

规划 - 迭代型弹塑性摩擦接触多极边界元法

于春肖¹, 申光宪²

(¹燕山大学理学院, ²燕山大学机械工程学院, 河北 秦皇岛 066004)

摘要:提出基于多极展开法的规划 - 迭代型的高度非线性方程的 IGMRES(m)高效求解法, 并建立其收敛性理论。本法适用于三维弹塑性摩擦接触多极边界元法, 有效处理弹塑性摩擦接触迭代的繁杂和费时问题。通过数值试验证明, 本求解法在确保数值精度的前提下, 可减少迭代次数, 显著提高计算效率。

关键词: 弹塑性摩擦接触; 多极边界元法; IGMRES(m)算法; 收敛性

中图分类号: O241.6

文献标识码: A

1 引言

工程中的弹塑性摩擦接触问题^[1, 2]是材料弹塑性、有限形变、接触刚度及摩擦能耗等多重高度非线性耦合问题, 经离散化后归化成大型非对称线性方程组

$$Ax = f \quad (1)$$

其中, 矩阵 A 非奇异。求解(1)式比较有效的方法之一是 Krylov 子空间型方法^[3], 其中最成功的是广义极小残值法(简称 GMRES(m) 算法)。该方法基向量的构造, 基于 Arnoldi 完全正交化过程。对于设定的重启参数 m , 在 Krylov 子空间上的残量范数达到最小, 计算精度和效率高, 因而在工程中得到广泛应用^[4, 5]。然而, 考虑到 GMRES(m) 算法在构造 Hessenberg 矩阵元素和 Krylov 向量时都要用到较长的递推式而不便, 所以有必要借助于目前普遍流行的截断技术^[6], 建立截断型的 GMRES(m) 算法。其基本思想是, 在迭代时仅使用部分而非所有前面计算出的向量来构造新的递推式以计算后面的向量, 从而使计算量和存储量大大减少^[7]。这种截断型的迭代算法还具有便于采取某种措施加快收敛速度, 以快速获得最终结果^[8]。

本文针对弹塑性摩擦接触迭代求解的繁杂费时问题, 从数学上寻找求解过程迭代收敛缓慢的原因, 提出数学规划法^[9]与截断型迭代算法相结合的不完全广义极小残值法(简称 IGMRES(m) 算法), 用来求解弹塑性摩擦接触问题。在 IGMRES(m) 算法的具体实施中, 以优化的 GMRES(m) 算法^[9]为基础, 引入 FMM 方法^[10]以加速迭代收敛。基于 FMM 的规划 - 迭代型 IGMRES(m) 新算法, 充分利用了数学规划法与截断型迭代法各自的优势, 以解决计算力学领域的高度非线性问题。该法对处理弹塑性摩擦接

触的繁杂迭代和费时问题非常有效, 收敛过程平稳、收敛速度快且计算精度高。

2 弹塑性摩擦接触多极边界元法基本公式

对于不计体积力的弹性体 Ω^A , 位移速度 \dot{u}_j 和面力速度 \dot{t}_j 的边界积分方程为

$$c_{ij} \dot{u}_j^A = \int_{\Gamma^A} U_{ij}^* \dot{t}_j^A d\Gamma^A - \int_{\Gamma^A} T_{ij}^* \dot{u}_j^A d\Gamma^A \quad (2)$$

对于弹塑性变形体 Ω^B , 以塑性应力速率 $\dot{\sigma}_{jk}^p$ 为初应力形式的边界积分方程^[11]为

$$c_{ij} \dot{u}_j^B = \int_{\Gamma^B} U_{ij}^* \dot{t}_j^B d\Gamma^B - \int_{\Gamma^B} T_{ij}^* \dot{u}_j^B d\Gamma^B + \int_{\Omega^B} \varepsilon_{ijk}^* \dot{\sigma}_{jk}^p d\Omega^B \quad (3)$$

其中, U_{ij}^* , T_{ij}^* , ε_{ijk}^* 为基本解核函数, σ_{kij}^* , T_{kij}^* , ε_{ijkl}^* 为相关核函数, 上标 p 表示塑性。基本解核函数 U_{ij}^* , T_{ij}^* , ε_{ijk}^* 的 FM-BEM 形式分别为

$$U_{ij}^*(x, y) = P_{ij}(x) \left(\frac{1}{R} \right) + Q_i \left(\frac{1}{R} y_j \right) \quad (4)$$

$$T_{ij}^*(x, y) = R_{ijm}(x) \left[\frac{1}{R} n_m(y) \right] + S_{im}(x) \left[\frac{1}{R} n_m(y) y_j \right] \quad (5)$$

$$\varepsilon_{ijk}^* = P_{ijk}(x) \left(\frac{1}{R} \right) + Q_{ij}(x) \left(\frac{1}{R} y_k \right) \quad (6)$$

相关核函数 σ_{kij}^* , T_{kij}^* , ε_{ijkl}^* 的 FM-BEM 形式分别为

$$\sigma_{kij}^* = P_{kij}(x) \left(\frac{1}{R} \right) + Q_{ki}(x) \left(\frac{1}{R} y_j \right) \quad (7)$$

$$T_{kij}^* = O_{kij}(x) \left(\frac{1}{R^3} \right) + P_{kij}(x) \left(\frac{1}{R} \right) + Q_{kij}(x) \left[\frac{1}{R} (n_k y_k + n_i y_i + n_j y_j) \right] \quad (8)$$

$$\varepsilon_{ijkl}^* = O_{ijkl}(x) \left(\frac{1}{R^3} \right) + P_{ijkl}(x) \left(\frac{1}{R} \right) + Q_{ijk}(x) \left(\frac{1}{R} y_l \right) \quad (9)$$

式中, $i, j, m, k, l = 1, 2, 3$, $P_{ij}(x)$ 和 $Q_{ij}(x)$, $P_{kij}(x)$ 和 $Q_{ki}(x)$, $O_{kij}(x)$, $P_{kij}(x)$ 和 $Q_{kij}(x)$, $O_{ijkl}(x)$, $P_{ijkl}(x)$ 和 $Q_{ijk}(x)$ 分别为关于 $\frac{1}{R}$ 的偏导算子, 详见文献[12]。

方程(3)经离散归结为方程组(1), (1)式的右端项 f 是处理面力和位移 $f(t, u)$ 、接触间隙 $f(\Delta)$ 、

* 国家自然科学基金项目 (No.50075075)

摩擦耗能 $f(\mu)$ 以及弹塑性形变 $f(\sigma^p)$ 多重非线性耦合问题而形成的，可以表示为

$$f = f(t, u) + f(\Delta) + f(\mu) + f(\sigma^p) \quad (10)$$

对于非线性摩擦接触和弹塑性变形行为的模拟，采用点 - 面摩擦接触判别模式^[9]，以避免点对点接触模式在产生滑移时，点对错位带来的误差，同时也简化了网格划分。接触判断的收敛条件为无穿透发生。

3 基于 FMM 的规划 - 迭代型 IGMRES(m)算法

以文献[9]中点 - 面摩擦接触非线性分析的数学规划模型和 GMRES(m) 优化算法为基础，提出一种适合于弹塑性摩擦接触问题求解的规划 - 迭代型 IGMRES(m)算法，矩阵和向量的乘积采用 FMM 计算。此算法在加快求解过程的收敛速度和减少存储量的同时，所付出的代价是丧失了 GMRES(m)算法的某些重要性质，例如基向量 $\{v_i\}_1^m$ 的正交性、残量范数 $\|r^{(m)}\|$ 的极小性等，而这些性质又是分析算法收敛性时最主要的依据。所以，分析 IGMRES(m)算法的收敛性问题一般是比较困难的，往往需要通过理论分析与数值试验相结合才能得出准确结论。

3.1 基于 FMM 的 IGMRES(m)算法

此算法是对文献[9]GMRES(m)算法的改进。两种算法的区别在于 IGMRES(m)算法的基向量 $\{v_j\}$ ($j=1, 2, \dots, m$) 由不完全正交化生成，即 Av_j 仅对前面的至多 q 个向量 v_{j_0}, \dots, v_j , $j_0 = \max\{1, j - q - 1\}$ 进行正交，其中 $q < m$ 。因此，基向量一般不再正交，使 IGMRES(m)算法在 $K_m(r^{(0)}, A)$ 上只能给出一个近似的或拟极小残值解。令 $q_0 = j_0 = \max\{1, j - q - 1\}$ ，定义为 IGMRES(m)算法的截断指标，同时将 $\frac{m - q_0}{m}$ 定义为算法的截断比。算法的具体步骤如下：

(1) 初始化：选择步数 m ，设置参数 q , $2 \leq q \leq m$ 和精度 ε ；

取初值 $x^{(0)} = 0$ ，计算 $r^{(0)} = f - Ax^{(0)}$, $\beta = \|r^{(0)}\|$, $v_1 = r^{(0)} / \beta$, $V_1 = \{v_1\}$ 。

(2) 迭代：对 $j=1, 2, \dots, m$ 有

1) 不完全正交化

$$h_{ij} = (Av_j, v_i) \quad (i = j_0, \dots, j),$$

$$\hat{v}_{j+1} = Av_j - \sum_{i=j_0}^j h_{ij} v_i \quad (11)$$

其中，矩阵和向量的乘积采用 FMM 计算，可以减少存储量。

2) 标准化

$$h_{j+1,j} = \|\hat{v}_{j+1}\|, \quad v_{j+1} = \hat{v}_{j+1} / h_{j+1,j} \quad (12)$$

3) 更新 V_{j+1} 与 \bar{H}_j

$$V_{j+1} = (V_j, v_{j+1}),$$

$$\bar{H}_j = \begin{pmatrix} \bar{H}_{j-1} & h_{ij} \\ 0 & h_{j+1,j} \end{pmatrix}_{(j+1) \times j} \quad (13)$$

\bar{H}_j 为 $(j+1) \times j$ 的带状上 Hessenberg 矩阵，其非零元素 h_{ij} 由(12)式生成。当 $j=1$ 时第一列省略，并且有

$$AV_m = V_{m+1} \bar{H}_m \quad (14)$$

(3) 解最小二乘问题

$$\|r^{(m)}\| = \min_{y_m \in C^m} \|\beta e_1 - \bar{H}_m y_m\| \quad (15)$$

获得 y_m ^[12]。

(4) 构造近似解

$$x^{(m)} = x^{(0)} + V_m y_m \quad (16)$$

(5) 计算残余向量的模

$$\|r^{(m)}\| = \|f - Ax^{(m)}\| \quad (17)$$

(6) 重启动判断

若 $\|r^{(m)}\| \leq \varepsilon$ ，则 $x = x^{(m)}$ ，停止；否则，置 $x^{(0)} = x^{(m)}$ ，转(1)。 ε 是事先给定的收敛判据，可取 $\varepsilon = 1.0 \times 10^{-6}$ 。

3.2 IGMRES(m)算法的收敛性理论

为研究 IGMRES(m)截断方法的收敛性态，将 IGMRES(m)算法和 GMRES(m)算法联系起来，以建立 IGMRES(m)算法的收敛性理论。为讨论方便，记 IGMRES(m)算法残余向量的模为 $r^{(m)}(IG)$ ，GMRES(m)算法残余向量的模为 $r^{(m)}(G)$ ，并且定义 $V_{m+1} = (v_1, v_2, \dots, v_{m+1})$ 。

定理 1 假设 V_{m+1} 列满秩，则 IGMRES(m)算法和 GMRES(m)算法在 $K_m(r^{(0)}, A)$ 上的残值范数满足

$$\|r^{(m)}(IG)\| \leq S(V_{m+1}) \|r^{(m)}(G)\| \quad (18)$$

其中 V_{m+1} 由不完全正交化过程生成， $S(V_{m+1}) = \|V_{m+1}\| \|V_{m+1}^+\|$ ， V_{m+1}^+ 是 V_{m+1} 的广义逆。如果 IGMRES(m)算法在 m 步中断，即 $h_{m+1,m} = 0$ ，则 $x^{(m)}(IG) = x^*$ 。

证明：由 $r^{(0)} = \beta V_{m+1} e_1$ 和(14)式可知，对应于 $x^{(m)}(IG)$ 的残值为

$$\begin{aligned} r^{(m)}(IG) &= f - Ax^{(m)}(IG) \\ &= V_{m+1}(\beta e_1 - \bar{H}_m y_m(IG)) \end{aligned}$$

因此

$$\|r^{(m)}(IG)\| = \|V_{m+1}(\beta e_1 - \bar{H}_m y_m(IG))\| \quad (19)$$

由 $\beta V_{m+1} e_1 = r^{(0)}$, 有 $\beta e_1 = V_{m+1}^+ r^{(0)}$, 用 V_{m+1}^H 前乘 (14) 式可得

$$\bar{H}_m = V_{m+1}^+ A V_m$$

因此, (19) 式变成

$$\|r^{(m)}(IG)\| = \|V_{m+1}(V_{m+1}^+ r^{(0)} - V_{m+1}^+ A V_m y_m(IG))\|$$

(15) 式等价于求解最小二乘问题

$$\begin{aligned} \min_{y_m \in C^m} \|V_{m+1}^+ r^{(0)} - V_{m+1}^+ A V_m y_m\| \\ = \min_{z^{(m)} \in K_m(r^{(0)}, A)} \|V_{m+1}^+ r^{(0)} - V_{m+1}^+ A z^{(m)}\| \end{aligned} \quad (20)$$

因此可得

$$\begin{aligned} \|r^{(m)}(IG)\| \\ \leq \|V_{m+1}\| \|V_{m+1}^+ r^{(0)} - V_{m+1}^+ A V_m y_m(IG)\| \\ = \|V_{m+1}\| \min_{z^{(m)} \in K_m(r^{(0)}, A)} \|V_{m+1}^+ r^{(0)} - V_{m+1}^+ A z^{(m)}\| \\ \leq \|V_{m+1}\| \|V_{m+1}^+\| \min_{z^{(m)} \in K_m(r^{(0)}, A)} \|r^{(0)} - A z^{(m)}\| \\ = S(V_{m+1}) \min_{z^{(m)} \in K_m(r^{(0)}, A)} \|r^{(0)} - A z^{(m)}\| \\ = S(V_{m+1}) \|r^{(m)}(G)\| \end{aligned}$$

所以 (18) 式成立。

如果 $h_{m+1, m} = 0$, 则 (14) 式变为 $AV_m = V_m \bar{H}_m$, 其中 \bar{H}_m 是划去 \bar{H}_m 最后一行的 $m \times m$ 带状上 Hessenberg 矩阵, 这意味着 V_m 的列张成 A 的一个不变子空间。所以, \bar{H}_m 的特征值均为 A 的特征值, 从而 \bar{H}_m 非奇异。现在

$$\begin{aligned} \|r^{(m)}(IG)\| \\ = \|r^{(0)} - A V_m y_m(IG)\| \\ = \|r^{(0)} - V_m \bar{H}_m y_m(IG)\| \\ = \|V_m(\beta e_1 - \bar{H}_m y_m(IG))\| \end{aligned}$$

而当 $y_m(IG) = \beta \bar{H}_m^{-1} e_1$ 时, 有

$$\min_{y_m(IG) \in C^m} \|\beta e_1 - \bar{H}_m y_m(IG)\| = 0$$

因此 $\|r^{(m)}(IG)\| = 0$, 即 IGMRES(m) 算法找到准确解 $x^{(m)}(IG) = x^{(0)} + V_m y_m(IG) = x^*$ 。证毕。

须注解的是若 $q = m$, 则 IGMRES(m) 算法与 GMRES(m) 算法相同, V_{m+1} 理论上标准正交。因此,

$S(V_{m+1}) = 1$, (18) 式中等号成立。根据 (18) 式, IGMRES(m) 算法如何收敛和如何比拟 GMRES(m) 算法强烈, 依赖于 $S(V_{m+1})$ 。如果 $S(V_{m+1})$ 适中, 则 IGMRES(m) 算法肯定收敛, 大量数值试验都得到了证明。

4 数值试验

算例 1 考虑 A、B、C 三个立方体摩擦接触, 边长分别为 50mm, 40mm, 30mm。物体 A 为弹塑性体, 下表面固定约束, 物体 B、C 均为弹性体。计算模型及离散网格如图 1 所示, 离散数据见表 1。三个物体的弹性模量 $E = 210\text{GPa}$, 泊松比 $\nu = 0.3$, 物体 A 的屈服极限为 260MPa, 物体 C 的上表面受均布载荷 $P = 280\text{MPa}$, 摩擦系数 $\mu = 0.2$, 接触容限为 0.001mm, 总载荷分 6 步加载。

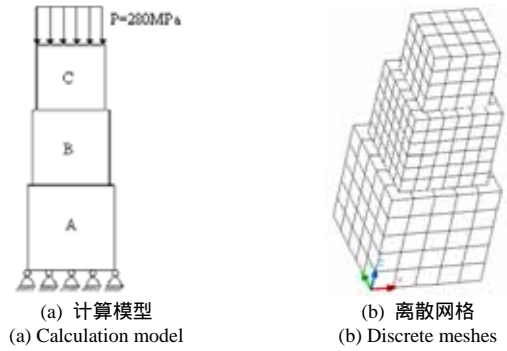


图 1 计算模型及离散网格

Fig. 1 Calculation model and discrete meshes

表 1 离散数据

Table 1 Discrete data

	A 物体	B 物体	C 物体	合计
节点数	152	218	98	468
单元数	150	216	96	462
接触节点数	36	49	25	110
接触单元数	25	36	16	77
体内节点数	64	0	0	64
体单元数	125	0	0	125
自由度数	648	801	369	1818

设定重启参数 $m = 100$, 则截断指标 q_0 可以从 1 取到 99, q_0 为整数, $q_0 = 100$ 时算法无意义。当截断指标 $q_0 = 1$ 时, IGMRES(m) 算法退化为 GMRES(m) 算法。当截断指标 q_0 在 1 到 99 中取值时, 弹塑性摩擦接触求解过程迭代的次数和计算时间发生显著的变化。最佳截断指标 $q_0 = 90$ 即截断比为 0.1 的计算结果示于图 2 和图 3, 与 $q_0 = 1$ 时的结果吻合。然而, 计算时间由 25 分 6 秒降为 8 分 59 秒, 效率大约提高了 64%, 迭代次数由 105 次降到 6 次, 次数大约减少了 94%。这充分说明采

用截断方法以加速收敛的有效性，也体现了数学规划法与迭代算法相结合的优势，进一步证明基于FMM的规划-迭代型IGMRES(m)算法处理弹塑性摩擦接触迭代繁杂和费时问题的高效性。

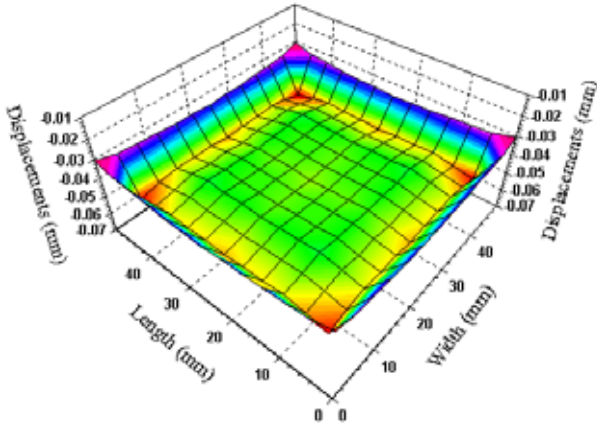


图 2 A 物体接触面位移分布

Fig. 2 Displacements distribution on the contact surface for body A

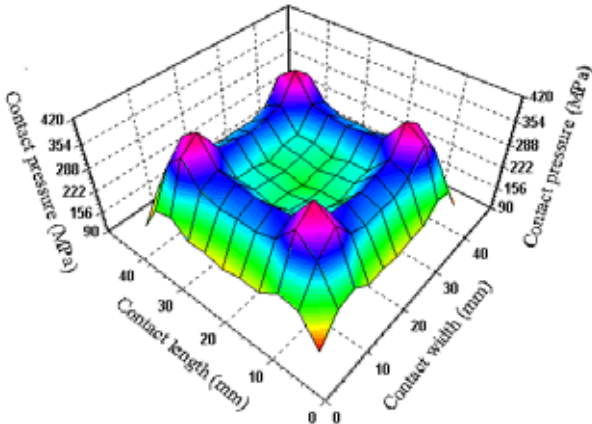


图 3 接触区压力分布

Fig. 3 Pressure distribution in the contact zone

对截断指标 q_0 取 16 个不同值分别计算，算法的收敛性及计算结果示于图 4、图 5、图 6 和图 7。由图 4 可以看出，随着截断比逐渐减小(即截断指标 q_0 增加)，迭代次数迅速减少。而随着截断比逐渐减小，如图 5 所示，计算时间的变化却是先迅速减少，然后在截断比为 0.1 附近达到最短，之后又略有增加。分析图 5 得知，选择截断比约在 0.1 附近，可以使计算效率大约提高 64%。图 4 和图 5 还说明基于 FMM 的规划-迭代型 IGMRES(m) 算法在处理弹塑性摩擦接触繁杂迭代和费时问题场合非常有效。

考虑截断指标 q_0 对计算精度的影响，取图 2 及图 3 中的相对坐标面平行截面接触区节点的位移和压力分别示于图 6 和图 7。图中的圆点对应 $q_0 = 1$ 即 GMRES(m) 算法，方点对应 $q_0 = 90$ 即 IGMRES(m) 算法。两种结果比较吻合，同一节点结果的相对误差不超过 0.03%，但是计算效率大约提高了 64%。

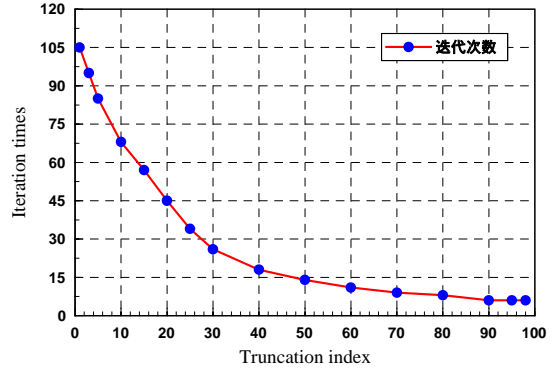


图 4 截断指标对迭代次数的影响

Fig. 4 Influence of truncation index on the iteration times

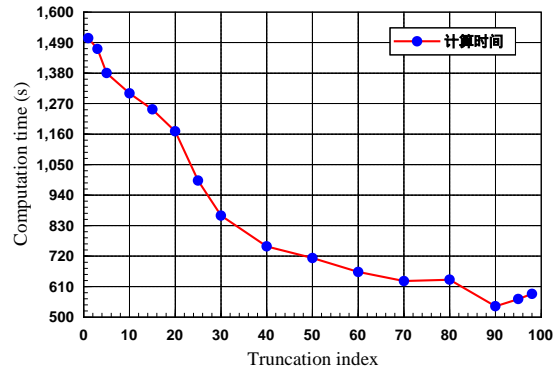


图 5 截断指标对计算时间的影响

Fig. 5 Influence of truncation index on the computation time

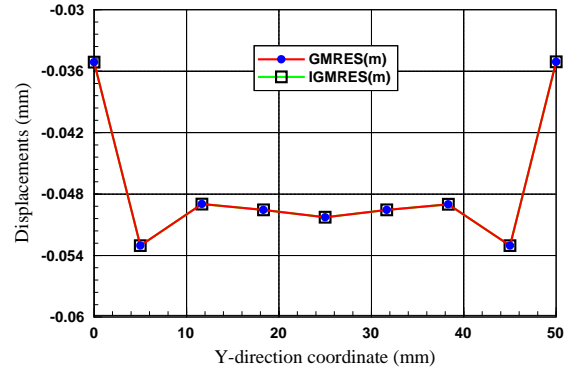


图 6 A 物体接触面位移比较(x=11.67mm, z=50mm)

Fig.6 Comparison of displacements on the contact surface for body A

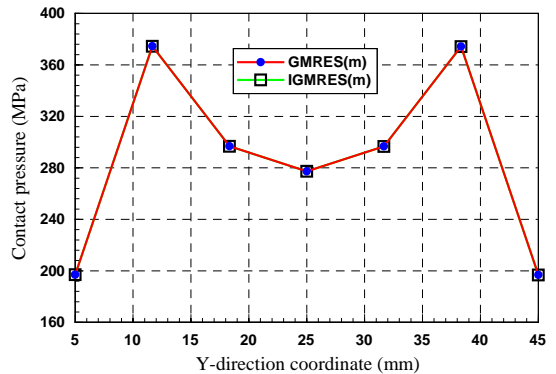
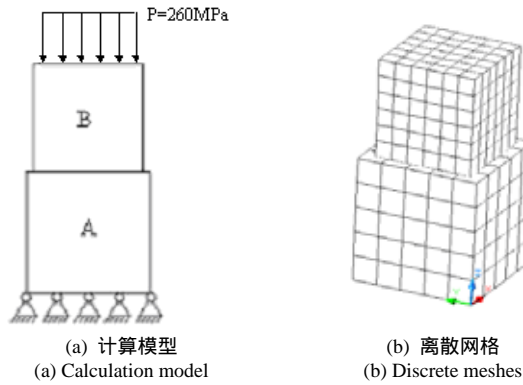


图 7 接触压力比较(x=11.67mm, z=50mm)

Fig.7 Comparison of contact pressure

综合考虑计算精度和计算效率，选择截断比约在 0.1 附近，可以在保证计算精度的前提下显著提高计算效率。

算例 2 考虑 A、B 两个立方体摩擦接触，边长分别为 50mm，40mm。物体 A 为弹塑性体，下表面固定约束，物体 B 为弹性体。计算模型及离散网格如图 8 所示，离散数据见表 2。两个物体的弹性模量 $E = 210\text{GPa}$ ，泊松比 $\nu = 0.3$ ，物体 A 的屈服极限为 260MPa ，物体 B 的上表面受均布载荷 $P = 260\text{MPa}$ ，摩擦系数 $\mu = 0.2$ ，接触容限为 0.001mm ，总载荷分 6 步加载。



(a) 计算模型
(a) Calculation model

(b) 离散网格
(b) Discrete meshes

图 8 计算模型及离散网格
Fig. 8 Calculation model and discrete meshes

表 2 离散数据
Table 2 Discrete data

	A 物体	B 物体	合计
节点数	152	218	370
单元数	150	216	366
接触节点数	36	49	85
接触单元数	25	36	61
体内节点数	64	0	64
体单元数	125	0	125
自由度数	648	801	1449

设定重启参数 $m = 100$ ，经计算证明，IGMRES(m)算法与 GMRES(m) 算法计算结果吻合，与算例 1 计算结果基本一致。这里只给出截断指标取 $q_0 = 90$ 时的计算结果，如图 9 和图 10 所示，分别表示弹塑性体 A 与弹性体 B 接触表面节点的位

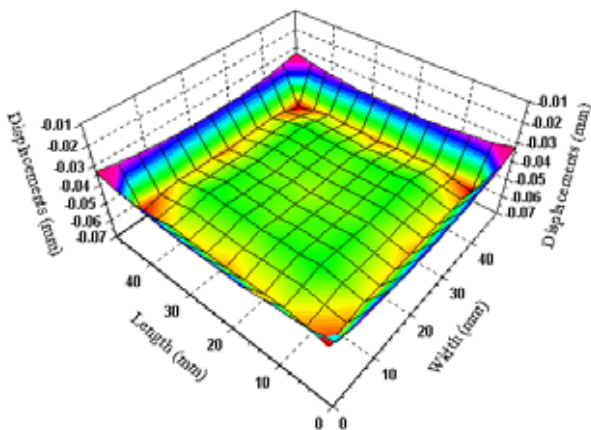


图 9 A 物体接触面位移分布

Fig. 9 Displacements distribution on the contact surface for body A

移和接触区压力。此时，迭代次数由 88 次降到 5 次，计算时间由 14 分 44 秒降到 6 分 19 秒。算例 2 更进一步证明基于 FMM 的规划 - 迭代型 IGMRES(m)算法处理弹塑性摩擦接触问题的高效性。另外，其它的大量数值试验也证明，选择合适的截断比可以大大提高计算效率，这里不再一一讨论。最佳截断比的选取，需要根据具体问题而定，一般在 $0.1 \sim 0.7$ 之间。

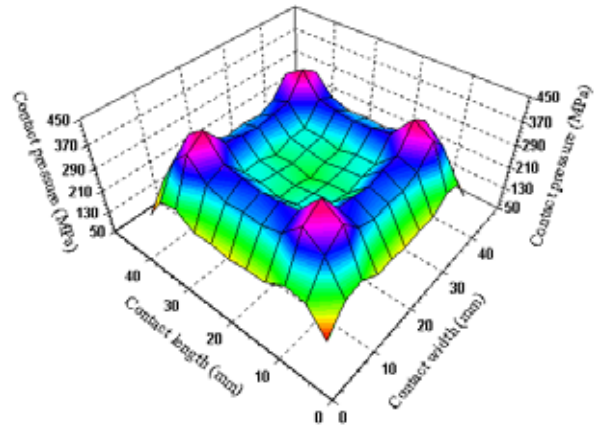


图 10 接触区压力分布

Fig. 10 Pressure distribution in the contact zone

5 结论

(1) 继承 GMRES(m)算法，建立起基于 FMM 的规划 - 迭代型 IGMRES(m)新算法的收敛性理论，给出收敛性定理并作出数学证明。

(2) 采用截断技术和 FMM 的规划 - 迭代型 IGMRES(m)新算法，在迭代时仅使用前面计算出的部分向量构造新的递推式以计算后面的向量，矩阵和向量的乘积采用 FMM 计算，使得计算量和存储量大为减少。

(3) 通过三物体和两物体弹塑性摩擦接触问题的数值试验，进一步分析算法的收敛性特征。提出截断指标、截断比等概念并给出相应的定义式。通过分析截断指标对计算效率和计算精度的影响，获得了截断比的选取规律。

(4) 给出最佳截断比的计算结果，与不采用截断方法的结果相当吻合，然而计算效率却可以提高 64%，迭代次数可减少 94%。

(5) 通过截断指标比较及收敛性分析，证明了利用基于 FMM 的规划 - 迭代型 IGMRES(m)算法处理弹塑性摩擦接触迭代繁杂和费时问题的高效性。

参考文献(References):

- [1] 刘应华, 张晓峰, 岑章志. 三维弹塑性结构下限分析的边界元方法[J]. 应用数学和力学, 2003, 24(12): 1301-1308. (LIU Ying-hua, ZHANG Xiao-feng and CEN Zhang-zhi. Lower Bound Limit Analysis of Three-Dimensional Elastoplastic Structures by Boundary Element Method [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2003, 24(12): 1301-1308. (in Chinese))
- [2] 申光宪, 化春键, 刘德义. 三维弹塑性接触边界元网络并行解法[J]. 计算力学学报, 2003, 20(5): 530-534. (Shen Guangxian, Hua Chunjian and Liu Deyi. Parallel solution

- of 3D elasto-plastic contact BEM based on network [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2003, **20**(5): 530-534. (in Chinese))
- [3] Saad Y. Krylov subspace methods for solving large unsymmetric linear systems [J]. *Math Comput*, 1981, **37**: 105-126
- [4] ZHAO Libin, YAO Zhenhan. Fast Multipole BEM for 3-D Elastostatic Problems with Applications for Thin Structures [J]. *Tsinghua Science & Technology*, 2005, **10**(1): 67-75
- [5] J.T. Chen, K.H. Chen. Applications of the Dual Integral Formulation in Conjunction with Fast Multipole Method in Large-scale Problems for 2D Exterior Acoustics [J]. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2004, **28**: 685-709
- [6] Jia Z. On IOM(q), the incomplete orthogonalization method for large unsymmetric linear systems[J]. *Numer Lin Alg with Appl*, 1996, **3**: 491-512
- [7] Chunxiao Yu, Guangxian Shen. Performance Research on FMM Based GMRES (m) Algorithm[A]. In: Z. H. Yao, M. W. Yuan & W. X. Zhong Eds. COMPUTATIONAL MECHANICS[C]. Beijing: Tsinghua University Press & Springer-Verlag, 2004: 49
- [8] 张洪武, 钟万勰, 顾元宪. 三维弹塑性有摩擦接触问题求解的一个新算法[J]. *应用数学和力学*, 2001, **22**(7): 673-681. (ZHANG Hong-wu, ZHONG Wan-xie, GU Yuan-xian. A New Method for Solution of 3D Elastic-Plastic Frictional Contact Problems [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2001, **22**(7): 673-681. (in Chinese))
- [9] YU Chunxiao, SHEN Guangxian, LIU Deyi. Mathematical Programming Solution for the Frictional Contact Multipole BEM [J]. *Tsinghua Science & Technology*, 2005, **10**(1): 51-56
- [10] L. Greengard, V. Rokhlin. A Fast Algorithm for Particle Simulations [J]. *J. Comput. Phys*, 1987, **73**: 325-348
- [11] Liu Deyi, Shen Guangxian, Yu Chunxiao. The Fast Multipole-BEM Elasto-Plastic Frictional Contact Problems[A]. In: T. Honma, Masa. Tanaka, H. Igarashi, T. Matsumoto Eds. *Computational Engineering I* [C], Sapporo: JASCOME Press, 2004: 61-68
- [12] 申光宪, 刘德义, 于春肖著. 多极边界元法和轧制工程 [M]. 北京: 科学出版社, 2005: 183-193; 76-78. (Shen Guangxian. *Fast Multipole Boundary Element Method and Engineering of Rolling Mill* [M], Beijing: Science Press, 2005: 183-193; 76-78. (in Chinese))

Program-iteration pattern Fast Multipole BEM for elasto-plastic contact with friction

Yu Chunxiao¹, Shen Guangxian²

(¹College of Science, Yanshan University, Hebei Qinhuangdao 066004, China)

(²College of Mechanical Engineering, Yanshan University, Hebei Qinhuangdao 066004, China)

Abstract A new program-iteration pattern method was proposed for the solution of highly nonlinear equations. It was named the Incomplete Generalized Minimal Residual Method(IGMRES(m)), which was based on the Fast Multipole Method(FMM). By using the truncation technology, the presented method constructed new recursion formulae only using some of the calculated vectors to compute the following vectors, which could greatly reduce the computation

and memory requirement. The FMM was used to compute the product of a matrix and some vectors. In combination with the Generalized Minimal Residual Method(GMRES(m)), the convergence theory of the IGMRES(m) was established. The presented method was well suitable for 3-D elasto-plastic frictional contact Fast Multipole Boundary Element Method(FM-BEM), which was much efficient for the elasto-plastic complicated iteration and time-consuming problems. Numerical examples were given to prove that the new method could greatly reduce the iteration times and improve the computational efficiency with ensured numerical accuracy.

Keywords Elasto-plastic contact with friction, FM-BEM, IGMRES(m) algorithm, Convergence

作者简介:

于春肖, 女, 1977年3月生, 讲师, 博士。

申光宪, 男, 1935年3月生, 教授, 博士生导师, 本科。

于春肖:

Email: chxy@ysu.edu.cn; chunxiao_yu@163.com

电话: 13933568218; 0335-8566878

申光宪:

Email: sgx35@ysu.edu.cn

电话: 13613354858; 0335-8052802

(注: 此稿不曾在其它刊物发表)