

文章编号:1000-0887(2005)12-1417-08

## 含孔薄板弯曲波动的双互易边界元法\*

高锁文<sup>1</sup>, 汪越胜<sup>1</sup>, 章梓茂<sup>1</sup>, 马兴瑞<sup>2</sup>

(1. 北京交通大学 工程力学研究所, 北京 100044;

2. 中国航天科技集团公司, 北京 100037)

(本刊编委马兴瑞来稿)

**摘要:** 采用双互易边界元法对开孔无限大薄板弹性波的散射与动应力集中问题进行理论分析和数值计算。基于功的互等定理,采用静力基本解建立了薄板弯曲波动问题的双互易边界积分方程。作为数值算例,计算了圆孔附近的动应力集中系数,通过与已有结果进行比较,表明该方法简单有效并能够保证计算精度。

**关键词:** 薄板; 双互易边界元法; 弯曲波的散射; 动应力集中

**中图分类号:** O347.4 **文献标识码:** A

## 引言

薄板是工程中广泛应用的结构构件,为了满足各种不同的需要,不可避免地要在板上开各种各样的孔洞,由此导致了结构的几何不连续性。承受荷载作用时,在开孔附近将产生应力集中现象,因此会极大地降低结构的承载能力,减少使用寿命。所以,在近代力学研究中,许多学者从事这方面的理论分析、数值计算及实验研究<sup>[1-3]</sup>。

20世纪60年代, Pao<sup>[2]</sup>首次研究了薄板开圆孔弯曲波的散射和动应力集中问题,给出了分析解和数值算例。1982年刘殿魁等人<sup>[3]</sup>提出了求解二维弹性波散射的复变函数法,此法是弹性静力学复变函数法的推广。随着弹性波理论的广泛应用,人们相继发展了波函数展开法、积分变换法、积分方程法、复变函数法等。

由于弯曲波的散射在薄板开孔附近引起的动应力集中问题的复杂性,很难得到满意的解析解,因此各种数值解法得到了广泛的应用。边界元法作为重要的数值方法,近20年来得到了迅速发展。在求解动力问题或非齐次方程时,为了克服寻找基本解的困难并避免域积分,发展了许多方法,其中双互易边界元法(DRM)<sup>[4]</sup>被普遍认为是成功的方法。DRM的优点是采用相应问题的简单的静力基本解来建立边界积分方程,从而产生了由惯性项引起的域内积分。为了将域积分转化到边界上的积分,再次应用了互易定理。在完成此转化过程中利用了一个被称为圆锥函数的表达式。Nardini和Brebbia<sup>[5]</sup>首先介绍了应用DRM求解固体动力学问题,而现在被推广到更广泛的应用领域。

\* 收稿日期: 2004-06-25; 修订日期: 2005-09-01

基金项目: 国家杰出青年科学基金资助项目(10025211); 中国博士后科学基金资助项目(2003033046)

作者简介: 高锁文(1963—),男,河北人,副教授,博士(联系人。Tel: +86-10-68381024; E-mail: bjgsw@sina.com)。

Kogl 等人<sup>[6]</sup>采用 DRM 求解了三维各向异性体的自由振动问题。通过数值算例研究了内部配置点的影响和复特征频率的产生。Rodriguez 等人<sup>[7]</sup>在边界元法中,介绍了基于误差限的自适应网格细划方法,在文献[8]中,他们将该方法推广到 DRM 并用于求解二维 Poisson 问题。Chien 等人<sup>[9]</sup>应用 DRM 讨论了二维弹性动力问题,在他们的研究中,采用时间不连续 Galerkin 有限元法求解由 DRM 建立的时域二次常微分方程。Itagaki<sup>[10]</sup>提出了一个新的 DRM 被用来求解修正的 Helmholtz 型方程,方程中的源项由多项式描述;用这种方法迭代地求解了非均匀介质中的 Helmholtz 型特征值问题。Chen 等人<sup>[11]</sup>应用双多重互易法解析地推导了圆形孔腔的真伪特征解问题并由计算程序进行了数值验证。Singh 等人<sup>[12]</sup>讨论了 DRM 在热传导反问题中的应用。Albuquerque 等人<sup>[13,14]</sup>讨论了 DRM 在各向异性材料的瞬态问题中的应用,对断裂动力学问题进行了求解。Chen 等人<sup>[15]</sup>研究了边界节点法用来求解二维或三维均匀 Helmholtz、修正 Helmholtz 和对流扩散问题时的收敛特性。边界节点法是一种新的边界型方法,其无网格径向函数基于配置技术。

文献[16]采用边界元法对开孔无限大薄板弹性波的散射和动应力集中问题进行了分析研究,给出了该问题的数值结果。由于在文献[16]中,采用的是动力基本解,使公式推导和影响系数的计算非常繁琐,降低了计算效率。本文利用 DRM 对该问题进行分析计算,使问题得到了很大地简化并能够保证计算精度。

## 1 薄板弯曲波动方程及双互易边界积分方程

薄板弯曲波动问题可归结为在给定载荷和边界条件下求解中面挠度,控制方程为

$$D \nabla^4 W + \rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = q, \quad (1)$$

式中,  $\nabla^4$  为双调和算子,  $\rho$  为质量密度,  $D$  为挠曲刚度,  $h$  为板厚度,  $q$  为横向载荷,  $W$  为板的挠度。

取  $q = 0$ , 设在时间上该问题是频率为  $\omega$  的简谐运动, 即求该问题的稳态解, 则由稳态弯曲波所决定的位移分量可表示为

$$u_x = -z \frac{\partial W}{\partial x}, \quad u_y = -z \frac{\partial W}{\partial y}, \quad u_z = W = w(x, y) e^{-i\omega t}, \quad (2)$$

其中  $\omega$  为弯曲波的圆频率。同时  $w(x, y)$  应满足如下方程

$$\nabla^4 w - \lambda^4 w = 0, \quad (3)$$

式中  $\lambda^4 = \rho h \omega^2 / D$ ,  $\lambda$  为波数。

将方程(3)改写为

$$\nabla^4 w = \lambda^4 w; \quad (4)$$

方程(4)的基本解  $w^*$  取为下列方程的解

$$\nabla^4 w^* = \delta(r - r_1); \quad (5)$$

方程(5)的解为

$$w^*(Q, P) = \frac{r^2}{8\pi} \ln r, \quad (6)$$

$r = |PQ| = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}$  为奇异源点  $P$  到场点  $Q$  的距离;  $P$  为内源点,  $p$  为边界上源点,  $Q$  为内场点,  $q$  为边界上场点。

为了避免域积分, 将方程(4)右边的挠度  $w$  用近似函数表示为:

$$\bar{w} = \sum_{j=1}^M \alpha_j f_j, \quad (7)$$

式中  $f_j$  可以是两点之间距离的近似函数,  $\alpha_j (j = 1, 2, \dots, M)$  是一系列的未知系数,  $M$  取为  $N$  个边界节点与  $L$  个内部节点数之和. 如果我们选择近似函数  $f_j$  满足下列关系:

$$\nabla^4 \hat{w}_j = f_j, \quad (8)$$

则式(7)可表达为:

$$\bar{w} = \sum_{j=1}^M \alpha_j (\nabla^4 \hat{w}_j). \quad (9)$$

用方程(9)代替方程(4)右边的挠度  $w$ , 得:

$$\nabla^4 w = \lambda^4 \sum_{j=1}^M \alpha_j (\nabla^4 \hat{w}_j). \quad (10)$$

将方程(10)的两边同乘以基本解  $w^*$  后, 在整个域内积分得:

$$\int_{\Omega} w^* \nabla^4 w d\Omega = \sum_{j=1}^M \lambda^4 \alpha_j \int_{\Omega} w^* \nabla^4 \hat{w}_j d\Omega. \quad (11)$$

对式(11)的两边应用互易定理, 并注意方程(5)及  $\delta$  函数的选择性质, 得:

$$\begin{aligned} C(P)w(P) + \int_{\Gamma} V_n^* w d\Gamma - \int_{\Gamma} M_n^* \frac{\partial w}{\partial n_q} d\Gamma + \int_{\Gamma} \frac{\partial w^*}{\partial n_q} M_n d\Gamma - \int_{\Gamma} w^* V_n d\Gamma = \\ \sum_{j=1}^M \lambda^4 \alpha_j \left[ C(P)\hat{w}_j(P) + \int_{\Gamma} V_n^* \hat{w}_j d\Gamma - \int_{\Gamma} M_n^* \frac{\partial \hat{w}_j}{\partial n_q} d\Gamma + \right. \\ \left. \int_{\Gamma} \frac{\partial w^*}{\partial n_q} \hat{M}_{nj} d\Gamma - \int_{\Gamma} w^* \hat{V}_{nj} d\Gamma \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

方程(12)即为求解薄板域内任意点  $P$  的挠度的边界积分方程. 其中  $C(P)$  是与  $P$  点位置有关的常数,  $P$  点在域内时,  $C(P) = 1$ ;  $P$  点在光滑边界上时,  $C(P) = 1/2$ ; 而对于不光滑的边界点  $C(P) = \theta/2\pi$ ,  $\theta$  为该点两侧切线间的夹角.  $V_n^* = V_n[w^*(p, q)]$ ,  $M_n^* = M_n[w^*(p, q)]$ ,  $M_n = M_n[w(q)]$ ,  $V_n = V_n[w(q)]$ ,  $\hat{M}_{nj} = M_n[\hat{w}_j(q)]$ ,  $\hat{V}_{nj} = V_n[\hat{w}_j(q)]$ ;  $M_n$  和  $V_n$  是边界条件算子, 其具体表达式见文献[16]. 式中不存在域积分项, 只有边界积分, 从而避免了域内的离散, 既保持边界元法仅在边界上离散的优越性, 又提高了解题效率. 而且, 通过数值计算表明, 数值结果具有很好的精度.

对于光滑边界上的任意一点  $p$ , 方程(12)成为

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} w(p) + \int_{\Gamma} V_n^* w d\Gamma - \int_{\Gamma} M_n^* \frac{\partial w}{\partial n_q} d\Gamma + \int_{\Gamma} \frac{\partial w^*}{\partial n_q} M_n d\Gamma - \int_{\Gamma} w^* V_n d\Gamma = \\ \sum_{j=1}^M \lambda^4 \alpha_j \left[ \frac{1}{2} \hat{w}_j(p) + \int_{\Gamma} V_n^* \hat{w}_j d\Gamma - \int_{\Gamma} M_n^* \frac{\partial \hat{w}_j}{\partial n_q} d\Gamma + \int_{\Gamma} \frac{\partial w^*}{\partial n_q} \hat{M}_{nj} d\Gamma - \int_{\Gamma} w^* \hat{V}_{nj} d\Gamma \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

对式(13)在  $p$  点沿外法线方向  $n_p$  求导, 可得到与方程(13)线性无关的另一边界积分方程:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial w(p)}{\partial n_p} + \int_{\Gamma} \frac{\partial V_n^*}{\partial n_p} w d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial M_n^*}{\partial n_p} \frac{\partial w}{\partial n_q} d\Gamma + \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 w^*}{\partial n_q \partial n_p} M_n d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial w^*}{\partial n_p} V_n d\Gamma = \\ \sum_{j=1}^M \lambda^4 \alpha_j \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{w}_j(p)}{\partial n_p} + \int_{\Gamma} \frac{\partial V_n^*}{\partial n_p} \hat{w}_j d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial M_n^*}{\partial n_p} \frac{\partial \hat{w}_j}{\partial n_q} d\Gamma + \right. \\ \left. \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 w^*}{\partial n_q \partial n_p} \hat{M}_{nj} d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial w^*}{\partial n_p} \hat{V}_{nj} d\Gamma \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

方程(13)和(14)构成了边界积分方程组,含有4个边界变量( $w, \partial w/\partial n, V_n, M_n$ ),对于每个边界点一般总有两个已知,两个未知. 将边界划分为 $N$ 个单元,在每个单元内设定插值函数,最后将问题转化为 $2N$ 阶线性代数方程组求解. 然而,该方程组中,还包含未知系数 $\alpha_j$ 和函数 $\hat{w}_j$ . 为此,我们应首先选择适当的 $f_j$ . 经数值计算表明, $f_j$ 可取为下列形式:

$$f_j = 1 - r - r^2, \quad (15)$$

其中, $r$ 是两点之间的距离.

由方程(8)可得 $\hat{w}_j$ 的表达式如下:

$$\hat{w}_j = \frac{1}{64}r^4 - \frac{1}{225}r^5 - \frac{1}{576}r^6. \quad (16)$$

由方程(7)定义的未知系数 $\alpha_j$ ,可按照下列方法确定. 将方程(7)遍历 $M$ 个点( $N$ 个边界节点和 $L$ 个内部点)并写成矩阵形式,其中 $\bar{w}$ 用 $M$ 个点处的挠度值代替. 则

$$w = F\alpha, \quad (17)$$

上式求逆得出插值系数 $\alpha$ 的表达式

$$\alpha = F^{-1}w. \quad (18)$$

方程(18)表明插值系数 $\alpha$ 可以由 $M$ 个点处的挠度值来表示. 因此,在方程(13)和(14)组成的方程组中,实际包含 $4N + L$ 个未知量,引入 $2N$ 个边界条件后,还剩 $2N + L$ 个未知量,所以需要 $2N + L$ 个方程来求解. 我们可以从方程(12)中写出 $L$ 个内部点的计算公式,与方程(13)和(14)联立求解.

## 2 边界积分方程的离散化

在方程(13)和(14)中引入记号 $a_i$ ,其定义见文献[16],在方程(12)中引入类似的记号 $b_i$ . 并记: $\theta = \partial w/\partial n_q = \partial w/\partial n_p, \hat{\theta}_j = \partial \hat{w}_j/\partial n_q = \partial \hat{w}_j/\partial n_p$ .

应用边界元法求解方程(12)、(13)和(14)时,将板的边界划分为有限个边界单元,同时取有限个内部点. 将变量 $w, \partial w/\partial n, V_n, M_n$ 看作是相互独立的,不考虑其间应满足的微分关系. 以变量的节点值作为未知量,利用插值函数将边界积分方程(12)、(13)和(14)离散为线性代数方程组.

方程(12)、(13)和(14)离散后分别为:

$$c_i w_i - \sum_{q=1}^N \int_{\Gamma_q} V_{n_q} b_1 ds + \sum_{q=1}^N \int_{\Gamma_q} M_{n_q} b_2 ds - \sum_{q=1}^N \int_{\Gamma_q} \theta_q b_3 ds + \sum_{q=1}^N \int_{\Gamma_q} w_q b_4 ds = \sum_{j=1}^M \lambda^4 \alpha_j \left[ c_i \hat{w}_{ij} - \sum_{q=1}^N \int_{\Gamma_q} \hat{V}_{n_{qj}} b_1 ds + \sum_{q=1}^N \int_{\Gamma_q} \hat{M}_{n_{qj}} b_2 ds - \sum_{q=1}^N \int_{\Gamma_q} \hat{\theta}_{qj} b_3 ds + \sum_{q=1}^N \int_{\Gamma_q} \hat{w}_{qj} b_4 ds \right], \quad (19)$$

$$\frac{1}{2} w_p - \sum_{q=1}^N \int_{\Gamma_q} V_{n_q} a_1 ds + \sum_{q=1}^N \int_{\Gamma_q} M_{n_q} a_2 ds - \sum_{q=1}^N \int_{\Gamma_q} \theta_q a_3 ds + \sum_{q=1}^N \int_{\Gamma_q} w_q a_4 ds = \sum_{j=1}^M \lambda^4 \alpha_j \left[ \frac{1}{2} \hat{w}_{pj} - \sum_{q=1}^N \int_{\Gamma_q} \hat{V}_{n_{qj}} a_1 ds + \sum_{q=1}^N \int_{\Gamma_q} \hat{M}_{n_{qj}} a_2 ds - \sum_{q=1}^N \int_{\Gamma_q} \hat{\theta}_{qj} a_3 ds + \sum_{q=1}^N \int_{\Gamma_q} \hat{w}_{qj} a_4 ds \right], \quad (20)$$

$$\frac{1}{2} \theta_p - \sum_{q=1}^N \int_{\Gamma_q} V_{n_q} a_5 ds + \sum_{q=1}^N \int_{\Gamma_q} M_{n_q} a_6 ds - \sum_{q=1}^N \int_{\Gamma_q} \theta_q a_7 ds + \sum_{q=1}^N \int_{\Gamma_q} w_q a_8 ds =$$

$$\sum_{j=1}^M \lambda^4 \alpha_j \left[ \frac{1}{2} \hat{\theta}_{pj} - \sum_{q=1}^N \int_{\Gamma_q} \hat{V}_{n_q j} a_5 ds + \sum_{q=1}^N \int_{\Gamma_q} \hat{M}_{n_q j} a_6 ds - \sum_{q=1}^N \int_{\Gamma_q} \hat{\theta}_{qj} a_7 ds + \sum_{q=1}^N \int_{\Gamma_q} \hat{w}_{qj} a_8 ds \right], \quad (21)$$

上式中  $\Gamma_q$  为第  $q$  个单元的长度,  $\int_{\Gamma_q} (\cdot) ds$  表示在第  $q$  个单元上的积分. 方程(20)和(21)中的  $p = 1, 2, \dots, N$ .

对于常单元情况, 假设变量值在每个单元上是常数, 并取为单元中点的值. 注意到对于这种单元, 节点在单元的中点, 节点处的边界总是光滑的, 因此常数  $C(p)$  总等于  $1/2$ . 将向量  $\hat{w}_j, \hat{\theta}_j, \hat{M}_j$  和  $\hat{V}_j$  分别考虑为矩阵  $\hat{w}, \hat{\theta}, \hat{M}_n$  和  $\hat{V}_n$  的一列. 式(19)、(20)和(21)的矩阵形式为:

$$Iw + B_4 w - B_3 \theta + B_2 M_n - B_1 V_n = (\hat{I}w + B_4 \hat{w} - B_3 \hat{\theta} + B_2 \hat{M}_n - B_1 \hat{V}_n) \lambda^4 \alpha, \quad (22)$$

$$A_4 w - A_3 \theta + A_2 M_n - A_1 V_n = (A_4 \hat{w} - A_3 \hat{\theta} + A_2 \hat{M}_n - A_1 \hat{V}_n) \lambda^4 \alpha, \quad (23)$$

$$A_8 w - A_7 \theta + A_6 M_n - A_5 V_n = (A_8 \hat{w} - A_7 \hat{\theta} + A_6 \hat{M}_n - A_5 \hat{V}_n) \lambda^4 \alpha. \quad (24)$$

在以上方程中, 系数项  $C(p)$  已经并入到相应的矩阵的主对角线上.

在方程(22)中,  $I$  是  $L \times L$  阶单位阵, 与  $I$  相乘的向量  $w$  是  $L$  个内部点处的挠度值.  $B_i (i = 1, 2, 3, 4)$  是由  $L$  个内点与  $N$  个边界点通过基本解决定的  $L \times N$  阶影响系数矩阵. 与  $B_i$  相乘的  $w, \theta, M_n$  和  $V_n$  各向量是  $N$  个边界节点处的未知量. 与  $I$  相乘的矩阵  $\hat{w}$  是  $L$  个内部点与  $M$  个全部节点通过方程(16)所形成的  $L \times M$  阶已知矩阵. 与  $B_i$  相乘的  $\hat{w}, \hat{\theta}, \hat{M}_n$  和  $\hat{V}_n$  各矩阵是  $N$  个边界点与  $M$  个全部节点通过方程(16)所形成的  $N \times M$  阶已知矩阵.  $\alpha$  是节点总数  $M$  个未知系数, 可由方程(18)用  $M$  个节点处的挠度来表示. 方程(23)和(24)中的  $A_i (i = 1, 2, \dots, 8)$  是  $N \times N$  阶系数矩阵, 见文献[16]; 其余各量与方程(22)中的含义相同.

引进下列矩阵记号:

$$S_1 = A_4 \hat{w} - A_3 \hat{\theta} + A_2 \hat{M}_n - A_1 \hat{V}_n, \quad S_2 = A_8 \hat{w} - A_7 \hat{\theta} + A_6 \hat{M}_n - A_5 \hat{V}_n,$$

$$S_3 = \hat{I}w + B_4 \hat{w} - B_3 \hat{\theta} + B_2 \hat{M}_n - B_1 \hat{V}_n,$$

$$A_{48} = \begin{bmatrix} A_4 \\ A_8 \end{bmatrix}, \quad A_{37} = \begin{bmatrix} A_3 \\ A_7 \end{bmatrix}, \quad A_{26} = \begin{bmatrix} A_2 \\ A_6 \end{bmatrix}, \quad A_{15} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_5 \end{bmatrix}, \quad S_{12} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix},$$

并注意方程(18), 可将方程(22)、(23)和(24)写成整体方程组

$$\begin{bmatrix} A_{48} & \mathbf{0} \\ B_4 & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w^b \\ w^i \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} A_{37} & \mathbf{0} \\ B_3 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta^b \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{26} & \mathbf{0} \\ B_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_n^b \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} A_{15} & \mathbf{0} \\ B_1 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_n^b \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} = \lambda^4 \begin{bmatrix} S_{12} \\ S_3 \end{bmatrix} F^{-1} \begin{Bmatrix} w^b \\ w^i \end{Bmatrix}, \quad (25)$$

式中的上标  $b$  表示边界节点值, 上标  $i$  表示内部节点值.

由方程(25)求出各边界节点的挠度、转角、弯矩和等效剪力以及  $L$  个内部点处的挠度后, 可利用方程(19)求解域内任意一点处的挠度.

求域内点弯矩值时, 可以利用域内点的挠度值, 由弯矩与挠度的基本关系进行差商运算, 此法可以容易地求出域内任意一点处的弯矩值. 求出靠近边界处的法向和切向弯矩后, 便可

以计算孔边处的动应力(弯矩)集中系数.

### 3 开孔薄板动应力集中系数的确定

考虑一无限大薄板开圆孔,孔边自由,属自由边界,其边界上总弯矩和总剪力为零. 现设有一稳态弯曲波,由无穷远处入射,其入射方向与  $x$  轴方向一致. 入射波可记为:

$$w^{(i)} = w_0 e^{i\lambda x}. \quad (26)$$

取入射波的幅值  $w_0 = 1$ ,在极坐标系下:  $w^{(i)} = e^{i\lambda r \cos\theta}$ . 由极坐标系的边界条件算子,将入射波引起的边界弯矩和剪力表示为:

$$M_n = \frac{D(1-\mu)\lambda^2}{2} e^{i\lambda r \cos\theta} \left( \cos 2\theta + \frac{1+\mu}{1-\mu} \right), \quad (27)$$

$$V_n = -Di\lambda^3 \cos\theta e^{i\lambda r \cos\theta} + \frac{D\lambda^2(1-\mu)}{2r} (2\cos 2\theta - i\lambda r \sin\theta \sin 2\theta) e^{i\lambda r \cos\theta}. \quad (28)$$

将式(27)、(28)进行同样的离散化后代入式(25),便可求出孔边的各边界变量和所选择的内部点上的挠度值.

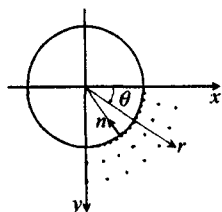


图1 单元划分图

由动应力集中系数的定义可知,动弯矩集中系数是开孔周边上全波在某点处产生的弯矩与入射波在同点处产生的弯矩的幅值之比:

$$M_\theta^* = M_\theta / M_0. \quad (29)$$

入射波产生的弯矩幅值

$$M_0 = D\lambda^2 w_0 = D\lambda^2, \quad (30)$$

$M_\theta$  由从方程(25)中求出的节点值确定.

动弯矩系数可由式(29)计算.

### 4 数值算例

取圆孔半径  $R = 1$ ,泊松比  $\mu = 0.3$ ,  $f = 1 - r - r^2$ . 将整个圆孔边界划分为60个常单元,并取60个内部点,见图1. 图2~图6分别给出了无量纲波数  $\lambda$  取不同值时,动弯矩集中系数  $M_\theta^*$  沿孔边的变化.  $M_\theta^*$  的数值关于  $x$  轴对称. 表1给出了在两种  $f$  函数的情况下,波数  $\lambda$  取不同值时,动弯矩集中系数的计算数值.

表1 圆孔动弯矩集中系数 ( $\theta = \pi/2$ )

$\lambda$	$f = 1 - r$	$f = 1 - r - r^2$	文献[16]
0.1	1.828 5	1.830 1	1.836 0
0.5	1.668 1	1.669 2	1.671 0
1.0	1.645 2	1.643 7	1.642 0
2.0	1.643 9	1.645 8	1.655 0
3.0	1.647 5	1.648 3	1.650 0
5.0	1.650 3	1.650 9	1.652 0

### 5 结 论

计算结果表明:随着无量纲波数的增加,平板开孔动应力集中系数降低;波动频率较低时,动应力集中系数较大,其值约为1.85;当平板波动频率比较高时 ( $\lambda > 2$ ),动应力集中系数在1.65左右变化.

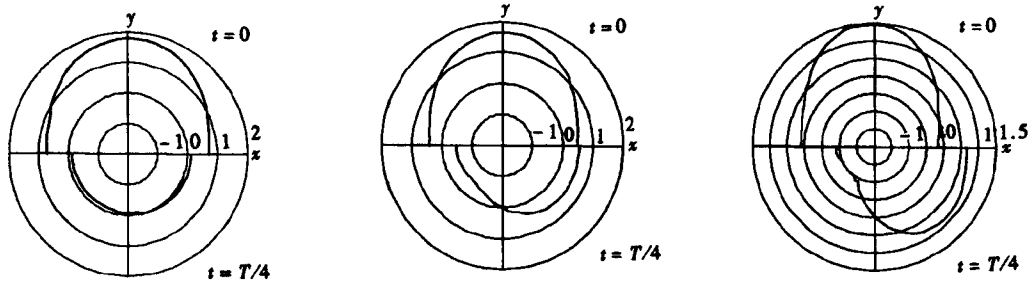


图2  $\lambda = 0.1$  孔边动弯矩分布 图3  $\lambda = 0.5$  孔边动弯矩分布 图4  $\lambda = 1.0$  孔边动弯矩分布

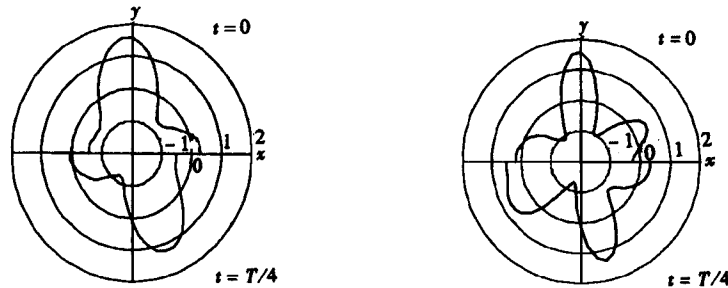


图5  $\lambda = 3.0$  孔边动弯矩分布

图6  $\lambda = 5.0$  孔边动弯矩分布

本文基于双互易法建立了薄板弯曲波动方程的边界积分方程。为了便于比较仍然采用常单元方案对边界积分方程进行离散化,同样得到了线性代数方程组。在这个方程组中,同时包含内部节点处的挠度值,可以同时求解出边界位移、边界力和内部节点位移。为了验证方法的正确性和有效性,给出了与文献[16]相同的数值算例。结果表明,所得结论与文献[16]相同且计算数据具有相当的精度,而双互易边界元法的理论推导和数值计算等方面都要比直接动力边界元法简单得多。

致谢 作者感谢北京交通大学论文基金(PD176-177)的资助。

### [参 考 文 献]

- [1] 王铎,马兴瑞,刘殿魁. 弹性动力学最新进展[M]. 北京:科学出版社,1995,1—106.
- [2] Pao Y H. Dynamical stress concentration in an elastic plate[J]. *J Appl Mech*, 1962, 29(2): 299—305.
- [3] LIU Dian-kui, GAI Bing-zheng, TAO Gui-guan. Application of the method of complex functions to dynamic stress concentrations[J]. *Wave Motion*, 1982, 4(3): 293—304.
- [4] Partridge P W, Brebbia C A, Wrobel L C. *Dual Reciprocity Boundary Element Method* [M]. Southampton Boston: Comput Mech Pub, 1992, 1—176.
- [5] Nardini D, Brebbia C A. A new approach to free vibration analysis using boundary elements[A]. In: Brebbia C A Ed. *Boundary Elements Methods in Engineering* [C]. Berlin: Springer-Verlag, 1982, 312—326.
- [6] Kogl M, Gaul L. Free vibration analysis of anisotropic solids with the boundary element method[J]. *Engineering Analysis With Boundary Elements*, 2003, 27(2): 107—114.
- [7] Rodriguez J J, Power H. *H*-adaptive mesh refinement strategy for the boundary element method based on local error analysis[J]. *Engineering Analysis With Boundary Elements*, 2001, 25(7): 565—579.
- [8] Rodriguez J J, Power H. An adaptive dual reciprocity scheme for the numerical solution of the Pois-

- son equation[J]. *Engineering Analysis With Boundary Elements*, 2002, 26(4): 283—300.
- [9] Chien C C, Chen Y H, Chuang C C. Dual reciprocity BEM analysis of 2D transient elastodynamic problems by time-discontinuous Galerkin FEM[J]. *Engineering Analysis With Boundary Elements*, 2003, 27(6): 611—624.
- [10] Itagaki M. Advanced dual reciprocity method based on polynomial source and its application to eigenvalue problem for nonuniform media[J]. *Engineering Analysis With Boundary Elements*, 2000, 24(2): 169—176.
- [11] Chen J T, Kuo S R, Chung I L, et al. Study on the true and spurious eigensolutions of two-dimensional cavities using the dual multiple reciprocity method[J]. *Engineering Analysis With Boundary Elements*, 2003, 27(7): 655—670.
- [12] Singh K M, Tanaka M. Dual reciprocity boundary element analysis of inverse heat conduction problems[J]. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 2001, 190(40/41): 5283—5295.
- [13] Albuquerque E L, Sollero P, Aliabadi M H. The boundary element method applied to time dependent problems in anisotropic materials[J]. *Internat J Solids and Structures*, 2002, 39(5): 1405—1422.
- [14] Albuquerque E L, Sollero P, Fedelinski P. Dual reciprocity boundary element method in Laplace domain applied to anisotropic dynamic crack problems[J]. *Computers and Structures*, 2003, 81(17): 1703—1713.
- [15] Chen W, Hon Y C. Numerical investigation on convergence of boundary knot method in the analysis of homogeneous Helmholtz, modified Helmholtz, and convection-diffusion problems[J]. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 2003, 192(15): 1859—1875.
- [16] 高锁文, 王本利, 马兴瑞. 开孔薄板弹性波散射与动应力集中[J]. *工程力学*, 2001, 23(2): 14—20.

## Dual Reciprocity Boundary Element Method for Flexural Waves in Thin Plate With Cutout

GAO Suo-wen<sup>1</sup>, WANG Yue-sheng<sup>1</sup>, ZHANG Zi-mao<sup>1</sup>, MA Xing-rui<sup>2</sup>

(1. *Institute of Engineering Mechanics, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, P. R. China;*

2. *China Aerospace Science and Technology Corporation, Beijing 100037, P. R. China*)

**Abstract:** The theoretical analysis and numerical calculation of scattering of elastic waves and dynamic stress concentrations in the thin plate with the cutout was studied using dual reciprocity boundary element method (DRM). Based on the work equivalent law, the dual reciprocity boundary integral equations for flexural waves in the thin plate were established using static fundamental solution. As illustration, numerical results for the dynamic stress concentration factors in the thin plate with a circular hole are given. The results obtained demonstrate good agreement with other reported results and show high accuracy.

**Key words:** thin plate; DRM; scattering of flexural wave; dynamic stress concentration