【例 27】

證明定理(16)：$\tau=\dfrac{[\vec{r}'\vec{r}''\vec{r}''']}{|\vec{r}'\times\vec{r}''|^2}$； 其中 $\dfrac{d}{dt}\vec{r}(t)=\vec{r}'(t)$。

【證】

(1)承例(24)：$\hat{t}=\dfrac{1}{\sqrt{\vec{r}'\cdot\vec{r}'}}\vec{r}'$ 及 $\hat{n}=\dfrac{1}{\kappa}\dfrac{d^2\vec{r}}{ds^2}=\dfrac{1}{\kappa}\dfrac{(\vec{r}'\cdot\vec{r}')\vec{r}''-(\vec{r}'\cdot\vec{r}'')\vec{r}'}{(\vec{r}'\cdot\vec{r}')^2}$；

因而有： $\hat{b}=\hat{t}\times\hat{n}=\dfrac{1}{\kappa}\dfrac{1}{(\vec{r}'\cdot\vec{r}')^{3/2}}(\vec{r}'\times\vec{r}'')=\dfrac{\vec{r}'\times\vec{r}''}{|\vec{r}'\times\vec{r}''|}$；

(2)取 $\phi(t)=|\vec{r}'\times\vec{r}''|$，則：$\dfrac{d\hat{b}}{ds}=\dfrac{1}{\sqrt{\vec{r}'\cdot\vec{r}'}}[\dfrac{\vec{r}'\times\vec{r}'''}{\phi(t)}-\dfrac{\phi'}{\phi^2}(\vec{r}'\times\vec{r}'')]$；

(3)根據定理(17)：$\tau=\hat{n}\cdot\dfrac{d\hat{b}}{ds}$；因此：

$$\tau=\frac{1}{\kappa}[\frac{(\vec{r}'\cdot\vec{r}'')\vec{r}'-(\vec{r}'\cdot\vec{r}')\vec{r}''}{(\vec{r}'\cdot\vec{r}')^2}]\cdot\frac{1}{\sqrt{\vec{r}'\cdot\vec{r}'}}[\frac{\vec{r}'\times\vec{r}'''}{\phi(t)}-\frac{\phi'}{\phi^2}(\vec{r}'\times\vec{r}'')]$$

$$=\frac{-(\vec{r}'\cdot\vec{r}')\vec{r}''}{\kappa(\vec{r}'\cdot\vec{r}')^2}\cdot\frac{(\vec{r}'\times\vec{r}''')}{\phi(t)\sqrt{\vec{r}'\cdot\vec{r}'}}=\frac{[\vec{r}'\vec{r}''\vec{r}''']}{|\vec{r}'\times\vec{r}''|^2}$$

【例 28】

試求曲線：$\vec{r}(t)=a\cos t\,\hat{i}+a\sin t\,\hat{j}+bt\,\hat{k}$ 在任一點曲率？

(86成大土木、71成大機械)

(1)本題僅要求解曲率，但為瞭解曲率與扭率間之關係，以下將把扭率亦一併解出。

$\vec{r}'(t)=-a\sin t\,\hat{i}+a\cos t\,\hat{j}+b\hat{k}$ ； $\vec{r}''(t)=-a\cos t\,\hat{i}-a\sin t\,\hat{j}$

$\vec{r}'''(t)=a\sin t\,\hat{i}-a\cos t\,\hat{j}$

(2)故：$\vec{r}'\cdot\vec{r}'=a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t+b^2=a^2+b^2$

$\vec{r}'\cdot\vec{r}''=a^2\sin t\cos t-a^2\sin t\cos t=0$ ； $\vec{r}''\cdot\vec{r}''=a^2$

$$[\vec{r}'\vec{r}''\vec{r}''']=\begin{vmatrix}-a\sin t & a\cos t & b\\ -a\cos t & -a\sin t & 0\\ a\sin t & -a\cos t & 0\end{vmatrix}=a^2b$$

(3)由定理(16)：

$$\kappa=\frac{|\vec{r}'\times\vec{r}''|}{(\vec{r}'\cdot\vec{r}')^{3/2}}=\frac{\sqrt{(a^2+b^2)a^2}}{(a^2+b^2)^{3/2}}=\frac{a}{a^2+b^2}\quad;\quad\tau=\frac{[\vec{r}'\vec{r}''\vec{r}''']}{|\vec{r}'\times\vec{r}''|^2}=\frac{b}{(a^2+b^2)}$$

§3.7曲面基本性質

除了曲線的性質外，微分幾何的另一個重要主題是關於空間曲面的性質，有關空間曲面的表達方式一般而言有以下三種：

(a) $z=f(x,y)$ 或 $\vec{r}(x,y)=x\hat{i}+y\hat{j}+f(x,y)\hat{k}$ (函數)

(b) $\phi(x,y,z)=c$ (隱函數)

(c) $x=x(u,v)$，$y=y(u,v)$，$z=z(u,v)$ (參數式)

或 $\vec{r}(u,v)=x(u,v)\hat{i}+y(u,v)\hat{j}+z(u,v)\hat{k}$

基本上，(a)和(b)是屬於同一類的表達方式，因(a)可以轉換成(b)；而(a)和(c)也是屬於一類的表達方式，因為(a)也可以轉換成(c)，現在試著討論形式(a)轉換成形式(c)的可行性。根據前章的討論知道，如果 (x,y) 相對於 (u,v) 的雅各比行列式不為零，則根據定理(7)，必定存在函數 $u(x,y)$ 及 $v(x,y)$，因此(c)式可以轉換成(a)式：