$$\hat{t}(s)=[\frac{1}{\sqrt{6}}\cos(2\ell n\frac{s}{\sqrt{6}})-2\sin(2\ell n\frac{s}{\sqrt{6}})]\hat{i}+\cdots\cdots$$

$$\hat{n}(s)=\ \cdots\cdots \quad ; \quad \hat{b}(s)=\ \cdots\cdots \qquad (略)$$

§3.6曲線進階性質

要瞭解曲線的走向，前節的三個單位向量便可以提供充份的訊息，但若要瞭解曲線的形狀，則必須藉助曲率(curvature)與扭率(torsion)這二個實數參數，而這二個實參數的定義是：

定　義：就曲線 $\vec{r}(s)$ 而言，若其各分量之二階微分均存在且不同時爲零，則其上一點之曲率 k、曲率半徑 ρ 與扭率 τ 分別爲：

$$曲率：\kappa=\left|\frac{d\hat{t}}{ds}\right| \quad ; \quad 曲率半徑：\rho=\frac{1}{\kappa} \quad ; \quad 扭率：\tau=\left|\frac{d\hat{b}}{ds}\right|$$

根據以上的定義不難發現，直線的曲率與扭率都是零，而平面曲線的扭率是零，由這些現象應可瞭解曲率與扭率的基本意義。有關曲率的性質也可以從幾何的角度來解釋，設想(x,y)平面上的一條曲線 $\vec{r}(s)$，則根據定義知道其曲率爲：

$$\vec{r}(s)=x(s)\hat{i}+y(s)\hat{j} \quad \Rightarrow \quad \hat{t}(s)=x'(s)\hat{i}+y'(s)\hat{j}$$

$$\kappa(s)=\left|\frac{d\hat{t}}{ds}\right|=\left|x''(s)\hat{i}+y''(s)\hat{j}\right| \Rightarrow k^2(s)=[x''(s)]^2+[y''(s)]^2 \qquad (3.24)$$

若對此曲線作切線，並取此切線和 x 軸正向之夾角爲 ϕ（參考圖3.8），則 ϕ 對 s 的微分爲：

$$\frac{d\phi}{ds}=\frac{d}{ds}\tan^{-1}\frac{dy}{dx}=\frac{d}{ds}\tan^{-1}\frac{y'(s)}{x'(s)}$$

$$=\frac{y''x'-x''y'}{[x'(s)]^2+[y'(s)]^2}$$

$$=y''(s)x'(s)-x''(s)y'(s)$$

$$（因\ (x')^2+(y')^2=1）$$

$$(\frac{d\phi}{ds})^2=(y''x')^2+(x''y')^2-2y''y'x''x'$$

$$=(y'')^2[1-(y')^2]+(x'')^2[1-(x')^2]-2y''y'x''x'$$

$$=(y'')^2+(x'')^2-(y''y'+x''x')^2$$

$$=(x'')^2+(y'')^2 \qquad （因\ y''y'+x''x'=0） \qquad (3.25)$$

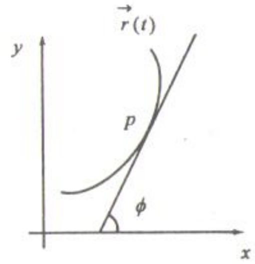

圖3.8

比較(3.24)與(3.25)二式，可以知道所謂曲率就是角度 ϕ 相對於弧長 s 的變化率。雖然在以上的定義中，曲率與扭率都是根據弧長參數 s 而計算的，但是在真實的問題中，將曲線由 $\vec{r}(t)$ 轉換成 $\vec{r}(s)$ 的工作往往很困難，此時可以應用定理(16)直接在 t 參數下計算，另外在本節中所提到的各個單位向量與參數，可以用定理(17)結合在一起，這個定理一般稱之爲弗耐特(Frenet)定理：

定　理16：若曲線 $\vec{r}(t)$ 的三個分量都可三階微分，且其各階微分值均不全爲零，則有：

$$\kappa=\frac{|\vec{r}'\times\vec{r}''|}{(\vec{r}'\cdot\vec{r}')^{3/2}} \quad , \quad \tau=\frac{[\vec{r}'\vec{r}''\vec{r}''']}{|\vec{r}'\times\vec{r}''|^2} \quad ; \quad 其中 \quad \vec{r}'=\frac{d\vec{r}}{dt}$$

定　理17：若曲線 $\vec{r}(s)$ 的三個分量都可三階微分，且其微分值不全爲零，則恆有如下之關係：

$$\begin{aligned} d\hat{t}/ds&=\kappa\hat{n} \\ d\hat{n}/ds&=-\kappa\hat{t}+\tau\hat{b} \\ d\hat{b}/ds&=-\tau\hat{n} \end{aligned} \qquad 或 \qquad \frac{d}{ds}\begin{bmatrix}\hat{t}\\ \hat{n}\\ \hat{b}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&\kappa&0\\ -\kappa&0&\tau\\ 0&-\tau&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{t}\\ \hat{n}\\ \hat{b}\end{bmatrix}$$