(3)本題亦可使用向量法來解，讀者請自行試之。另外，由本題可看出曲率半徑之幾何涵義。

【例 24】

證明定理(16)：$\kappa=\frac{|\vec r'\times\vec r''|}{(\vec r'\cdot\vec r')^{3/2}}$；其中 $\vec r'(t)=\frac{d\vec r}{dt}$。

(83台大化工)

【解】

(1)經由使用連鎖律，而有：

$$\frac{d\vec r}{ds}=\frac{d\vec r}{dt}\frac{dt}{ds}=\frac{\vec r'}{\sqrt{\vec r'\cdot\vec r'}}\qquad\left(\frac{ds}{dt}=\sqrt{\vec r'\cdot\vec r'}\right)$$

$$\frac{d^2\vec r}{ds^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec r}{ds}\right)\frac{dt}{ds}=\frac{1}{\sqrt{\vec r'\cdot\vec r'}}\left[\frac{\vec r''}{\sqrt{\vec r'\cdot\vec r'}}-\frac{(\vec r'\cdot\vec r'')}{(\vec r'\cdot\vec r')^{3/2}}\vec r'\right]$$

(2)根據曲率之定義：

$$\kappa^2=\frac{d^2\vec r}{ds^2}\cdot\frac{d^2\vec r}{ds^2}=\left[\frac{\vec r''}{(\vec r'\cdot\vec r')}-\frac{(\vec r'\cdot\vec r'')}{(\vec r'\cdot\vec r')^2}\vec r'\right]\cdot\left[\frac{\vec r''}{(\vec r'\cdot\vec r')}-\frac{(\vec r'\cdot\vec r'')}{(\vec r'\cdot\vec r')^2}\vec r'\right]$$

$$=\frac{1}{(\vec r'\cdot\vec r')^3}[(\vec r'\cdot\vec r')(\vec r''\cdot\vec r'')-(\vec r'\cdot\vec r'')^2]$$

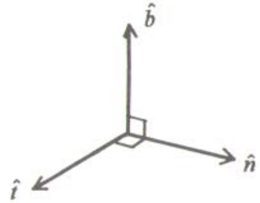
【例 25】

試證明：$\frac{d\hat n}{ds}=\tau\hat b-\kappa\hat t$。

(68清華動機)

【證】

(1)根據下圖；$\hat t,\hat n,\hat b$ 間的關係爲：$\hat n=(\hat b\times\hat t)$。



(2)$\frac{d\hat n}{ds}=\frac{d}{ds}(\hat b\times\hat t)$

$$=\frac{d\hat b}{ds}\times\hat t+\hat b\times\frac{d\hat t}{ds}$$

$$=(-\tau\hat n)\times\hat t+\hat b\times(\kappa\hat n)$$

$$=\tau\hat b-\kappa\hat t\quad\text{（根據 Frenet 定理）}$$

(3)本題爲應用 Frenet 定理之第一、三式來證明第二式；以下將再證明其中的第三式以完成定理(17)的證明。

【例 26】

試證明：$\frac{d\hat b}{ds}=-\tau\hat n$ 。

【解】

(1)由於 $\hat b$ 之定義爲 $\hat b=\hat t\times\hat n$，因此可以知道 $\hat b\cdot\hat t=0$；

(2)由於 $\frac{d}{ds}(\hat b\cdot\hat t)=\hat b\cdot\frac{d\hat t}{ds}+\frac{d\hat b}{ds}\cdot\hat t=0$

因此 $\frac{d\hat b}{ds}\cdot\hat t=-\hat b\cdot\frac{d\hat t}{ds}=-\hat b\cdot(\kappa\hat n)=0$，所以 $\frac{d\hat b}{ds}$ 必與 $\hat t$ 垂直，

而因 $\hat b$ 是單位向量，所以 $\hat b$ 必和 $\frac{d\hat b}{ds}$ 垂直，因此 $\frac{d\hat b}{ds}$ 必與 $\hat n$ 平行。

(3)根據定義 $\tau=\left|\frac{d\hat b}{ds}\right|$，所以有 $\frac{d\hat b}{ds}=\pm\tau\hat n$；（正負號尚無法決定）

(4)由於上式爲恆等式，故隨意選取一個曲線，例如：

$$\vec r(s)=\cos\frac{s}{\sqrt2}\hat i+\sin\frac{s}{\sqrt2}\hat j+\frac{s}{\sqrt2}\hat k$$

可驗知應取負號，也就是：$\frac{d\hat b}{ds}=-\tau\hat n$