

权函数对梁自由振动问题计算精度的影响

焦玉玲^{1,2}, 刘寒冰², 秦绪喜², 秦卫军²

(1. 吉林大学 应用技术学院, 长春 130022; 2. 吉林大学 交通学院, 长春 130022)

摘要: 为了比较权函数对无网格法计算精度的影响, 选取样条型权函数和指数型权函数及其不同影响域半径, 运用移动最小二乘法分别构造插值函数。以此插值函数作为位移场函数, 建立了梁结构动力学无网格方程。采用罚函数方法满足本征边界条件, 计算了梁的固有频率和模态向量, 得到梁的自由振动问题的两种权函数及其不同影响域半径的无网格解, 并与解析解进行了比较分析。数值算例验证了该方法的可靠性。

关键词: 结构力学; 自由振动; 权函数; 结构动力学; 计算精度

中图分类号: O343.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 1671-5497(2008)03-0624-06

Weight function effects on computational precision of free vibration of beam

Jiao Yu-ling^{1,2}, Liu Han-bing², Qin Xu-xi², Qin Wei-jun²

(1. College of Applied Technique, Jilin University, Changchun 130022, China; 2. College of Transportation, Jilin University, Changchun 130022, China)

Abstract: In order to compare the influence of weight function on computational precision, the quartic spline function and exponential function were chosen as the weight function. Two interpolation functions were used as field functions and Meshless dynamic equations were built. The penalty method was utilized to enforce essential boundary conditions and frequency and modal vector were computed. Two Meshless results of free vibration of beam and their different radius were compared with analytical results. The numerical example of beam structure validated the method are reliable.

Key words: structural mechanics; free vibration; weight function; structure dynamics; computational precision

无网格法是一种新型数值计算方法^[1], 它只需要节点信息, 而网格可以部分或彻底消除。该方法已在模拟裂纹扩展、接触摩擦、板壳弯曲和材料非线性等静力问题的计算中得到了有效应用^[2-7], 目前在动力分析问题中的应用正成为力学界的研究热点。Nagashima 等^[8]对广义特征值问题进行了讨论; Liu 等^[9]运用再生核粒子法

(RKPM) 计算了梁板的自由振动问题; Ouattouati 等^[10]采用子结构模态组合法计算了梁和板的动态特性; Chen 等^[11,12]运用径向基无网格法计算了复合板壳的自由振动问题; 李卧东等^[13]应用优化参数对梁板的振动模态和响应进行了分析, 秦雅菲等^[14]计算了薄板的自由振动问题。

移动最小二乘无网格法的数据拟合是以权函

收稿日期: 2006-11-21.

基金项目: 国家留学回国人员基金项目.

作者简介: 焦玉玲(1968-), 女, 博士研究生. 研究方向: 结构动力分析数值方法. E-mail: jyling777@163.com

通讯联系人: 刘寒冰(1957-), 男, 教授, 博士生导师. 研究方向: 道桥结构动态优化设计理论及应用.

E-mail: liuhb57@sina.com

数和插值基函数为基础的逼近过程,权函数和插值基函数的性质(如连续性)决定了插值函数和节点形函数的连续性,故可以根据问题的性质构造充分光滑的权函数和插值基函数,得到问题所需的插值函数和节点形函数。为了比较权函数对插值函数及其无网格法计算精度的影响,本文分别用样条型权函数和指数型权函数及其在不同影响域半径对位移场函数进行插值。用插值函数离散梁自由振动方程,采用罚函数方法满足本征边界条件,得到了梁的固有振动无网格方程,求解梁的固有频率和模态向量,并将两种方法的计算结果与解析解进行了分析比较。

1 移动最小二乘法(MLS)

在移动最小二乘法中,求解域内任意一点位移 $u(x)$ 可以取试探函数

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^m p_i(x) a_i(x) = \mathbf{p}^T(x) \mathbf{a}(x) \quad (1)$$

式中: $\mathbf{p}(x) \in \mathbf{R}^m$; $\mathbf{a}(x) \in \mathbf{R}^m$; m 是建立在空间坐标 x 上的完备多项式基中单项式的个数,移动最小二乘法近似的局部特性就是“移动”^[15],它意味着 a 是依赖于 x 变化的函数,而传统最小二乘近似的 a 向量不是 x 函数。

式(1)是指全域的最小二乘近似。为了确定 $a(x)$,建立一离散加权误差范数并使误差最小。

$$J = \sum_{I=1}^n \omega(x-x_I) [u^h(x, x_I) - u(x_I)]^2 = \sum_{I=1}^n \omega(x-x_I) \left[\sum_{i=1}^m p_i(x_I) a_i(x) - u(x_I) \right]^2 \quad (2)$$

式中: $\omega(x-x_I) = \omega_I(x)$,是具有紧支集特性的权函数; $u^h(x, x_I)$ 为函数 $u(x)$ 的局部逼近函数; x_I, n 分别为点 x 的紧支域内的节点和插值基点数; $u(x_I)$ 为 I 点处的 $u(x)$ 真实解。

式(2)的矩阵形式为

$$\mathbf{J} = (\mathbf{p}\mathbf{a} - \mathbf{u})^T \mathbf{w}(x) (\mathbf{p}\mathbf{a} - \mathbf{u}) \quad (3)$$

$$\mathbf{u}^T = (u_1, u_2, \dots, u_n) \quad (4)$$

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1(x_1) & p_2(x_1) & \dots & p_m(x_1) \\ p_1(x_2) & p_2(x_2) & \dots & p_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(x_n) & p_2(x_n) & \dots & p_m(x_n) \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\mathbf{w}(x) =$$

$$\begin{bmatrix} \omega_1(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2(x) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_n(x) \end{bmatrix} \quad (6)$$

为使近似解在所取误差标准下最好地逼近真实解, \mathbf{J} 应取极值,有

$$\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial \mathbf{a}} = \mathbf{A}(x) \mathbf{a}(x) - \mathbf{B}(x) \mathbf{u} = 0 \quad (7)$$

即 $\mathbf{A}(x) \mathbf{a}(x) = \mathbf{B}(x) \mathbf{u} \quad (8a)$

$$\mathbf{d}(x) = \mathbf{A}^{-1}(x) \mathbf{B}(x) \mathbf{u} \quad (8b)$$

其中矩阵 $\mathbf{A}(x)$ 和 $\mathbf{B}(x)$ 分别为

$$\mathbf{A}(x) = \mathbf{p}^T \mathbf{w}(x) \mathbf{p} \quad (9a)$$

$$\mathbf{B}(x) = \mathbf{p}^T \mathbf{w}(x) \quad (9b)$$

将式(8b)代入式(1)可得逼近函数 $u^h(x)$ 表达式

$$u^h(x) = \Phi(x) \mathbf{u} = \sum_{I=1}^n \Phi_I(x) u_I \quad (10)$$

$$\Phi(x) = [\Phi_1(x), \Phi_2(x), \dots, \Phi_n(x)] = \mathbf{p}^T(x) \mathbf{A}^{-1}(x) \mathbf{B}(x) \quad (11)$$

$$\Phi_{I,x}(x) = \mathbf{p}_{I,x}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{p}^T \mathbf{A}_{,x}^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{p}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_{,x} \quad (12)$$

式中: $\Phi(x)$ 、 $\Phi_{I,x}(x)$ 分别为形函数和形函数导数; $\mathbf{B}_{,x}$ 、 \mathbf{A}^{-1} 、 $\mathbf{A}_{,x}^{-1}$ 分别为 \mathbf{B} 的一阶导数、 \mathbf{A} 的逆阵和 \mathbf{A} 一阶导数的逆阵。

$\mathbf{A}_{,x}^{-1}$ 公式^[15]推导如下。对式(8a)求导有

$$\mathbf{A}_{,x} \mathbf{a} + \mathbf{A} \mathbf{a}_{,x} = \mathbf{B}_{,x} \mathbf{u} \quad (13)$$

整理得 $\mathbf{a}_{,x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_{,x} \mathbf{u} - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}_{,x} \mathbf{a} \quad (14)$

将式(8b)代入式(14)有

$$\mathbf{a}_{,x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_{,x} \mathbf{u} - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}_{,x} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{u} \quad (15)$$

对式(8b)求导有

$$\mathbf{a}_{,x} = \mathbf{A}_{,x}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{u} + \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_{,x} \mathbf{u} \quad (16)$$

由式(15)、式(16)可得

$$\mathbf{A}_{,x}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{u} + \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_{,x} \mathbf{u} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_{,x} \mathbf{u} - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}_{,x} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{u} \quad (17)$$

整理得 $\mathbf{A}_{,x}^{-1} = -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}_{,x} \mathbf{A}^{-1} \quad (18)$

2 权函数

通过式(1)、式(2)可以看出,求解域内任意一点的位移值都是根据影响该点的节点的广义节点位移通过函数拟合得到的,在确定 $\mathbf{a}(x)$ 的过程中,对拟合结果有影响的因素主要就是基底函数 $\mathbf{p}(x)$ 和权函数 $\mathbf{w}(x)$ 及其影响该点的节点个数。影响该点的节点个数由影响域半径大小来圈定。

权函数应当满足以下条件:①在整个求解域内非负;②具有紧支特性,在计算中可以根据节点密度来确定节点影响域的大小;③单调性,函数值是随影响域半径的减小单调增加的,也就是向影响域中心靠近。

因此满足条件的权函数很多,通常用到的权函数有样条函数、指数函数等^[1]。本文分别选取了四次样条型函数(spline function, sw)和负指数函数(exponent function, ew)作为权函数计算式(12),选择线性基为基底函数构造无网格法插值函数。

四次样条型权函数为

$$\omega_i(s) = 1 - 6s^2 + 8s^3 - 3s^4 \quad (19a)$$

$$\omega_{i,x}(s) = -12s + 24s^2 - 12s^3 \quad (19b)$$

式中: $s = r_i/r$, r 为影响域半径,本文分别取 $r = 0.3, r = 0.5, r = 0.8$ 进行计算比较,对于一维问题 $r_i = |x - x_i|$, $\omega_i(s)$ 为插值节点 i 处的权函数, $\omega_{i,x}(s)$ 为插值节点处的权函数导数。

负指数型权函数为

$$\omega_i(d_i^k) = \begin{cases} \frac{e^{-(d_i/c)^k} - e^{-(d_m/c)^k}}{1 - e^{-(d_m/c)^k}}, & d_i \leq d_m \\ 0, & d_i > d_m \end{cases} \quad (20)$$

式中: $d_i = \|x - x_i\|$ 表示 x 与 x_i 之间的距离; d_m 是 x_i 的影响域半径,它的选取影响计算的精度和计算效率,取值太大使影响域内计算节点过多,不但影响计算效率,而且会使计算精度下降,取值太小使影响域内计算节点过少, $A^{-1}(x)$ 不存在,使最小二乘无解; c 是控制相对权重的参数; k 的选取具有随意性,但选取恰当可提高计算精度,根据文献^[13],本文取 $k = 2, c = 1.414$ 。

3 弹性体的动力学基本方程

3.1 控制方程的离散化

用于动力学问题分析的节点布置和插值函数构造与静力学相同,不同的是基于节点的基本力学变量都是时间的函数^[16]。

域 $\Omega \subset R$ 内以 Γ 为边界的平衡方程(考虑惯性力和阻尼力)为

$$\sigma_{ij,j}(t) + \bar{b}_i(t) - \rho \ddot{u}_i(t) - \nu \dot{u}_i(t) = 0 \quad (21a)$$

$$\sigma_{ij}(t) n_j = \bar{p}_i(t) \quad \text{on} \quad \Gamma_p \quad (21b)$$

$$u_i(t) = \bar{u}_i(t) \quad \text{on} \quad \Gamma_u \quad (21c)$$

物理方程为

$$\sigma_{ij}(t) = D_{ijkl} \epsilon_{kl}(t) \quad (22)$$

式中: $\Omega, \Gamma_p, \Gamma_u$ 分别为求解域、力边界和位移边界; $\Gamma = \Gamma_p \cup \Gamma_u$ 且 $\Gamma_p \cap \Gamma_u = \emptyset$; $\sigma_{ij,j}(t), \bar{b}_i(t)$ 分别为应力张量和所作用的体积力; $u_i(t), \dot{u}_i(t), \ddot{u}_i(t)$ 分别为位移、位移对时间 t 的一阶导数和二阶导数,即速度和加速度; $\bar{p}_i(t)$ 为力边界节点上的指定面力矢量; $u_i(t)$ 为位移边界节点上的指定位移矢量; $\sigma_{ij}(t), n_j$ 分别为应力、力边界上的外法线单位矢量; $\epsilon_{kl}(t)$ 为应变; ρ, ν 分别为密度、阻尼系数。

控制方程(21)及力边界的等效积分形式

$$\delta \Pi = \int_{\Omega} -(\sigma_{ij,j} - \rho \ddot{u}_i - \nu \dot{u}_i + \bar{b}_i) \delta u_i d\Omega + \int_{\Gamma_p} (\sigma_{ij} n_j - \bar{p}_i) \delta u_i d\Gamma = 0 \quad (23)$$

对式(23)左端第一项进行分部积分得动力学的虚功方程为

$$\int_{\Omega} E \epsilon_{ij} \delta \epsilon_{ij} + \rho \ddot{u}_i \delta u_i + \nu \dot{u}_i \delta u_i d\Omega - \left(\int_{\Omega} \bar{b}_i \delta u_i d\Omega + \int_{\Gamma_p} \bar{p}_i \delta u_i d\Gamma \right) = 0 \quad (24)$$

式中: $u_i \in H^1; \delta u_i \in H_0^1$ 。

取节点位移列阵为

$$\mathbf{q}_i(t) = [u_1(t) \ u_2(t) \ u_3(t) \ \cdots \ u_n(t)] \quad (25)$$

域内位移插值函数为

$$\mathbf{u}(\xi, t) = \mathbf{\Phi}(\xi) \mathbf{q}_i(t) \quad (26)$$

式中: $\mathbf{\Phi}(\xi)$ 为节点插值的形函数; ξ 为节点的几何位置坐标,与对应的静力问题的形函数矩阵完全相同。

$$\dot{\mathbf{u}}(\xi, t) = \mathbf{\Phi}(\xi) \dot{\mathbf{q}}_i(t) \quad (27a)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}(\xi, t) = \mathbf{\Phi}(\xi) \ddot{\mathbf{q}}_i(t) \quad (27b)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\xi, t) = \mathbf{E} \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{E} \mathbf{B}(\xi) \mathbf{q}_i(t) \quad (27c)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}(\xi, t) = \frac{d\mathbf{u}(\xi)}{d\xi} = \frac{d}{d\xi} \mathbf{\Phi}(\xi) \mathbf{q}_i(t) = \mathbf{B}(\xi) \mathbf{q}_i(t) \quad (27d)$$

将式(27a)~式(27d)代入虚功方程(24)有

$$[\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}_i(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}}_i(t) + \mathbf{K} \mathbf{q}_i(t) - \mathbf{P}_i(t)] \delta \mathbf{q}_i(t) = 0 \quad (28)$$

由于节点位移的变分增量 $\delta \mathbf{q}_i(t)$ 具有任意性,消去该项后并简化得到虚功方程的离散形式,即为系统动力学的无网格方程。

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{K} \mathbf{q}_i = \mathbf{P}_i \quad (29)$$

其中
$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{\Phi}^T \mathbf{\Phi} d\Omega \quad (30a)$$

$$\mathbf{C} = \int_{\Omega} \nu \mathbf{\Phi}^T \mathbf{\Phi} d\Omega \quad (30b)$$

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} d\Omega =$$

$$EI \int_0^l \begin{bmatrix} B_1^2 & B_1 B_2 & \cdots & B_1 B_n \\ B_2 B_1 & B_2^2 & \cdots & B_2 B_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_n B_1 & B_n B_2 & \cdots & B_n B_n \end{bmatrix} dx \quad (30c)$$

$$p_i = \int_{\Gamma_i} \Phi^T \bar{P} d\Omega + \int_{\Omega} \Phi^T \bar{b} d\Omega \quad (30d)$$

式中: M 、 C 、 K 、 B 、 E 、 I 分别为质量阵、阻尼阵、刚度阵、应变矩阵、弹性模量和惯性矩。

3.2 边界条件施加

采用罚函数方法满足本征边界条件,从理论上讲,罚参数应该为无限大才能真正满足位移边界条件。但是罚参数取得过大会使系统矩阵出现病态,而罚参数取得过小则不能正确模拟位移边界条件。一般情况下, αK_2 使得主元比 K_1 的主元大 $10^4 \sim 10^5$ 量级,可取得较好的效果^[13]。 α 为罚参数,本文取 $\alpha = 6.0 \times 10^7$ 。

那么,刚度矩阵(30c)变为

$$K = K_1 + \alpha K_2 = \int_{\Omega} B^T E B d\Omega + \alpha \int_{\Gamma_u} \Phi^T \Phi d\Gamma \quad (31)$$

3.3 无阻尼自由振动方程求解

在式(29)中, $v=0$, $P_i=0$,则该方程退化为无阻尼自由振动方程

$$M \ddot{q}_i + K q_i = 0 \quad (32)$$

方程解的形式为

$$q_i = \hat{q} \cdot e^{i\omega t} \quad (33)$$

将式(33)代入式(32)中,有

$$(-\omega^2 M \hat{q} + K \hat{q}) e^{i\omega t} = 0 \quad (34)$$

消去 $e^{i\omega t}$,令 $\lambda = \omega^2$ 有

$$(K - \lambda M) \hat{q} = 0 \quad (35)$$

该方程有非零解的条件为

$$\det(K - \lambda M) = 0 \quad (36)$$

式(36)为特征方程, λ 为特征值, ω 为自然圆频率。从式(36)求得自然圆频率 ω 后,将其代入式(35)中可求出对应的特征向量 \hat{q} ,即对应于振动固有频率 ω 的固有振型 \hat{q} 。

4 数值算例

4.1 简支梁振动分析

选择均匀简支梁,按照上面两种权函数构造的无网格法离散方程(29),求解方程(35)得到该梁固有频率和固有振型的两种解(sw,ew),把两种解分别与解析解进行比较分析。梁长 $L=2$ m,截面 $A=2$ cm²,弹性模量 $E=2 \times 10^7$ Pa,密度 $\rho=$

2500 kg/m³。为了计算离散方程(29)中的各项积分,将区域分成均匀 11 个节点插值,10 个背景网格,用两点高斯积分进行数值积分(见图 1),用罚函数法施加边界条件。

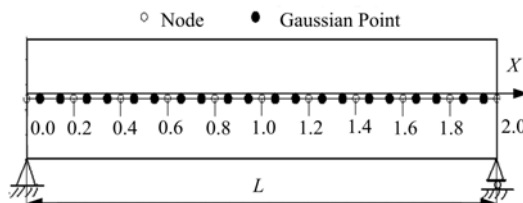


图 1 梁的计算节点和高斯点布置图

Fig. 1 Layout of node and gauss point on the beam

简支梁固有频率和固有振型解析解分别为^[17]

$$\omega_r = \frac{r^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, r=1,2,\dots \quad (37)$$

$$q_r(x) = C_i \sin \frac{r\pi}{l} x, r=1,2,\dots \quad (38)$$

固有频率两种权无网格解与解析解的比较结果如表 1、表 2 所示。图 2(a)、(b)、(c)、(d)是一阶至四阶模态样条型权无网格解(sw)与解析解(exact)的比较,图 3(a)、(b)、(c)、(d)是一阶至四阶模态指数型权无网格解(ew)与解析解(exact)的比较。

表 1 梁固有频率指数权 EFM 解(ew)与解析解相对误差比较

steps	exact	ew $r_{0.8}$	error/%	ew $r_{0.5}$	error/%	ew $r_{0.3}$	error/%
1	12.74	12.88	1.09	12.78	0.30	13.08	2.66
2	50.97	50.66	-0.59	50.95	-0.03	50.49	-0.93
3	114.67	114.86	0.16	114.56	-0.10	114.36	-0.27
4	203.87	204.43	0.28	203.73	-0.07	202.21	-0.81
5	318.54	320.67	0.67	319.67	0.36	315.67	-0.90

表 2 梁固有频率样条权 EFM 解(sw)与解析解相对误差比较

steps	exact	sw $r_{0.8}$	error/%	sw $r_{0.5}$	error/%	sw $r_{0.3}$	error/%
1	12.74	13.53	6.19	12.68	-0.48	13.08	2.66
2	50.97	52.66	3.33	51.05	0.16	50.17	-1.56
3	114.67	115.86	1.03	114.63	-0.04	113.36	-1.15
4	203.87	204.98	0.55	203.32	-0.27	202.01	-0.91
5	318.54	320.74	0.69	319.74	0.38	315.14	-1.07

4.2 固有振动问题误差分析

从表 1、表 2 可见,在总体上固有频率指数权无网格解精度高于样条型权无网格解,影响域半径取 $r=0.5$ 时精度最高,影响域半径 $r=0.3$ 和 $r=0.8$ 时计算精度下降,说明移动最小二乘法中

影响域大小对固有频率计算精度影响明显。

从图2、图3可见,影响域半径取 $r=0.5$ 时精度最高; $r=0.3$ 时影响域内节点少,计算低阶模态精度高于高阶模态,高阶模态出现振荡,精度下降; $r=0.8$ 时影响域内节点多,计算高阶模态精度高,低阶模态出现振荡,精度下降。因此,无网格法的计算精度受权函数类型影响不明显,但影响域大小对计算精度影响明显,当影响域半径过大或过小时,会使梁的振动分析计算无解或结果失真。

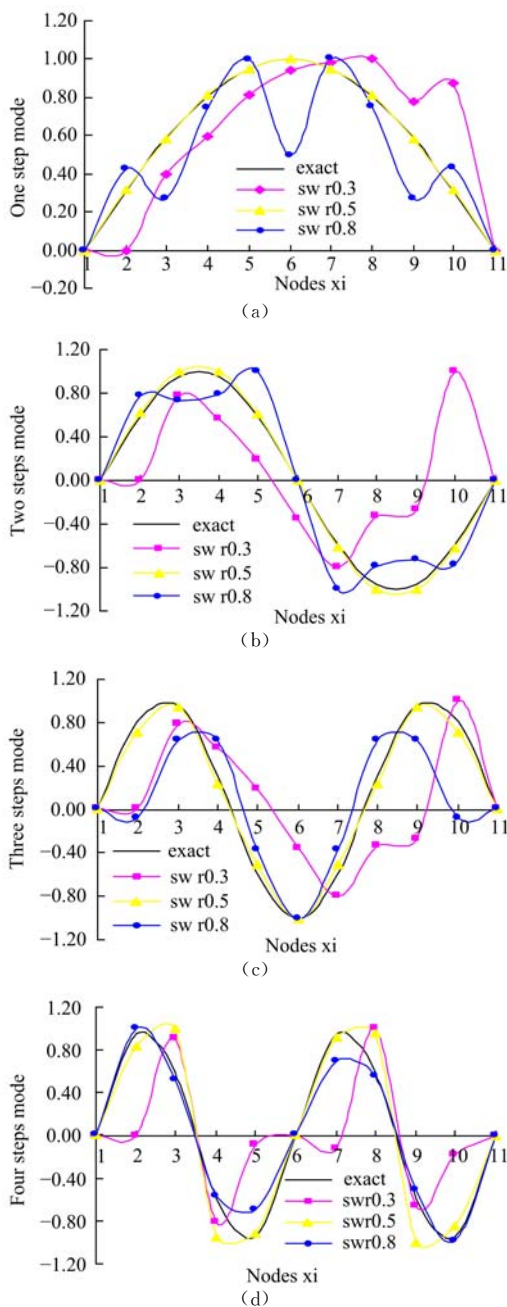


图2 样条型权无网格解与解析解的比较

Fig. 2 Comparison of sw with exact of the quartic spline function

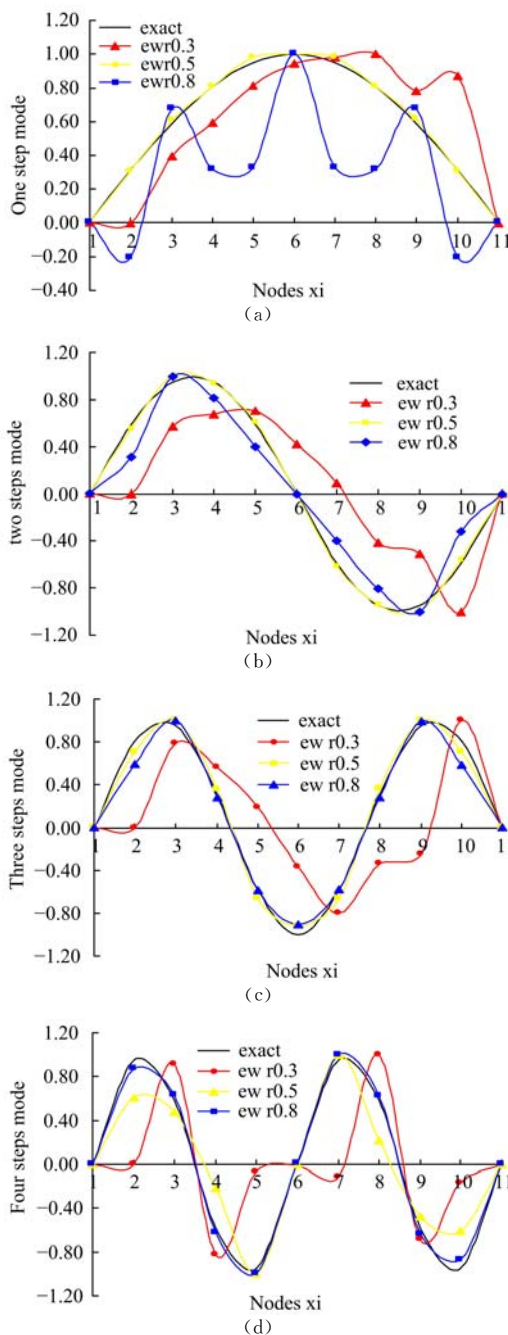


图3 指数型权无网格解与解析解的比较

Fig. 3 Comparison of ew with exact of the exponential function

5 结束语

本文选取样条型权函数、指数型权函数基于移动最小二乘理论分别计算插值函数,运用两种权函数下位移场函数对梁结构的自由振动方程进行了无网格法离散,得到了样条型权函数无网格解(sw)和指数型权函数无网格解(ew)。结果表明,固有频率的精度很高,指数权无网格解精度高于样条型权无网格解,模态向量的指数权无网格

解精度高于样条型权无网格解。但无网格法的计算精度受权函数类型影响不明显,影响域大小对计算精度影响显著。影响域半径取0.5时,固有频率和振型的计算精度影响。当影响域半径过大或过小时,会使梁的振动分析计算无解或结果失真。将两种权函数下无网格法应用在梁结构的自由振动分析中是有效、可行的。

参考文献:

- [1] 张雄,刘岩. 无网格法[M]. 北京:清华大学出版社, 2004:115-146.
- [2] Belytschko T, Gu L, Lu Y Y. Fracture and crack growth by element-free Galerkin methods[J]. Modeling and Simulation in Materials Science and Engineering, 1994, 2:519-534.
- [3] Xu Y, Saigal S. Element free Galerkin study of steady quasi-static crack growth in plane strain tension in elastic-plastic materials[J]. Comput Mech, 1998, 22: 255-265.
- [4] Cordes L W, Moran B. Treatment of material discontinuity in the element-free Galerkin method [J]. Comput Methods Appl Mech Engng, 1996, 139: 75-89.
- [5] Kim N H, Choi K K, Chen J S, et al. Meshless shape design sensitivity analysis and optimization for contact problem with friction [J]. Comput Mech, 2000, 25:157-168.
- [6] Krysl P, Belytschko T. Analysis of thin plates by the element-free Galerkin method [J]. Comput Mech, 1996, 17:26-35.
- [7] Krysl P, Belytschko T. Analysis of thin shells by the element-free Galerkin method [J]. Int J Sol and Struct, 1996, 33:3057-3080.
- [8] Nagashima Toshio. Node-by-node meshless approach and its applications to structural analyses[J]. Int J Num Meth Engng, 1999, 46:341-385.
- [9] Liu W K, Jun S, Zhang Y F. Reproducing kernel particle methods for structural dynamics[J]. Int J Num, Meth Engng, 1995, 38:1655-1679.
- [10] Ouatuati Johnson. A new approach for numerical modal analysis using the element-free method[J]. Int J Num Meth Engng, 1999, 46:1-27.
- [11] Chen J T, Chen I L, Chen K H, et al. A meshless method for free vibration analysis of circular and rectangular clamped plates using radial basis function[J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2004, 28:535-545.
- [12] Ferreira A J M, Roque C M C, Jorge R M N, et al. Static and free vibration analysis of composite shells by radial basis functions [J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2006, 30:719-733.
- [13] 李卧东,陈胜宏. 结构振动分析中的无网格方法[J]. 计算力学学报, 2003, 20(6):756-763.
Li Wo-dong, Chen Sheng-hong. Vibration analysis by an effective meshless method[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2003, 20(6):756-763.
- [14] 秦雅菲,张伟星. 无单元法分析薄板自由振动问题[J]. 力学与实践, 2003, 25(5):37-40.
Qin Ya-fei, Zhang Wei-xing. Element free method in vibration analysis of thin plates [J]. Mechanics In Engineering, 2003, 25(5):37-40.
- [15] Beissel S, Belytschko T. Nodal integration of the element-free Galerkin method [J]. Comput Methods Appl Mech Engng, 1996, 139:49-74.
- [16] 曾攀. 有限元分析及应用[M]. 北京:清华大学出版社, 2004.
- [17] 王彬. 振动分析及应用[M]. 北京:海潮出版社, 1992.