

多域自然应力边界积分方程

程长征¹, 牛忠荣¹, 杨智勇²

(1. 合肥工业大学 土木建筑工程学院, 安徽 合肥 230009; 2. 铜陵学院 机械系, 安徽 铜陵 244000)

摘要:文章通过对常规应力边界积分方程反复的分部积分,将应力表示成位移 u_i 、面力 t_i 及自然变量 ω_i 的积分形式,并推广到多域系统,建立了多域自然应力边界积分方程;该积分方程仅含几乎强奇异积分,同常规应力边界积分方程所含的几乎超奇异积分相比,奇异性降低了一阶;再利用正则化技术解析处理多域自然应力边界积分方程中的几乎强奇异积分,从而可以准确计算多域系统近边界内点的应力。

关键词:多域法; 应力边界积分方程; 几乎超奇异积分

中图分类号:O302 **文献标识码:**A **文章编号:**1003-5060(2007)09-1170-04

Natural stress boundary integral equation in multi-domain systems

CHENG Chang-zheng¹, NIU Zhong-rong¹, YANG Zhi-yong²

(1. School of Civil Engineering, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China; 2. Dept. of Mechanical Engineering, Tongling University, Tongling 244000, China)

Abstract: This paper studies the boundary integral equation(BIE) for analysis of stress in multi-domain systems. A new formulation termed as the natural stress BIE is obtained by means of integration by parts from the conventional stress BIE. The natural stress BIE reduces one order singularity in comparison with the conventional one for there are only the nearly strong-singular integrals in the natural stress BIE. Then the regularization algorithm is introduced to evaluate the nearly strong-singular integrals in the natural stress BIE. Thus, the natural stress BIE can be applied to calculating the stresses at the points very close to the boundary. A numerical example illustrates the efficiency of the presented method.

Key words: multi-domain technique; boundary integral equation for analysis of stress; nearly hyper-singular integral

边界元法分析由多种材料组成的结构时,须将整个求解域剖分为多个子域,在每个子域建立边界积分方程^[1]。然而,常规的应力边界积分方程在计算各子域交界或边界附近的应力时会产生几乎超奇异积分,使得采用边界元法计算近边界内点应力值的精度,随着内点趋近边界程度的增加而降低^[2]。

国内外的研究者做了大量的工作来处理超奇异积分^[3]。目前的方法对光滑边界上的超奇异积分获得了结果,但对角点或物理量不连续的边界却没有成功。文献[4]利用反复的分部积分将引

起几乎奇异积分的项移到积分号外面,获得了计算几乎超奇异积分的解析解,但由于解析算式中分母的阶次太高,对离边界非常近的内点出现的几乎超奇异积分的数值计算仍然不理想。

本文摒弃前人分别计算常规应力边界积分方程中的几乎超奇异和几乎强奇异积分的思想^[5-7],计算几乎强奇异和几乎超奇异积分两者之和,建立了自然应力边界积分方程,仅含几乎强奇异积分。然后对得到的强奇异积分施以正则化,从而可以更加准确地计算出近边界内点的应力值。

收稿日期:2006-10-12;修改日期:2006-12-30

基金项目:教育部博士点基金资助项目(20050359009);安徽省自然科学基金资助项目(050440503)

作者简介:程长征(1979-),男,安徽太湖人,博士,合肥工业大学讲师;

牛忠荣(1957-),男,安徽合肥人,博士,合肥工业大学教授,博士生导师。



1 多域自然应力边界积分方程的建立

不计体力的情况下,常规的二维弹性力学应力边界积分方程为^[8]

$$\sigma_{ik}(y) = \int_{\Gamma} W_{ikj}^*(x,y)t_j(x)d\Gamma - \int_{\Gamma} S_{ikj}^*(x,y)u_j(x)d\Gamma \quad (1)$$

其中, x 为场点; y 为源点; $i, j, k=1, 2$; $u_j(x), t_j(x)$ 是边界 Γ 上的位移和面力分量; W_{ikj}^*, S_{ikj}^* 是计算应力的基本解,具体表达式参见文献[8]。当源点 y 趋近于边界 Γ 时,(1)式右边的第 1、2 项分别为几乎强奇异和超奇异积分。这是由于位移导数边界积分方程

$$u_{i,k}(y) = \int_{\Gamma} U_{ij,k}^*(y,x)t_j(x)d\Gamma - \int_{\Gamma} T_{ij,k}^*(y,x)u_j(x)d\Gamma \quad (2)$$

中的积分核 $U_{ij,k}^*$ 和 $T_{ij,k}^*$ 分别具有几乎强奇异和超奇异性引起的。现在在内点积分时发生几乎奇异积分的边界设为 Γ_1 ,其他边界设为 Γ_2 , Γ_1 和 Γ_2 的 2 交界点分别记为 x_1, x_2 ,则总边界 $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$,如图 1 所示。其中, n 表示边界法向; τ 表示边界切向。

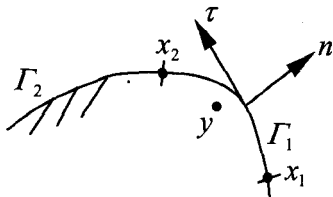


图 1 积分边界的划分

为消除常规应力边界积分方程中的几乎超奇异积分,将(2)式在引起几乎超奇异积分的边界

$$\begin{cases} \varphi \omega_1(y) = \int_{\Gamma_1} \left(\frac{r_{,n}}{r} \omega_1 + \frac{r_{,\tau}}{r} \omega_2 \right) d\Gamma - \frac{r_{,k}}{r} \in_{kj} u_j \Big|_{x=x_1}^{x_2} + \int_{\Gamma_2} \left[\frac{r_{,j}}{r} \frac{t_j}{2G} + \frac{1}{r^2} (2r_{,j} r_{,n} - n_j) u_j \right] d\Gamma \\ \varphi \omega_2(y) = \int_{\Gamma_1} \left(-\frac{r_{,\tau}}{r} \omega_1 + \frac{r_{,n}}{r} \omega_2 \right) d\Gamma + \frac{r_{,j}}{r} u_j \Big|_{x=x_1}^{x_2} + \int_{\Gamma_2} \left[\frac{r_{,k}}{r} \in_{kj} \frac{t_j}{2G} - \frac{1}{r^2} (2r_{,j} r_{,\tau} - \tau_j) u_j \right] d\Gamma \end{cases} \quad (y \in \Gamma_1) \quad (7)$$

其中, φ 为仅与源点处几何形状有关的系数; r 为源点到场点的距离; $r_{,i}$ 为 r 对场点坐标 x_i 的一阶偏导。在已经获得边界位移和面力的前提下,由(7)式可以解出边界上的自然边界变量 $\omega_i (i=1, 2)$ 。

现将(4)式中的位移切向导数 $\partial u_j / \partial \tau$ 和面力 t_j 组合成以自然变量的形式表达。也就是将(4)

Γ_1 上的积分做分部积分运算,即

$$u_{i,k}(y) = \int_{\Gamma} U_{ij,k}^* t_j d\Gamma - \int_{\Gamma_2} T_{ij,k}^* u_j d\Gamma - \int_{\Gamma_1} E_{ij,k}^* \frac{\partial u_j}{\partial \tau} d\Gamma + E_{ij,k}^* u_j \Big|_{x=x_1}^{x_2} \quad (3)$$

使得具有超奇异性的积分核 $T_{ij,k}^*$ 转变为仅具有强奇异性的 $E_{ij,k}^*$,将(3)式代入几何方程得出内点应变,再代入本构方程,可以导出内点应力积分方程为

$$\sigma_{ik}(y) = \int_{\Gamma} W_{ikj}^* t_j d\Gamma - \int_{\Gamma_2} S_{ikj}^* u_j d\Gamma - \int_{\Gamma_1} F_{ikj}^* \frac{\partial u_j}{\partial \tau} d\Gamma + F_{ikj}^* u_j \Big|_{x=x_1}^{x_2} \quad (4)$$

其中, F_{ikj}^* 的表达式为

$$F_{ikj}^* = -\frac{2G}{4\pi(1-\nu)r} [(1-\nu)(\in_{mk} r_{,m} \delta_{ij} + \in_{mj} r_{,i} - (1-2\nu)\in_{mj} \delta_{ik} r_{,m}) - 2\in_{jm} r_{,i} r_{,k} r_{,m} - \nu(\in_{ij} r_{,k} + \in_{kj} r_{,i})] \quad (5)$$

可以看出, F_{ikj}^* 仅含有强奇异性,较(1)式中的积分核 S_{ikj}^* 的超奇异性降低了一阶奇异性。

但(4)式中却衍生出了位移沿边界的切向导数 $\partial u_j / \partial \tau$,这是一个新的未知量。以 G 表示剪切模量,定义边界上的面力与位移沿切向导数的组合为

$$\begin{cases} \omega_1 = \frac{t_n}{2G} + \frac{\partial u_{\tau}}{\partial \tau} \\ \omega_2 = \frac{t_{\tau}}{2G} - \frac{\partial u_n}{\partial \tau} \end{cases} \quad (6)$$

可以证明边界上任一点的 $\omega_i (i=1, 2)$ 不随坐标系的改变而变化^[9],所以称其为自然边界变量。

分别以符号算子 δ_{ik} 和 $-\in_{ik} (\in_{ik} \Big|_{i=k} = 0, \in_{12} = 1, \in_{21} = -1)$ 作用于(2)式两边,经过逐项张量运算可以得到

式中右端 2 个强奇异积分相加,即

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_1} \left[W_{ikj}^* t_j - F_{ikj}^* \frac{\partial u_j}{\partial \tau} \right] d\Gamma = \\ & \int_{\Gamma_1} (F_{ikj}^* n_j \omega_2 - F_{ikj}^* \tau_j \omega_1) d\Gamma + \\ & \int_{\Gamma_1} \left[F_{ikj}^* \tau_j \frac{t_n}{2G} - F_{ikj}^* n_j \frac{t_{\tau}}{2G} + W_{ikj}^* n_j t_n + W_{ikj}^* \tau_j t_{\tau} \right] d\Gamma \end{aligned} \quad (8)$$



(8)式表明方程(4)式中右端两强奇异积分可以合并,并且将位移切向导数 $\partial u_j/\partial \tau$ 转化为自然变量 w_j 。将(8)式回代入(4)式,整理得到

$$\sigma_{\alpha}(y) = \int_{\Gamma_2} W_{\dot{\alpha}j}^* t_j d\Gamma - \int_{\Gamma_2} S_{\dot{\alpha}j}^* u_j d\Gamma + F_{\dot{\alpha}k}^* u_j \Big|_{x=x_1}^{x_2} + \int_{\Gamma_1} F_{\dot{\alpha}j}^* \in_{jm}(\tau_m w_2 + n_m w_1) d\Gamma + \int_{\Gamma_1} H_{\dot{\alpha}j}^* t_m d\Gamma \quad (9)$$

(9)式将应力表示为位移 u_i 、面力 t_i 及自然边界变量 w_i 的积分形式,故称之为自然应力边界积分方程。其中

$$H_{\dot{\alpha}j}^* = \frac{1}{4\pi r} (\epsilon_{ikr,l} \epsilon_{km} + \epsilon_{ikr,l} \epsilon_{im} + r_{,k} \delta_{im} + r_{,i} \delta_{km}) \quad (10)$$

对于多域系统,需要在每个域的边界上剖分单元。若单元的结点在整个域的外边界上,由于该结点每个方向只有一个未知量(位移或面力),用单一介质边界元法可建立 2 个方程求解;若在 2 种介质(如介质 I 和 II)的公共界面上,对这样的结点每个方向有 2 个未知量(位移和面力),则按界面上任一点在 2 种介质中的位移相等、面力连续条件来建立 2 个补充方程求解。这 2 个补充方程为

$$I = \int_{-1}^1 \frac{P(\xi)}{r^4} d\xi = \frac{1}{a^2} \left\{ \frac{1}{2e^3} P \left[\frac{z}{1+z^2} + g(z) \right] - \frac{1}{2e^2} P' z g(z) + \frac{1}{2e} P'' K_1(z) - \frac{1}{4} P''' \left[\left(K_0 + K_2 - \frac{1}{2}(1+z^2) \right) + \frac{e}{4} P^{(4)} \left(K_1 + \frac{1}{3} K_3 - \frac{1}{3} L_0 - \frac{1}{2} z - \frac{2}{9} z^3 \right) - \frac{e^2}{4} P^{(5)} \left(\frac{1}{12} K_4 + \frac{1}{2} K_2 - \frac{1}{4} K_0 - \frac{1}{3} L_1 - \frac{1}{16} z^4 - \frac{1}{8} z^2 \right) \right] \Big|_{\xi=-1}^1 + \frac{e^2}{4a^2} \int_{-1}^1 P^{(6)} \left(\frac{1}{12} K_4 + \frac{1}{2} K_2 - \frac{1}{4} K_0 - \frac{1}{3} L_1 - \frac{1}{16} z^4 - \frac{1}{8} z^2 \right) d\xi \right\} \quad (13)$$

其中, a, e 为仅由单元始末节点和源点的位置确定的常数; $z, g, L_1, L_2, K_i (i=0, 1, 2, 3, 4)$ 为 ξ 的解析函数。在离散自然应力边界积分方程时,对应(12)式的多项式 $P(\xi)$ 总是有限项,对二维弹性力学问题,采用线性等参元时必有

$$P^{(5)}(\xi) = 0 \quad (14)$$

注意到(14)式,则(13)式为解析表达式,无需采用数值积分。至此,自然应力边界积分(9)式中的几乎强奇异积分得以完全的正则化。运用正则化后的自然应力边界积分(9)式可以求得离边界更近的内点应力。

3 数值算例

以内外层为不同材料的双层圆环受均匀内压为例,考察交界附近内点 A 的应力。根据对称性取结构 1/4 考虑,如图 2 所示。图中尺寸 $r_1 = 1 \text{ mm}, r_2 = 2 \text{ mm}, r_3 = 4 \text{ mm}$,内压 $q = 1 \text{ MPa}$ 。内

$$\begin{cases} u_k(I) = u_k(II) \\ t_k(I) = -t_k(II) \end{cases} \quad (k = 1, 2) \quad (11)$$

使得系统的未知量数和方程数相等,从而可以建立多域系统的自然应力边界积分方程。

2 近边界内点应力计算

当内点趋近边界时,由(9)式的积分核(10)式可以看出,自然应力边界积分方程存在几乎强奇异积分。

虽然较常规应力边界积分(1)式的超奇异积分降低了一阶奇异性,但随着内点趋近边界程度的增加,源点 y 和积分场点 x 的距离 $r = |x-y|$ 非常小,常规的高斯积分计算(9)式的几乎强奇异积分依然失效。

自然应力边界积分方程(9)式在边界 Γ_1 做线性单元离散并进行坐标变换后,所产生的几乎强奇异积分可归纳为如下形式,即

$$I = \int_{-1}^1 \frac{P(\xi)}{r^4} d\xi \quad (12)$$

其中, $P(\xi)$ 为局部坐标 ξ 的多项式形式。对(12)式采用多次的分部积分运算可以得到

外层材料的弹性模量和泊松比分别为 $E_1 = 304 \text{ GPa}, \nu_1 = 0.27$ 和 $E_2 = 206 \text{ GPa}, \nu_2 = 0.30$,此例为平面应变问题。

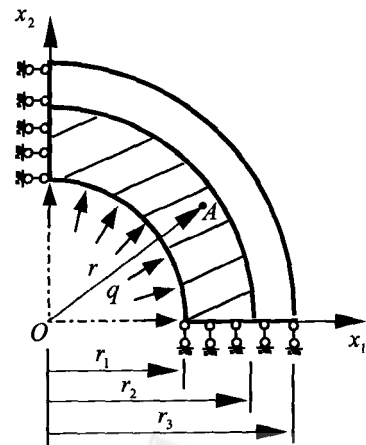


图 2 双层圆环受均匀内压

边界元法采用二次等参元,弧线边界各划分

12 个单元,直线边界各划分 3 个单元。分别采用常规应力边界积分(1)式并对出现的几乎奇异积分施以正则化^[4](CBIE with regularization),以及本文的自然应力边界积分(9)式并对其中的几乎强奇异积分运用(13)式进行正则化处理(NBIE with regularization)2 种方法进行计算。近边界内点的径向应力和切向应力计算结果分别如图 3、图 4 所示。

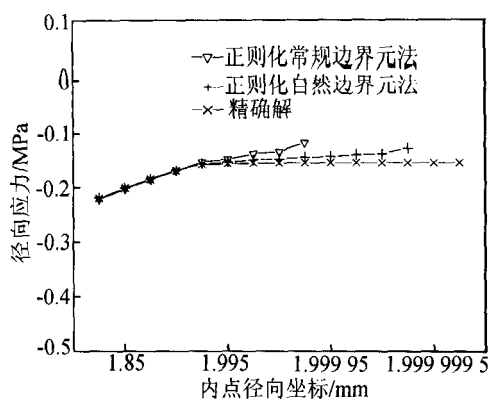


图 3 近边界内点径向应力

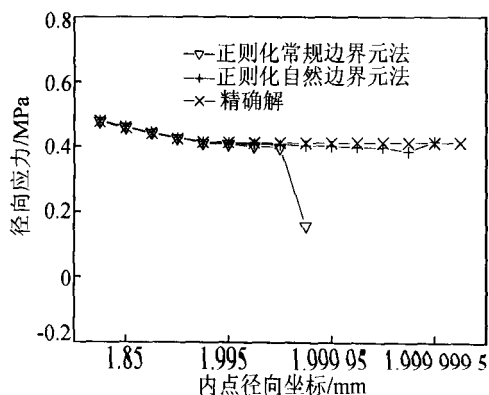


图 4 近边界内点切向应力

由图 3 可以看出,计算内点径向应力时常规边界元正则化算法在 $r=1.9999$ mm 时开始失真,而本文的自然边界元正则化算法在 $r=1.999999$ mm 时才开始失效。

由图 4 可知在计算内点切向应力时,常规方法同样在 $r=1.9999$ mm 处失效,本文结果在 $r=1.999999$ mm 处结果精度仍然很高,甚至在 $r=1.9999995$ mm 处都依然有效。因为内外层交界位置为 $r=r_2=2.0$ mm 处,显然可以看出,

本文方法能计算更加靠近交界内点的应力值。

4 结 论

本文将常规应力边界积分方程中的几乎超、强奇异积分化为强奇异积分,建立了自然应力边界积分方程,并推广至多域结构。

相对常规的应力边界积分方程,其离散计算过程中引起的几乎奇异积分阶次减小一阶,因此在相同的单元划分前提下,均采用几乎奇异积分的正则化算法,自然应力边界积分方程可以求得离边界更近的内点的应力。

参 考 文 献

- [1] Luo J F, Liu Y J, Berger E J. Interfacial stress analysis for multi-coating systems using an advanced boundary element method [J]. Computational Mechanics, 2000, 24: 448-455.
- [2] Saizonou C, Kouitat-Njiwa R, Stebut J. Surface engineering with functionally graded coatings: a numerical study based on the boundary element method [J]. Surface and Coatings Technology, 2002, 153: 290-297.
- [3] Tanaka M, Sladek V, Sladek J. Regularization techniques applied to boundary element methods [J]. Appl Mech Rev, 1994, 47 (10): 457-499.
- [4] 牛忠荣,王左辉,胡宗军,等. 二维边界元法中几乎奇异积分的解析法[J]. 工程力学, 2004, 21 (6): 113-117.
- [5] Chen X L, Liu Y J. An advanced 3D boundary element method for characterizations of composite materials [J]. Eng Anal with Boundary Elem, 2005, 29: 513-523.
- [6] Chen J T, Hong H K. Review of dual BEM with emphasis on hyper-singular integrals and divergent series [J]. Appl Mech Rev, 1999, 52 (1): 17-33.
- [7] Granados J J, Gallego R. Regularization of nearly hypersingular integrals in the boundary element method [J]. Engng Anal Boundary Elements, 2001, 25: 165-184.
- [8] 王有成. 工程中的边界元方法[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 1996: 8-25.
- [9] 牛忠荣,王秀喜,周焕林,等. 弹性力学问题中一个新的边界积分方程——自然边界积分方程[J]. 固体力学学报, 2001, 22 (2): 111-119.

(责任编辑 张 镔)

