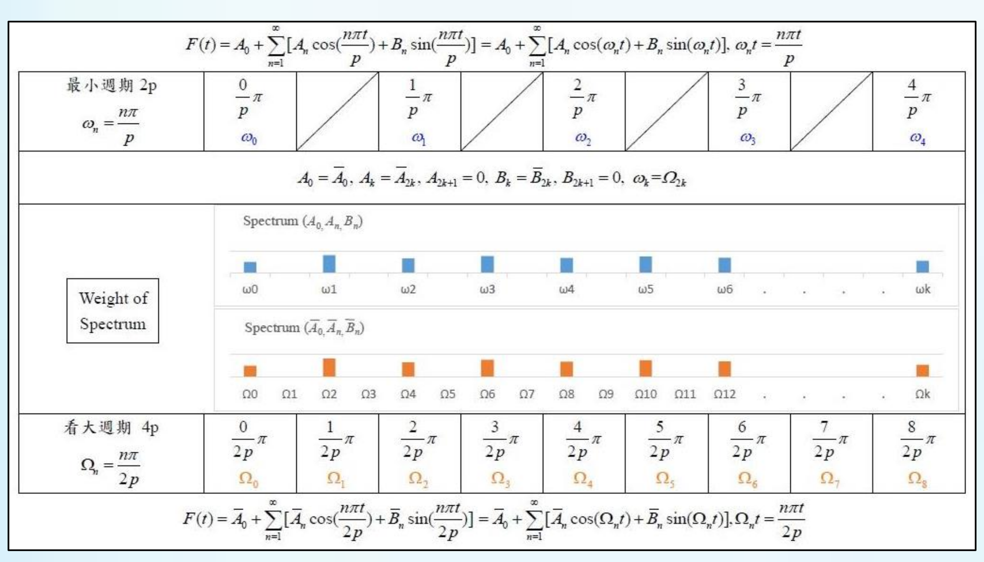
分別得$f(t)$的三種不同週期之級數表示式如下，分析如下表

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2}{n}\cos(n\pi)\sin(nt)$$

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4}{n}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{nt}{2}\right)$$

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{-2}{n}\cos(n\pi)-\frac{4}{n}\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right]\sin\left(\frac{nt}{3}\right)$$

2π	$\sin(nt)$			$\sin(1t)$			$\sin(2t)$			$\sin(3t)$
	b_n			2			-1			$\frac{2}{3}$
4π	$\sin\left(\frac{nt}{2}\right)$		$\sin\left(\frac{1t}{2}\right)$	$\sin\left(\frac{2t}{2}\right)$		$\sin\left(\frac{3t}{2}\right)$	$\sin\left(\frac{4t}{2}\right)$		$\sin\left(\frac{5t}{2}\right)$	$\sin\left(\frac{6t}{2}\right)$
	$\bar{b}_n$		0	2		0	-1		0	$\frac{2}{3}$
6π	$\sin\left(\frac{nt}{3}\right)$	$\sin\left(\frac{1t}{3}\right)$	$\sin\left(\frac{2t}{3}\right)$	$\sin\left(\frac{3t}{3}\right)$	$\sin\left(\frac{4t}{3}\right)$	$\sin\left(\frac{5t}{3}\right)$	$\sin\left(\frac{6t}{3}\right)$	$\sin\left(\frac{7t}{3}\right)$	$\sin\left(\frac{8t}{3}\right)$	$\sin\left(\frac{9t}{3}\right)$
	b_n^*	0	0	2	0	0	-1	0	0	$\frac{2}{3}$



最小週期看爲無窮時傅立葉級數的變化

給定一非週期函數 $F(t)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 都有定義，可將其視為一個週期函數，只不過其最小週期趨近於無窮再利用變數變換和黎曼和化積分的手法，便可導出傅立葉積分公式。

首先令

$$F(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{\frac{in\pi t}{p}}$$

$$C_n=\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}F(t)e^{\frac{-in\pi t}{p}}dt,\ n=0,\pm1,\pm2,\pm3...$$

再令其中之$n\pi/p=\omega_n$做變數變換，可得

$$F(t)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\int_{-p}^{p}F(t)e^{-i\omega t}dt\right)e^{i\omega t}\Delta\omega$$

接著取 $p\to\infty$，且黎曼和化積分，得

$$\lim_{p\to\infty}F(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}F(t)e^{-i\omega t}dt\right)e^{i\omega t}d\omega$$

令

$$\hat{F}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}F(t)e^{-i\omega t}dt$$

得傅立葉積分公式

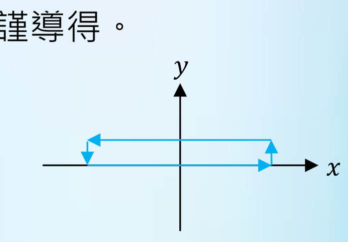
$$F(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{F}(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

傅立葉級數與傅立葉積分皆只是換個方法表示原函數。而傅立葉轉換所得之$\hat{F}(\omega)$卻類似於a_0、a_n、b_n、c_n等傅立葉係數，是描述該函數的拆解後的組成成分比例。

就像一團土壤經過篩分析後會分成了好幾團粒徑大小不同的土，傅立葉轉換就像所謂的土壤級配，代表的是該土壤粒徑分布的比例。

高斯函數e^{-t^2}的傅立葉轉換與機率密度分佈函數探討

若直接由定義去做e^{-t^2}的傅立葉轉換，需要用到複變中的解析函數路徑積分（如右圖）才能嚴謹導得。



首先令

$$p(t)=te^{-t^2},\ q(t)=e^{-t^2}$$

利用傅氏轉換性質，可得下表之關係

轉換前 t 域	轉換後 ω 域
$tq(t)=p(t)$	$iQ'(\omega)=P(\omega)$
$q'(t)=-2p(t)$	$i\omega Q(\omega)=-2P(\omega)$

將其關係式聯立，可在頻率域找到$Q(\omega)$的一階常微分方程

$$Q'(\omega)=-\frac{\omega}{2}Q(\omega)$$

解 $Q(\omega)$ 與其待定係數，可得e^{-t^2}的傅立葉轉換結果

$$Q(\omega)=\sqrt{\pi}e^{-\frac{1}{4}\omega^2}$$

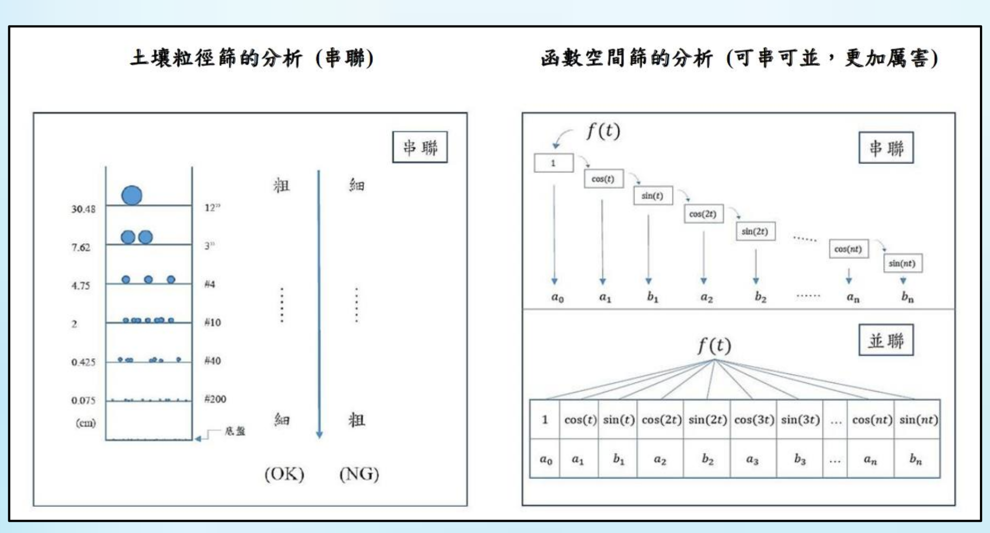
進而避開照定義直接求e^{-t^2}的傅立葉轉換之繁複運算過程。

透過上述運算數學方法所導得之e^{-t^2}的傅立葉轉換，以線性、平移、縮放等轉換性質，同樣可以求得機率密度分佈函數的傅立葉轉換解

$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right\}=e^{-\mu i\omega}e^{\frac{-\omega^2\sigma^2}{2}}$$

其中 μ 為平均值，σ 為標準差。

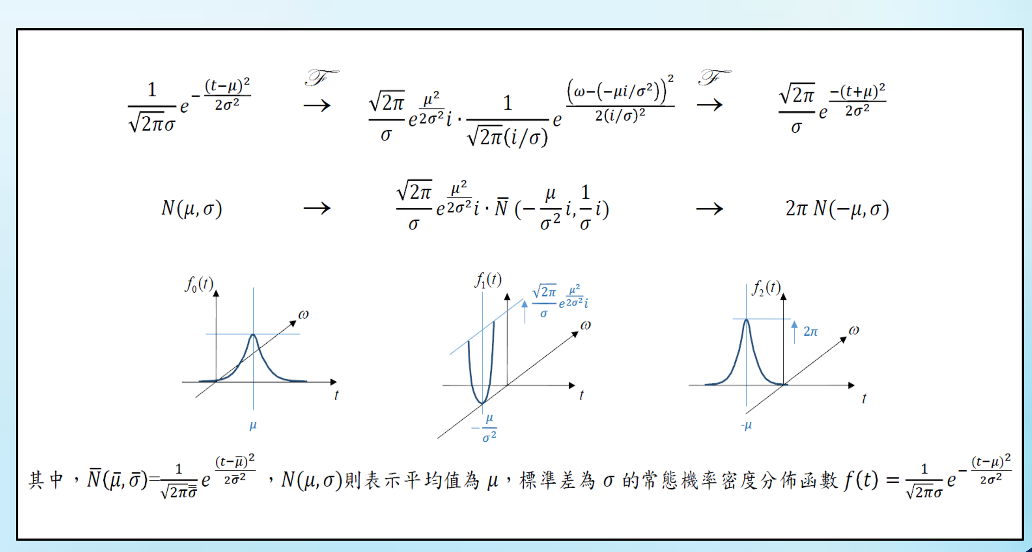
結論



第一部分透過鋸齒波週期增大的算例比較，發現傅立葉分析能串聯也能並聯的性質，並不像粒徑篩分析只能由大篩到小。

第二部分透過視無週期函數為週期趨近於無窮，將傅立葉級數升格為傅立葉積分，並以類比為粒徑分析了解傅立葉轉換所得之$\hat{F}(\omega)$所代表的意義，是描述該函數經過分析拆解後的組成成分比例。

第三部分則以求e^{-t^2}的傅立葉轉換為算例，討論與發現了如何利用傅立葉轉換性質來迴避原先的複雜計算。最後也更進一步以機率密度函數為算例，發現該函數在各次轉換有特殊的規律性以及五大改變。



致謝

本研究結果感謝教育部海大教學中心，教學卓越計畫大署案 NTOU E-14 的經費贊助，以及指導教授陳正宗特聘講座教授、高政宏博士、高聖凱助理、呂政軒學長、戴暐宸學長、周彥廷學長，提供寶貴意見。感謝MSV團隊提供良好的學習環境和海大教學中心的經費支持，以及陳老師悉心的教導，讓我對於研究的架構以及概念有了初步的認識。 這些學習過程逐漸讓我建立起成就感和自信心，也讓我意識到在這茫茫的學術大海中，自己還是十分的渺小，也深刻體會到何謂「學海無涯，學無止盡」以及為何要「活到老，學到老」。而透過這次研究計畫，更讓我爭取到教育部基礎人才培育計畫，編號109A0162的贊助，計畫題目：理論解析反平面剪力場含圓/橢圓/線彈性夾雜之問題，實在是意外之喜。

參考文獻

1. 林琦焜, 傅立葉分析與應用, 蒼海書局, 2010。
2. 顧承宇, 土壤力學實驗上課講義, 海洋大學, 基隆, 2020。
3. 陳正宗, 工程數學講義, 海洋大學, 基隆, 2021。
4. 吳庭安, 周彥廷, 陳彥亨, 運算數學的幾個有趣案例分享, TWSIAM 第九屆學生海報論文競賽, 2021。(陳正宗特聘講座教授指導)
5. 吳庭安, TWSIAM 第九屆學生海報論文競賽 國立臺灣海洋大學 大學生組 報告 【3分鐘講解影片】https://www.youtube.com/watch?v=ueDSy5pwIOA, 2021。
6. 海大河工工數Website 課程相關 http://msvlab.hre.ntou.edu.tw/, 2007。
7. Churchill, R.V., Operational Mathematics, New York: McGraw-Hill Book Co., 1958.
8. https://www.youtube.com/watch?v=8yp640IzOyM (rigorous)