

第13屆計算數學研討會暨台灣工業與應用數學會年會 (海報論文：碩士生組)

論二維及三維零場與非零場之真假特徵值

Yi-Chuan Kao (高怡綸), Department of Harbor and River Engineering, National Taiwan Ocean University, Taiwan (tsubasa0522@hotmail.com)

Advisor: Prof. Jeng-Tzong Chen (陳正宗)

摘要

本文利用對偶邊界積分方程法搭配退化核函數來求解二維多連通與三維單一扁長型橢球聲場特徵值問題。為了能夠充份地利用圓形、橢圓及扁長橢球外形的幾何特性，在此採用極座標、橢圓座標與扁長橢球座標來求解此特徵值問題。並將閉合型的基本解以退化核的形式分別以極座標、橢圓座標與扁長橢球座標展開，而邊界物理量則使用特徵函數展開。本文分別在Dirichlet與Neumann邊界條件下，觀察真模態發生時對應領域內為非零場而補領域則為零場，當假模態發生時則內外場域亦是本文探討的議題。最後，我們將以兩例題之真假模態與傳統邊界元素法比較，之後再將其延伸之三維探討。

問題描述

對於二維(圖一及圖二) 及三維(圖三)之聲場特徵值問題，其聲壓的控制方程式為Helmholtz方程式，表示如式(1)： $\nabla^2 u(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in V$

Dirichlet邊界條件： $u(\mathbf{x})=0$ 或Neumann邊界條件： $t(\mathbf{x}) = \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n_x} = 0$

零場對偶邊界積分方程法

$$\begin{cases} 2\pi u(\mathbf{x}) = \int_S T^l(\mathbf{s}, \mathbf{x})u(\mathbf{s})dS(\mathbf{s}) - \int_S U^l(\mathbf{s}, \mathbf{x})t(\mathbf{s})dS(\mathbf{s}), \mathbf{x} \in D \cup B \\ 2\pi t(\mathbf{x}) = \int_S M^l(\mathbf{s}, \mathbf{x})u(\mathbf{s})dS(\mathbf{s}) - \int_S L^l(\mathbf{s}, \mathbf{x})t(\mathbf{s})dS(\mathbf{s}), \mathbf{x} \in D \cup B \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = \int_S T^E(\mathbf{s}, \mathbf{x})u(\mathbf{s})dS(\mathbf{s}) - \int_S U^E(\mathbf{s}, \mathbf{x})t(\mathbf{s})dS(\mathbf{s}), \mathbf{x} \in D^c \cup B \\ 0 = \int_S M^E(\mathbf{s}, \mathbf{x})u(\mathbf{s})dS(\mathbf{s}) - \int_S L^E(\mathbf{s}, \mathbf{x})t(\mathbf{s})dS(\mathbf{s}), \mathbf{x} \in D^c \cup B \end{cases}$$

極座標的退化核

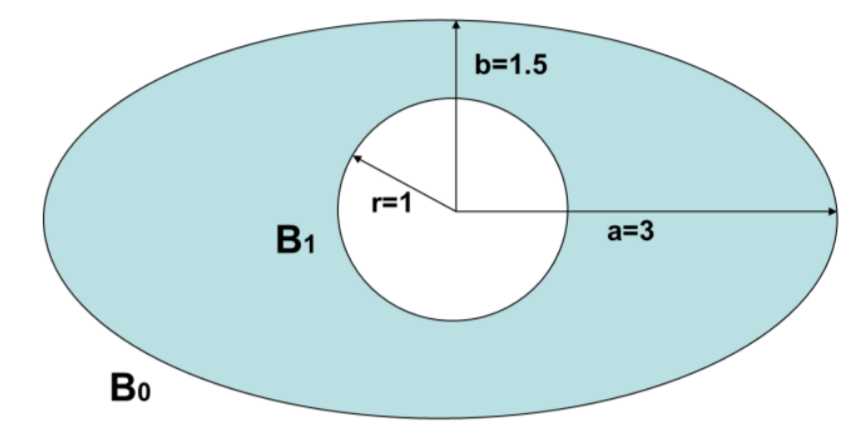
$$U(\mathbf{s}, \mathbf{x}) = \begin{cases} U^E = \frac{-\pi i}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m J_m(k\rho_s) H_m^{(1)}(k\rho_x) \cos(m(\phi_s - \phi_x)), \rho_x \geq \rho_s \\ U^I = \frac{-\pi i}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m J_m(k\rho_s) H_m^{(1)}(k\rho_s) \cos(m(\phi_s - \phi_x)), \rho_x < \rho_s \end{cases}$$

橢圓座標的退化核

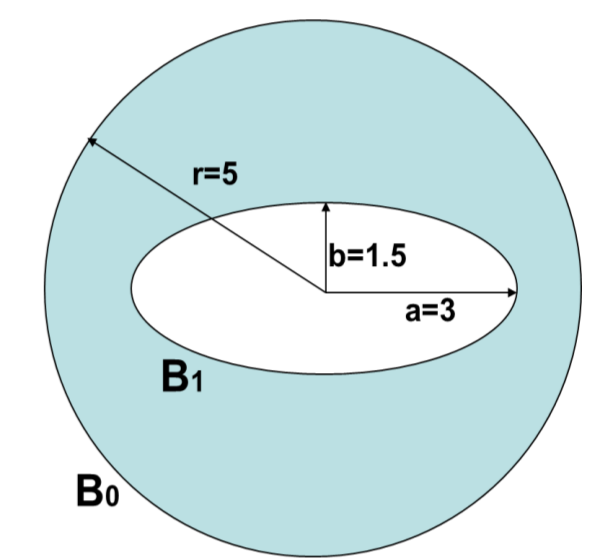
$$U(\mathbf{s}, \mathbf{x}) = \begin{cases} -2\pi i \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{Se_m(q, \eta_s)}{M_m^e(q)} Se_m(q, \eta_x) Je_m(q, \xi_s) He_m(q, \xi_x) \right. \\ \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{So_m(q, \eta_s)}{M_m^o(q)} So_m(q, \eta_x) Jo_m(q, \xi_s) Ho_m(q, \xi_x) \right), \xi_x \geq \xi_s \\ -2\pi i \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{Se_m(q, \eta_s)}{M_m^e(q)} Se_m(q, \eta_x) Je_m(q, \xi_s) He_m(q, \xi_x) \right. \\ \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{So_m(q, \eta_s)}{M_m^o(q)} So_m(q, \eta_x) Jo_m(q, \xi_s) Ho_m(q, \xi_x) \right), \xi_x < \xi_s \end{cases}$$

扁長橢球座標的退化核函數

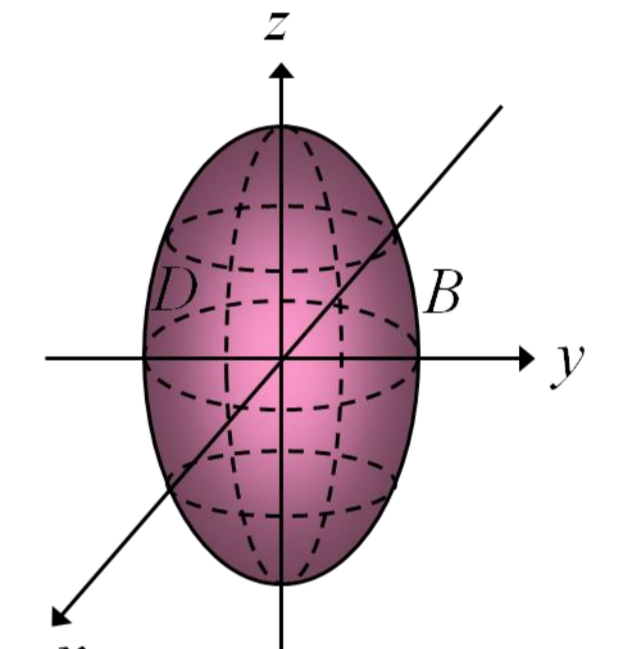
$$U(\mathbf{s}, \mathbf{x}) = \begin{cases} -2ik \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{\varepsilon_m}{\Lambda_{mn}} je_{mn}(q, \xi_s) he_{mn}(q, \xi_x) S_{mn}(q, \eta_s) S_{mn}(q, \eta_x) \cos[m(\phi_s - \phi_x)], \xi_x \geq \xi_s \\ -2ik \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{\varepsilon_m}{\Lambda_{mn}} je_{mn}(q, \xi_s) he_{mn}(q, \xi_s) S_{mn}(q, \eta_s) S_{mn}(q, \eta_x) \cos[m(\phi_s - \phi_x)], \xi_x < \xi_s \end{cases}$$



圖一 橢圓形含一圓形孔洞(二維)



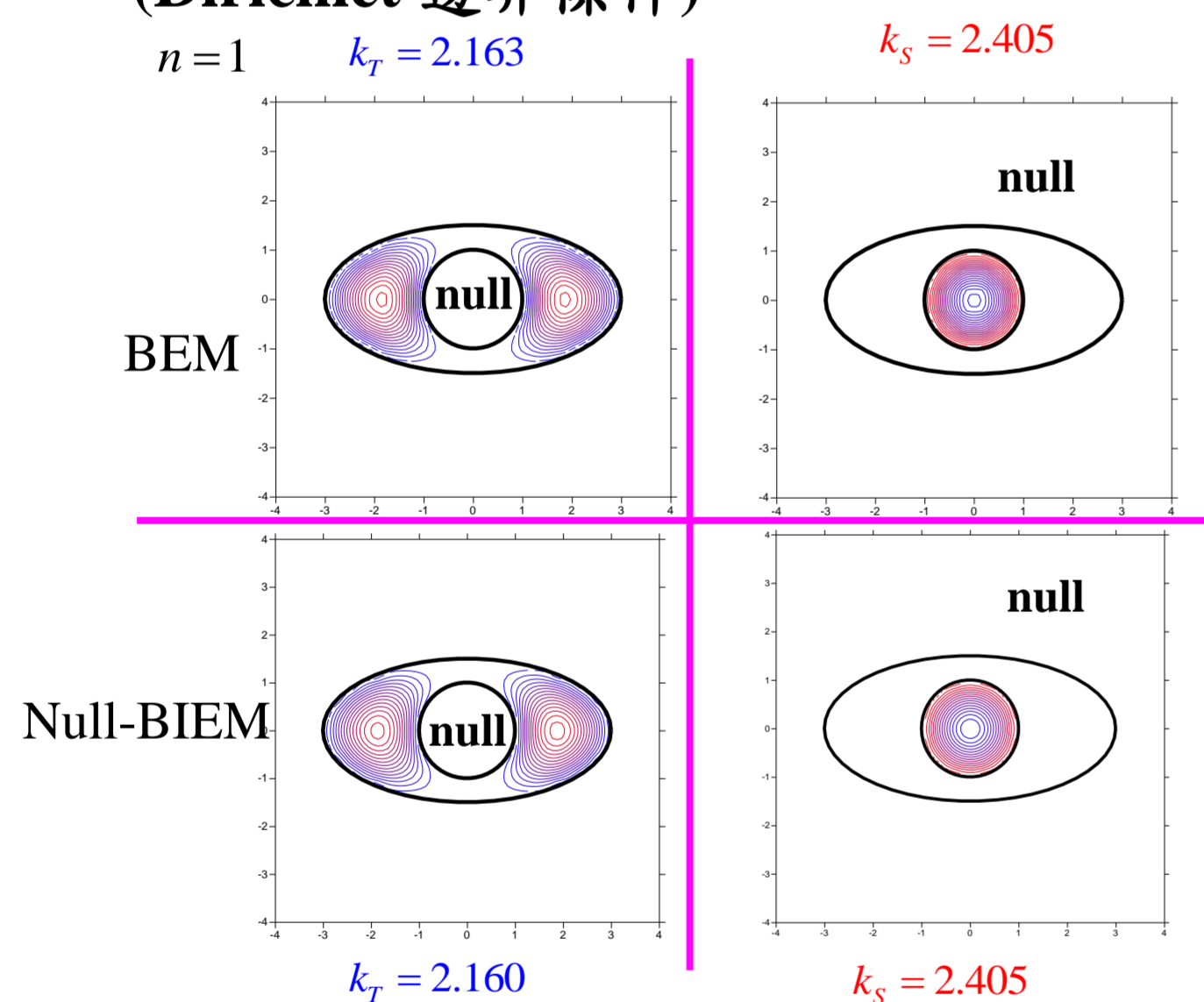
圖二 圓形含一橢圓形孔洞(二維)



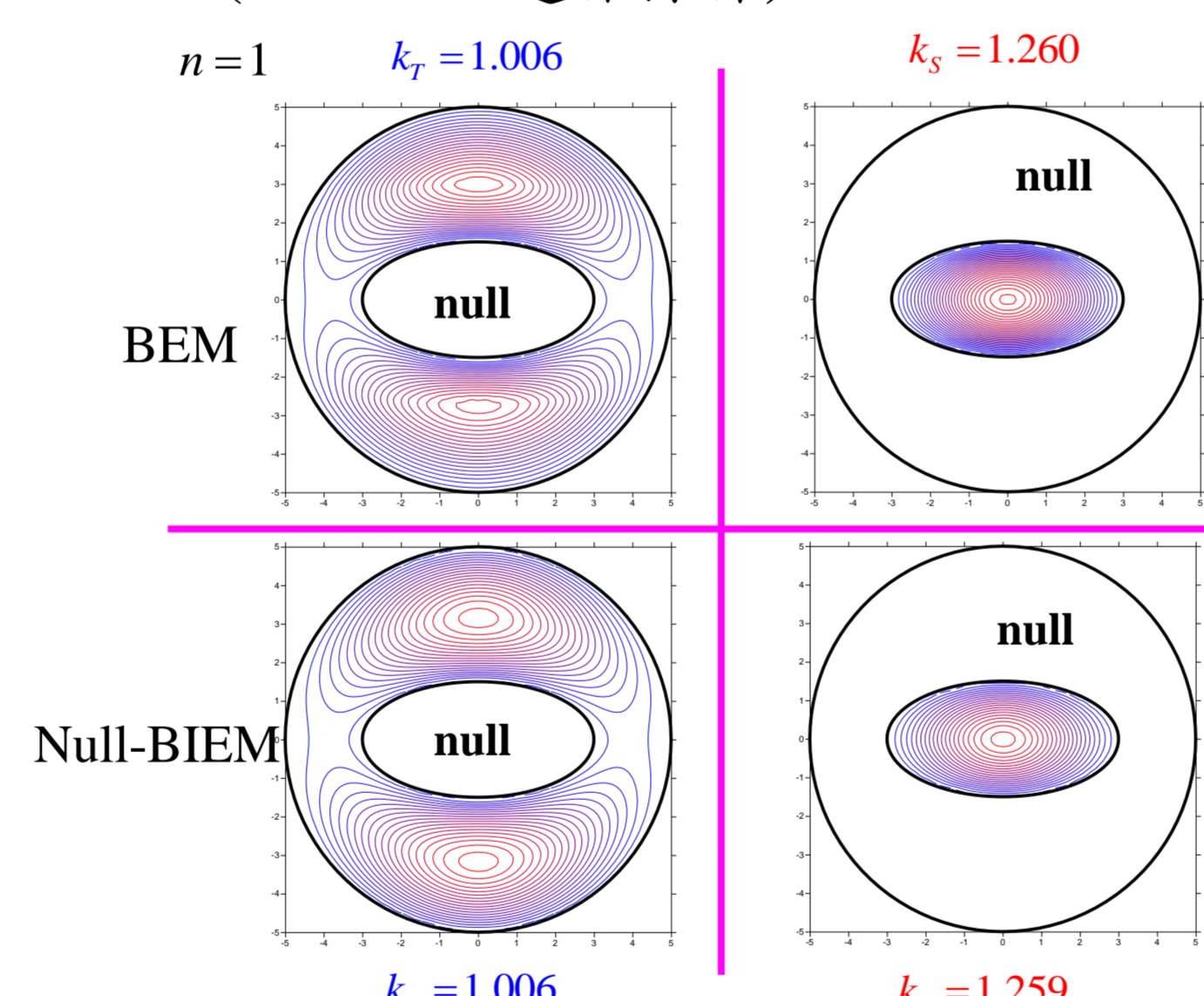
圖三 橢球體問題(三維)

結果與討論

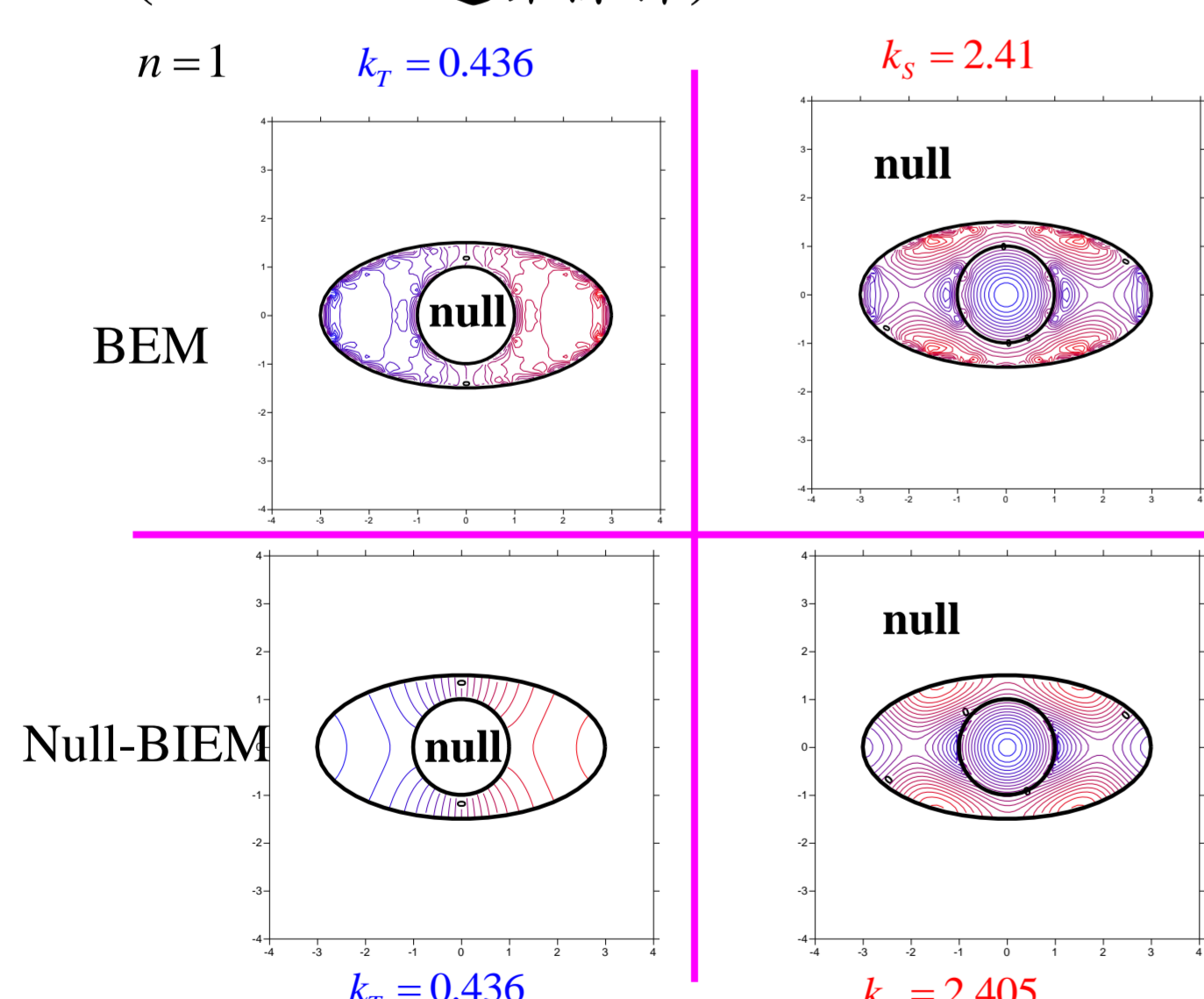
圖四 BEM及Null-BIEM之零場與非零場之模態圖 (Dirichlet 邊界條件)



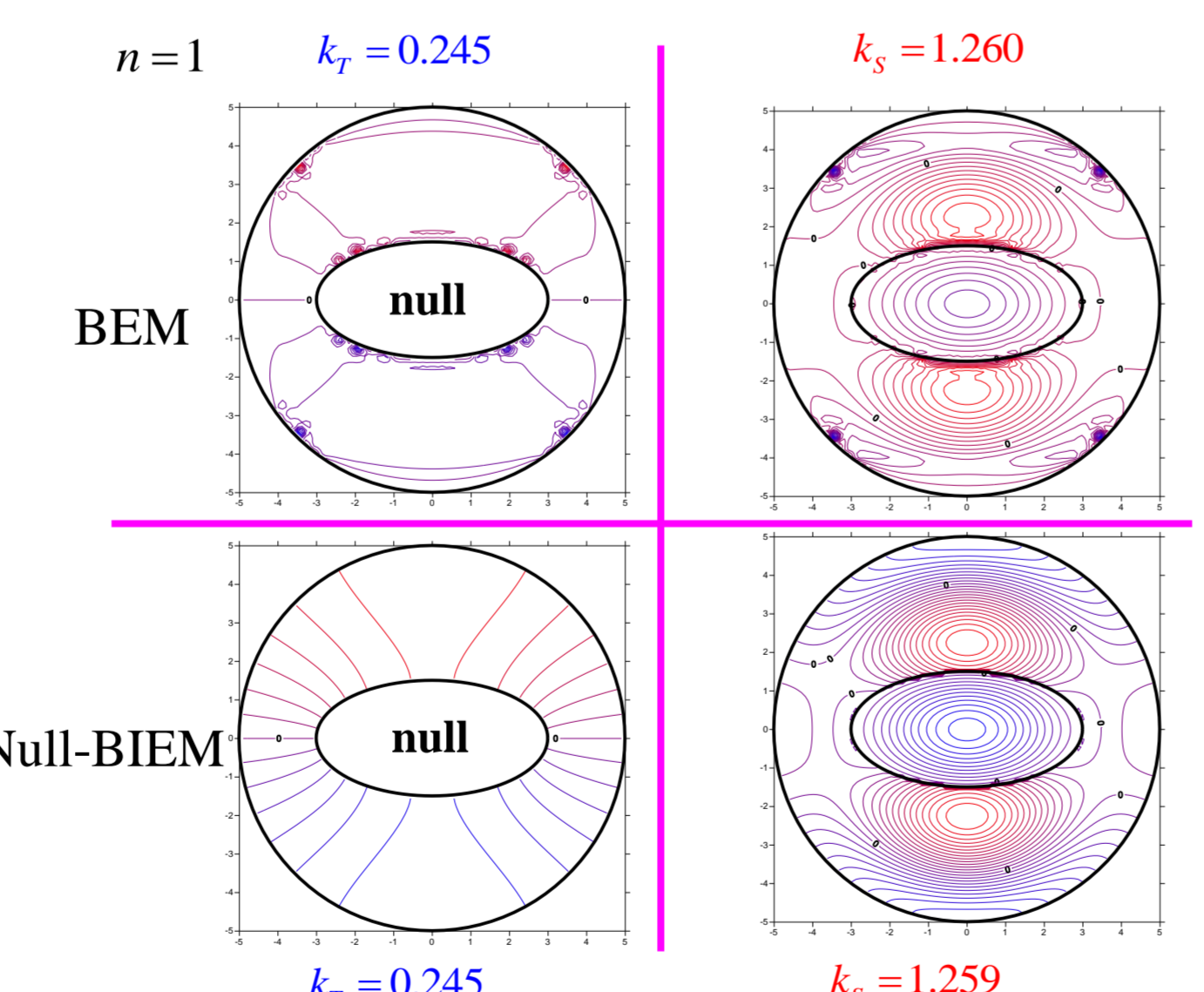
圖六 BEM及Null-BIEM之零場與非零場之模態圖 (Dirichlet 邊界條件)



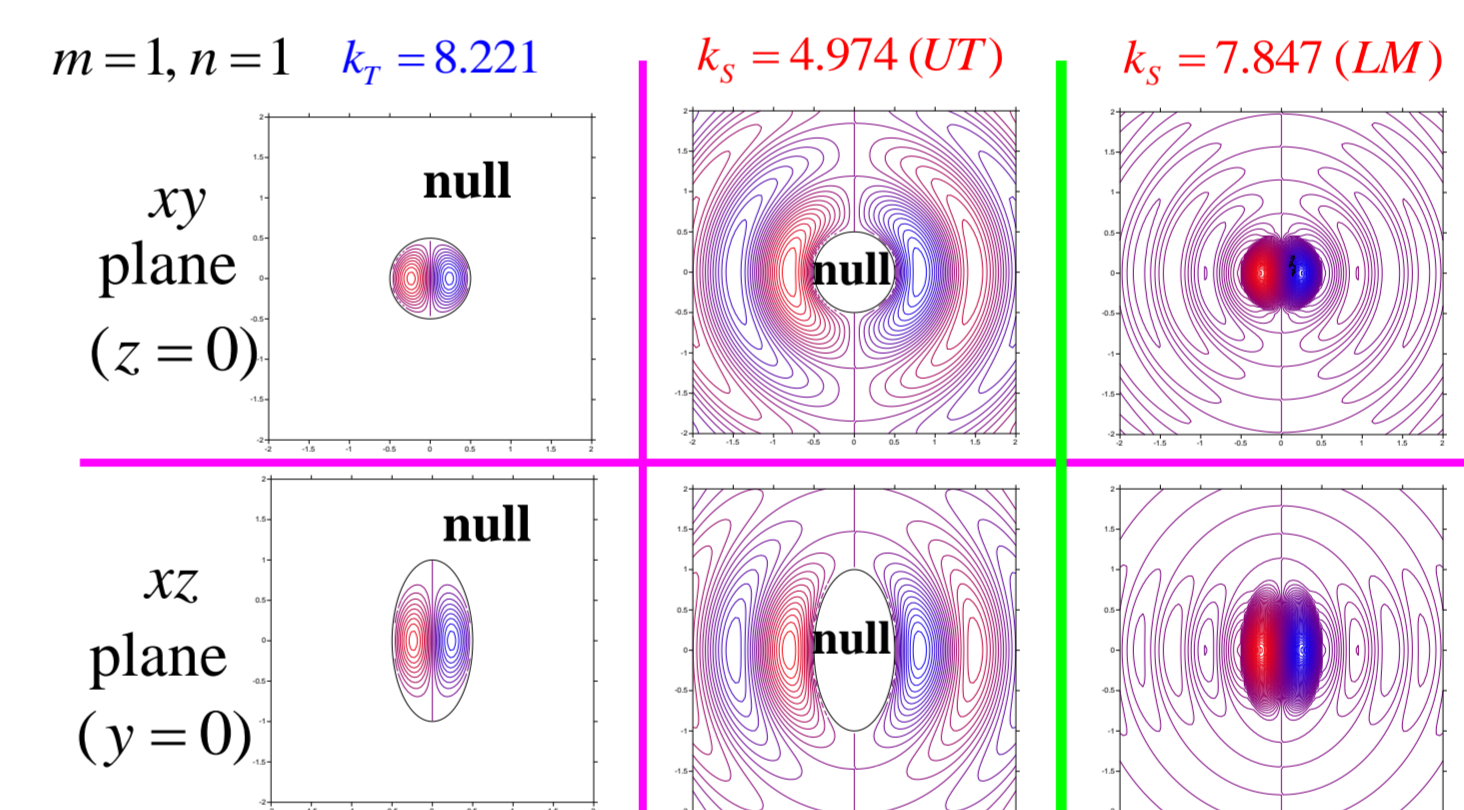
圖五 BEM及Null-BIEM之零場與非零場之模態圖 (Neumann邊界條件)



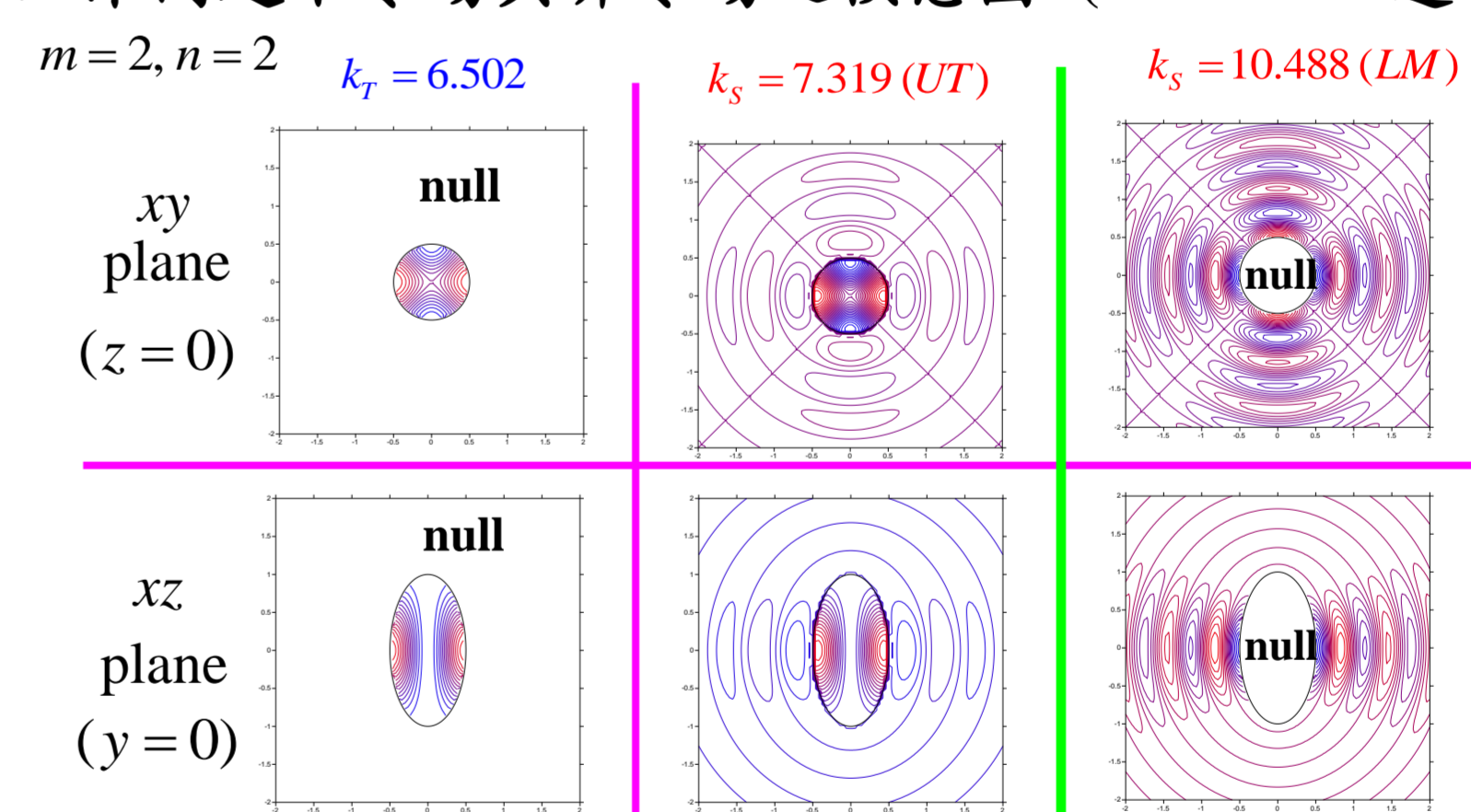
圖七 BEM及Null-BIEM之零場與非零場之模態圖 (Neumann邊界條件)



圖八 三維問題下零場與非零場之模態圖 (Dirichlet邊界條件)



圖九 三維問題下零場與非零場之模態圖 (Neumann邊界條件)



圖四至圖七表示在Dirichlet及Neumann邊界條件下利用零場邊界積分方程法與邊界元素法，畫出聲場的真假模態圖，藉由這四張圖，我們可以發現在真特徵值的情況下，不管聲場形狀為何，以及邊界條件為何，其領域為非零場，而補領域則為零場。但在假根所對應的模態，其情況是完全不一樣的，對於Dirichlet邊界條件，其領域為零場，補領域為非零場，而Neumann邊界條件則是都為非零場。

另外，而同樣結果也可以延伸至三維，如圖八及圖九，此兩圖引用J. W. Lee and J. T. Chen [3]，所做出的三維結果。

註： k_T 為真根， k_S 為假根。

結論

1. 使用零場邊界積分方程所做出的數值結果比傳統邊界元素法來的更準確。
2. 在真特徵值發生時，領域為非零場，補領域為零場。
3. 在假特徵值發生時，領域不一定為零場，補領域不一定為非零場。

參考文獻

- [1] J. T. Chen, J. W. Lee, I. L. Chen and P. S. Kuo, On the null and nonzero fields for true and spurious eigenvalues of annular and confocal elliptical membranes, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 37(2013), pp.42-59.
- [2] J. T. Chen, J. W. Lee and S. Y. Leu, Analytical investigation for spurious eigensolutions of multiply-connected membranes containing elliptical boundaries using the dual BIEM, *International Journal Solids and Structures*, 48(2011), pp. 729-744.
- [3] J. W. Lee and J. T. Chen, On the null and nonzero fields for true and spurious eigenvalues of a prolate spheroidal cavity, *ICOME2012/JASCOME2012, 12-14 December, Kyoto, Japan, 2012*.
- [4] 高怡綸，真假特徵值問題之奇異值分解法探討及Mathematica動畫模擬，*國立臺灣海洋大學大學生暑期學習實務體驗計畫*，2012。獲得海大暑期計畫工學院組第三名。