

無網格法之最佳參數評估技術

陳俊廷 陳桂鴻

國立宜蘭大學土木工程學系

E-mail: zzz8957023@yahoo.com.tw

國科會計劃編號: NSC 95-2221-E-464-003-MY3

摘要

本研究發展一套自適性的最佳參數評估技術，在無須解析解情況下，幫助找出無網格法收斂的數值解所使用的最佳參數。過往無網格法的最佳參數一直沒有明確的尋找方法，一般我們會藉由與解析解的比較來選擇參數，因此解實際工程問題受到限制。最後本文提供數值算例，證明此評估技術的準確性。

關鍵字: 無網格方法, 最佳參數, 自適性

1. 前言

在簡單外型的物理問題，我們可運用數學理論推得解析解來讓我們了解領域內真實的物理行為，但在一般的工程問題，對於其複雜邊界外型的分析往往無法求得解析解，因此，隨著電腦的進步，學者們研究發展出各種數值方法來幫助我們求得近似解析解的數值解；藉此了解工程問題定義域(Domain)內的物理行為。

藉由學者們多年的研究突破，各種數值方法蓬勃發展[1-7]，諸如有限元素(FEM)、邊界元素(BEM)[9]都已被廣泛的研究並發表於期刊和會議上；其中有限元素法(FEM)須在定義域內設置網格來計算場內的數值解，網格疏密關乎精準度，也是目前工程界中最常使用且擁有最完善的數值套裝軟體；邊界元素法(BEM)則是只對邊界切割成多個線段，計算邊界上的物理量，再藉由領域內積分方程式來計算場內的解。無網格法是近代學術研究中主流探討的數值方法，因為發展時間較有限元素

(FEM)與邊界元素(BEM)短暫許多，其工程接受度相對較低，但因其收斂迅速、計算簡單、內差精準度高等之優異特性，對於學者們仍有很大的吸引力；無網格法打破傳統，簡化數值方法的前處理，僅需在場內或場外佈點，以基底內插求解線性代數系統，模擬出場之運動方式。

由於研究人員的努力，以 BEM 為基礎的各類無網格方法快速發展，方法的各種困難與瓶頸也逐漸被突破和解決，如 MFS 方法、MQ 方法、Trefftz 方法[10-12]等，均已在相關文獻上多有記載，但在兩點函數的無網格方法上[4, 13]，最佳參數的判斷一直是這方法難以突破的困難之一，一般文章中，皆使用與解析比較的方式來求得最理想的參數，但對於解析解未知的工程問題，無網格法最佳參數的選取至今仍未有一個有系統的找尋技術，造成無網格法的準確性與穩定性受到質疑，實用性也就大大的降低，方法的發展與進步也因此受到阻礙。

本研究裡，我們發展了新的參數評估技術來解決無網格法最佳參數難以求得的困難。以 MFS 求解兩種不同的定義域(Domain)下的物理問題，分別給定 Dirichled 和 Mixed type 兩種不同邊界條件，藉此探討此方法的精準度與實用性。

2. 問題描述和求解方法

2.1 控制方程和邊界條件

如圖 1 所示，求解二維不規則幾何外型
的勢能解 $u(x)$ ，其控制方程式表示如下：

$$\nabla^2 u(x) = 0, x \in D \quad (1)$$

∇^2 代表拉普拉斯操作元(Laplace
operator)， D 代表問題定義域， x 屬於定義域
上任一點。邊界條件給定：

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \bar{u}_1(x), x \in B_1 \\ t_2(x) &= \frac{\partial u_1(x)}{\partial n_x} = \bar{t}_2(x), x \in B_2 \end{aligned} \quad (2)$$

其中 u 和 t 分別代表定義域上之勢能及勢能對
 x 的法向微分， n_x 即代表 x 的法向量，而 B_1 表
示 Dirichlet 邊界， B_2 代表 Neumann 邊界。

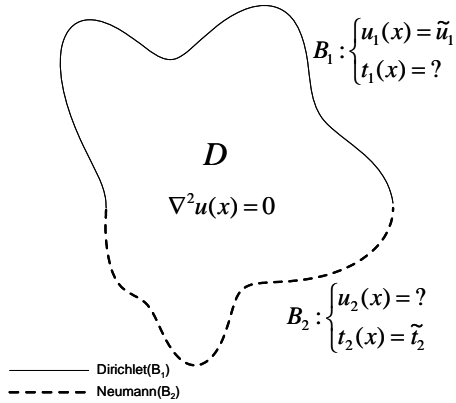


Fig.1. 欲解問題的草表示圖

2.2 解題方法

上式的勢能可以以徑向基底函數疊加求
得：

$$u(x) = \sum_{j=1}^n \phi_j U(x, s_j) \quad (3)$$

$$t(x) = \sum_{j=1}^n \phi_j L(x, s_j) \quad (4)$$

n 代表基底函數的總數， ϕ_j 代表第 j 個

基底的權重，為一組待定係數， $U(x, s_j)$ 以徑

向函數當作基底， $L(x, s_j) = \frac{\partial U(x, s_j)}{\partial n_x}$ ， x

為其觀測點(observation point)， s_j 為分布於域
內或域外的內插點。

常用的典型徑向基底函數如下：

Method of fundamental solutions (MFS):

$$U(x_i, s_j) = \ln r_{ij} \quad (5)$$

Multi-Quadratics (MQ):

$$U(x_i, s_j) = (c^2 + r_{ij}^2)^{-1/2} \quad (6)$$

Gaussians(高斯):

$$U(x_i, s_j) = \exp(-cr_{ij}^2) \quad (7)$$

Thin-Plate Spline (TPS):

$$U(x_i, s_j) = r_{ij}^{2k} \ln r_{ij} \quad (8)$$

其中 c 、 k 分別代表其未定參數，而 r_{ij} 即是第
 i 個觀測點與第 j 個內插點的距離。根據 Wang
J. G. 和 Liu G. R. [13] 的研究建議， k 可取
1.03。

為了求得未定係數 ϕ ，先將場點佈置於
邊界之上，當 x 座落於邊界所選取的 n 個點上
可得線性代數系統如下：

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= [U] \tilde{\phi} \\ \tilde{t} &= [L] \tilde{\phi} \end{aligned} \quad (9)$$

其中

$$\tilde{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \end{Bmatrix}, \tilde{t} = \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{t}_1 \\ \tilde{t}_2 \end{Bmatrix} \quad (10)$$

其中 $\tilde{u}_1(x)$ 座落在 B_1 ， $\tilde{u}_2(x)$ 座落在 B_2 ，

$$[U] = \begin{bmatrix} U_{1,1} & U_{1,2} & \cdots & U_{1,n-1} & U_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ U_{n,1} & U_{n,2} & \cdots & U_{n,n-1} & U_{n,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$[L] = \begin{bmatrix} L_{1,1} & L_{1,2} & \cdots & L_{1,n-1} & L_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ L_{n,1} & L_{n,2} & \cdots & L_{n,n-1} & L_{n,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}$$

上式 $U_{ij} = U(x_i, s_j) = \ln r_{ij}$,

$$L_{ij} = L(x_i, s_j) = \frac{\partial \ln r_{ij}}{\partial n_x}$$
 , r_{ij} 為 x_i 與 s_j 的距離。

離。

$$\tilde{\phi} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_{n-1} \\ \phi_n \end{bmatrix} \quad (12)$$

配合邊界條件後可得：

$$\begin{Bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{t}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [U_1] \\ [L_2] \end{bmatrix} \tilde{\phi} \quad (13)$$

藉由線性代數法求解可得未定係數 $\tilde{\phi}$ 。

觀測點與內插點的分佈如圖 2 所示，其中 d 為佈在邊界上的觀測點與內插點的距離。

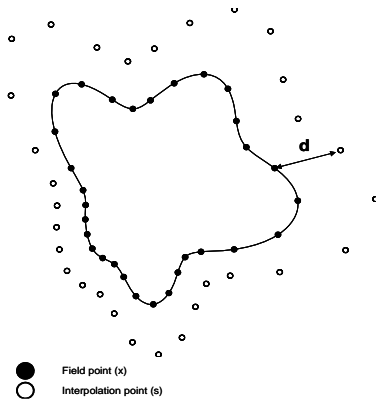


Fig.2, d 為場點與內插點的距離。

因為不同距離 d 會得到不同的勢能值 $u(x)$, 以往需藉由參照解析解的方式來決定最佳的參數 d , 也因此能處理的問題會受到限制, 本研究針對這此缺陷而發展出一套最佳參數評估技術, 希望能在無須參照解析解的情況下, 仍可獲得最佳的參數 d , 此最佳參數評估

技術的求解步驟將在下一章節詳述。

2.3 最佳參數評估技術

本研究針對無網格法的最佳參數難以決定的缺點, 發展出一套自適性的最佳參數評估技術, 此技術無需用到解析解。

1. 第一步, 求解二維邊界值問題, 藉由邊界條件(2), 使用無網格法可以求的邊界上

$$\text{的物理量} \begin{cases} u_2(x) = \overline{u_2}, x \in B_2 \\ t_1(x) = \overline{t_1}, t \in B_1 \end{cases}$$

2. 第二步, 利用所求出的 $t_1(x) = \overline{t_1}(x)$ 和

$u_2(x) = \overline{u_2}$ 當成新問題的邊界條件, 再使用無網格法求出原始邊界上的物理量,

$$\begin{cases} u_1(x) = \overline{u_1}, x \in B_1 \\ t_2(x) = \overline{t_2}, t \in B_2 \end{cases}$$

3. 第三步, 我們將第二步的所得到的

$$u_1(x) = \overline{u_1} \text{ 比較原始邊界條件}$$

$$u_1(x) = \overline{u_1}, \text{ 藉由相對誤差公式,}$$

$$\| \overline{u_1} - \overline{u_1} \| = \int | \overline{u_1} - \overline{u_1} |^2 ds, \text{ 不同的參數}$$

下, 可求的不同的誤差值, 繪製出誤差曲線如, 圖(3)所示。在本研究的最佳參數評估技術, 最佳參數值 d 是位於誤差曲線圖(3)的反曲點, 代表的涵義是介於平穩誤差(due to data smoothing)和擾動誤差(due to noise disturbance)的平衡點。

以上最佳參數評估技術的詳細流程如圖(4)所示。

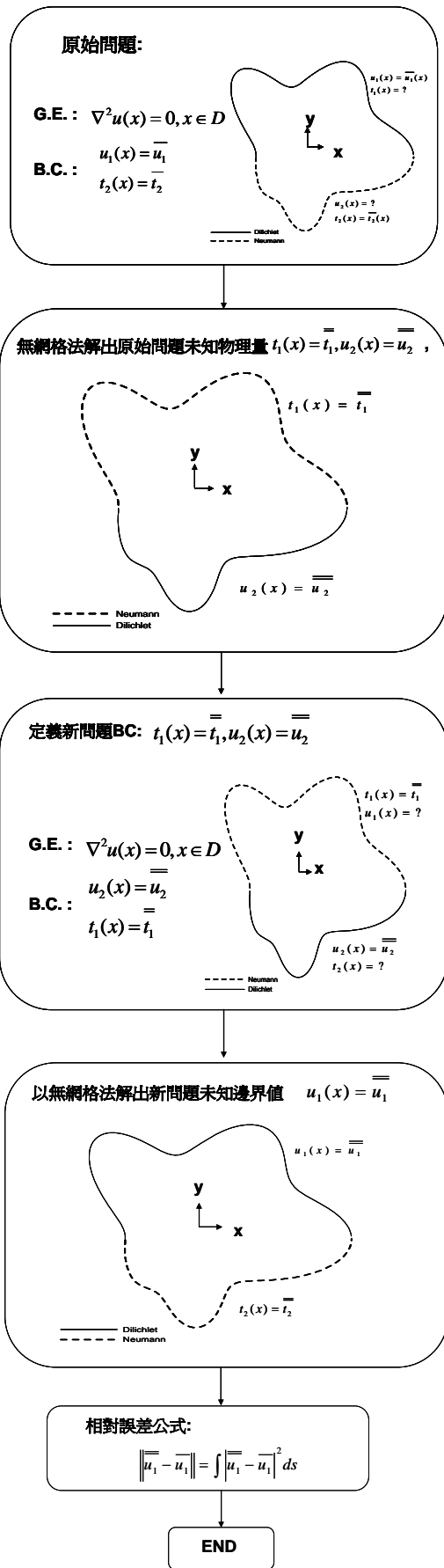


Fig. 4. 最佳參數評估技術流程圖

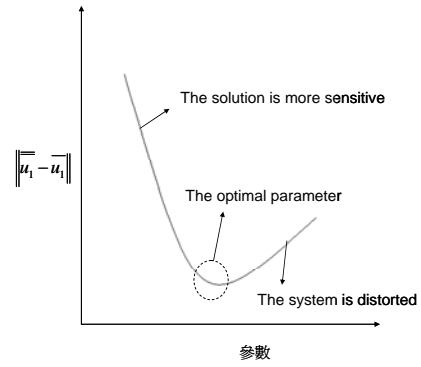


Fig. 3. 誤差收斂曲線

此自適性最佳參數評估技術突破須要解析解的限制，在不需解析解的情況下，亦可求得各類徑向基底函數的參數。

3. 數值案例

以下舉兩個數值案例來證明此參數評估技術的有效性和準確性，第一個案例為方型板含 Dirichlet 邊界條件的問題，第二個案例為 1/4 單連通含 Mixed type 邊界條件的問題，證明此參數評估技術用於求解基本解法(MFS)最佳參數的功效。

3.1. 方型板含 Dirichlet 邊界條件的問題

第一個案例我們使用每邊長 1.0m 含 Dirichlet 邊界的方板穩態熱傳問題，四個邊的邊界條件為 $u_1(x) = x$, $u_2(x) = 0$, $u_3(x) = x$, $u_4(x) = 0$ ，如圖 5 所示。

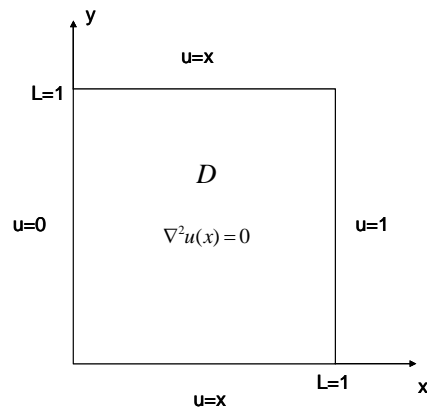


Fig.5. 方型板含 Dirichlet 邊界條件的問題

於真實物理邊界上均勻佈觀測點，並於邊界外佈虛擬邊界如圖 6。

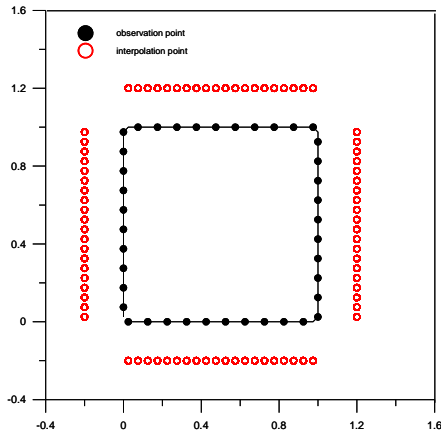


Fig.6.算例一之觀測點與內插點的分佈

其數值理論域內任意點之勢能值為 $u(x) = x$ ，域內勢能解析解如圖 7。

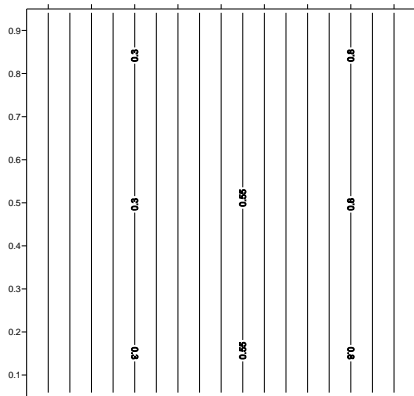


Fig.7.算例一的解析解

首先探討點數的收斂性，分別計算邊界上不同觀測點數量的相對誤差值，畫出誤差曲線如圖 8。

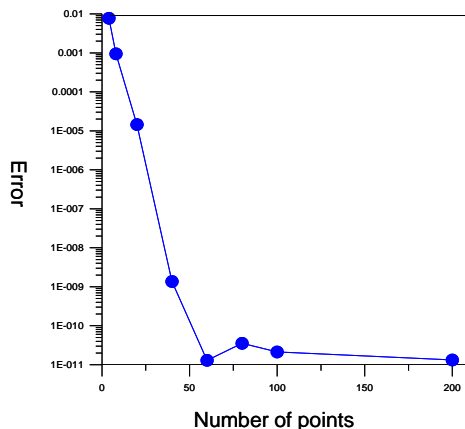


Fig.8.算例一的點數收斂分析

由誤差曲線可得知約佈 60 點即達到收斂效果。接著以邊界佈 60 點來探討此最佳參數評估技術與解析解相比的準確度。

首先，我們以基本解法(MFS)求解，參照解析解可求得參數誤差曲線，如圖 9 所示，所得到的最佳參數為 $d=0.1m$ ；接著使用最佳參數評估技術，其參數誤差曲線亦畫在圖 9，由兩誤差曲線可發現本研究之誤差趨勢與對照解析解時的情況是相符的，並且兩誤差曲線的低點也十分接近，接著以最佳參數求得域內勢能解如圖 10，並比照解析解(圖 7)，由兩場解圖的一至性成功證明本參數評估技術的有效性和準確度。

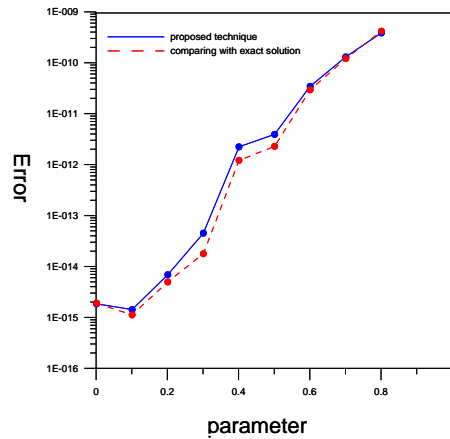


Fig.9.算例一的誤差曲線。

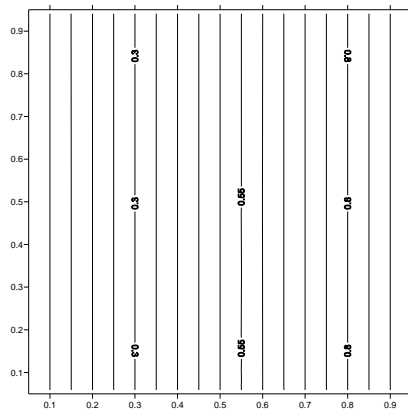


Fig.10.本技術所求得的 d 之場解。

3.2 1/8 單連通含 Mixed type 邊界條件的問題

第二個案例我們使用邊界型態為 Mixed type 的 1/8 單連通問題，內半徑 $r_1=0.75\text{m}$ ，外半徑 $r_2=3r_1=2.25\text{m}$ ，夾角為 45 度，邊界條件 $u = u_1 = 0, u = u_2 = 1, t = 0$ ，如圖 11。

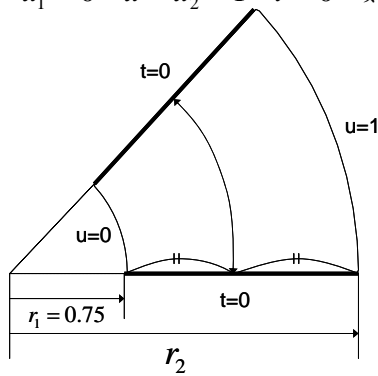


Fig.11. 1/8 單連通含 Mixed type 邊界條件的問題

勢能和流量值的理論方程式表示如下：

$$u = u_1 + (u_2 - u_1) \frac{\ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)} \quad (13)$$

$$t = \frac{u_2 - u_1}{r \ln(r_2/r_1)} \frac{\partial r}{\partial n} \quad (14)$$

其域內勢能解析解如圖 12。

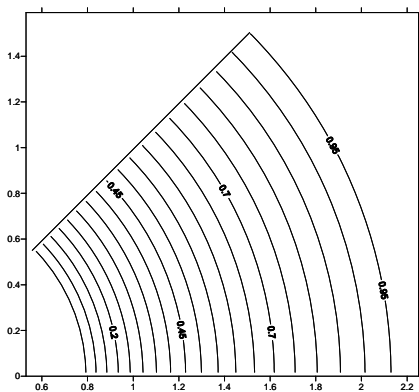


Fig.12. 算例二的解析解

接著同樣探討點數的收斂性，先在真實物理邊界上佈觀測點(collocation)，於虛擬邊界上佈點內差(source)如圖 13。

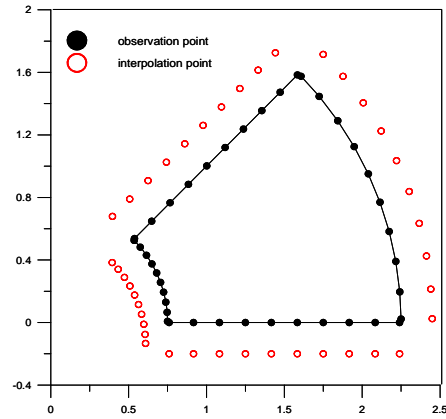


Fig.13. 算例二之觀測點與內插點的分佈。

分別計算佈不同數量的觀測點時的誤差值，並以誤差曲線表示如圖 14。

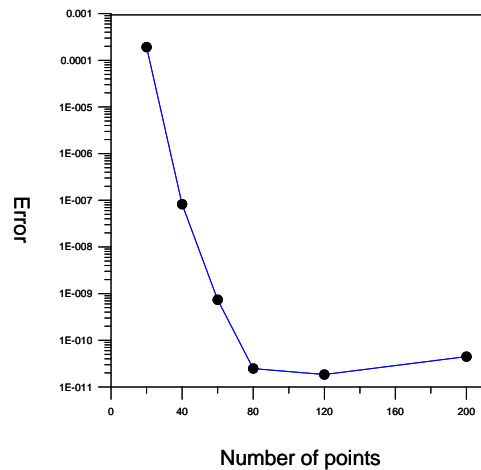


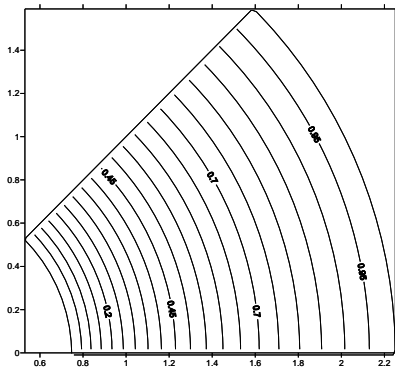
Fig.14. 算例二的點數收斂分析

由誤差曲線可得知佈 80 點即達到收斂效果，接著以佈 80 點來探討此最佳參數評估技術與解析解相比的準確度。

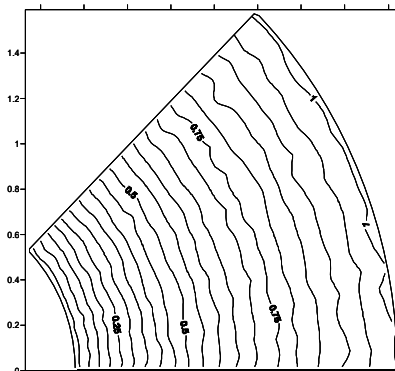
我們以 MFS 參照解析解，其參數誤差曲線所得到的最佳參數為 $d=1.0$ ；接著做新研究的參數評估技術，以研究的參數評估技術參照 MFS 解並繪出誤差曲線，與原參數誤差曲線比較如圖 15，所得到的最佳參數同樣為 $d=1.0$ ，對照兩誤差曲線，證明此最佳參數評估技術所求得之參數相當接近對照解析解之所得，並繪出用此參數所求得的勢能解圖如圖 16(a)，並與解析解圖 12 做比較，可得數值結果近似理論結果，並同時繪出參數過小及過大

的情況如圖 16(b)與(c)，比照圖 12 與 16，可成功證明本參數評估技術確實較為準確。

(a). 參數 $d=1.0$



(b). 參數 $d=0.001$



(c). 參數 $d=15.0$

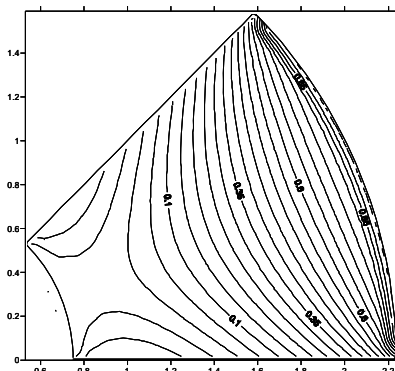


Fig. 16. 不同參數(d)的場解

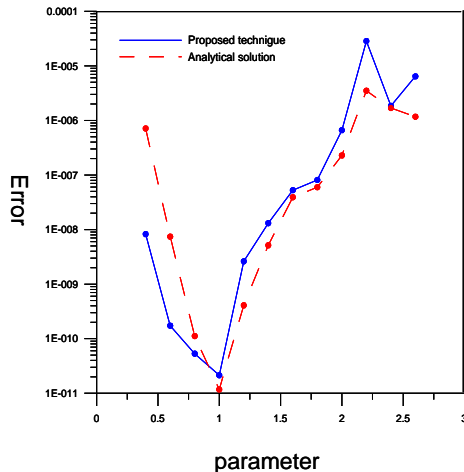


Fig.15. 算例二之誤差曲線。

4. 結論

本研究成功證明本法所提供的參數評估技術用於基本解法(MFS)解二維勢能問題的有效性與準確性，由數值驗證，可知本參數評估法所求得之參數與藉由解析解所求得的參數是十分接近的。成功證明即使在沒有解析解的情況下，我們亦可求出精準的參數。

5. 致謝

感謝國家科學委員會對計劃 No. NSC-95-2221-E-464-003-MY3 研究經費上的贊助。

6. 參考文獻

[1] K. H. Chen, J. T. Chen and J. H. Kao , "Regularized meshless method for antiplane shear problems with multiple inclusions", Int. J. Numer. Meth. Engng, Vol. 73, pp. 1251-1273 , 2008 .

[2] D. L. Young, K. H. Chen and J. T. Chen, "A Modified method of fundamental solutions with F source on the boundary for solving Laplace equation with circular and arbitrary domains" , Center For Middle Eastern Studies, Vol. 19, No. 13 , pp. 197-221, 2007 .

[3] Ting Wei, Y. C. Hon, Leevan Ling, "Method of fundamental solutions with regularization techniques for Cauchy problems of elliptic operators" Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol. 31, pp. 373-385, 2007 .

[4] Wang J. G., Liu, G.R., "On the optimal shape parameters of radial basis functions used for 2-D meshless methods", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 191, No. 23-24, pp. 2611-2630, 2002 .

[5] S. Yu. Reutskiy, "The method of fundamental solutions for Helmholtz eigenvalue

problems in simply and multiply connected domains” *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 30, pp. 150–159, 2006 .

[6] D.L. Young, K.H. Chen, C.W. Lee, ” Novel meshless method for solving the potential problems with arbitrary domain” *Journal of Computational Physics*, Vol. 209, pp. 290–321, 2005 .

[7] C.S. Chen, Hokwon A. Cho , M.A. Golberg, “Some comments on the ill-conditioning of the method of fundamental solutions” *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 30, pp. 405–410, 2005 .

[8] Hang Maa, Qing-Hua Qin, ”Solving potential problems by a boundary-type meshless method—the boundary point method based on BIE”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 31, pp. 749–761, 2007 .

[9] Jurgen Friedrich, “A linear analytical boundary element method (BEM) for 2D homogeneous potential problems”, *Computers & Geosciences*, Vol. 28, pp. 679–692, 2008 .

[10] K. H. Chen, C. T. Chen, J. F. Lee, ”Adaptive error estimation technique of the Trefftz method for solving the over-specified boundary value problem”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 33, pp. 966–982 , 2009 .

[11] E. Kita, N. Kamiya, T. Iio, ”Application of a direct Trefftz method with domain decomposition to 2D potential problems”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 23, pp. 539–548, 1999 .

[12] J.T. Chen, C.S. Wu, Y.T. Lee, K.H. Chen, “On the equivalence of the Trefftz method and method of fundamental solutions for Laplace and biharmonic equations”, *Computers and Mathematics with Applications* , Vol. 53, pp.

851–879, 2007 .

[13] 趙敏，陳文，”徑向基底函數無網格伽遼金法求解彈性地基板的彎曲” Accepted 中國土木水利學刊。

The optimal parameter estimation technique of the Meshless method

Jun-Ting Chen and Kue-Hong Chen

Nation Iian University Department of Civil Engineering

ABSTRACT

In this study, we develop the technique of optimal parameter estimation to obtain the optimal parameter without having analytical solution. This study develops an adaptive scheme of the optimal parameter estimation. The convergent numerical solutions of the meshless method adopting the optimal parameter can be obtained in unavailable analytic solution condition. The technique transforms the influence matrix into a well-posed one by choosing an appropriate parameter for d and had been successfully applied to overcome the problem of the optimal parameter is unknown. Finally, the results of the numerical experiments by using the method fundamental solutions are presented to justify the validity of the technique.

Keywords: meshless method, optimal parameter, adaptive.