國立臺灣海洋大學河海工程學系 2019 工程數學(二) 第二次大考參考解答

系級：______________　　學號：____________　　姓名：___________

1. (1) 試解特徵問題: $y''+\lambda y=0$; $y'(0)=0$, $y'(2)=0$，請求出特徵值與特徵函數。 (8%)

   (2) 試說明何謂函數正交。 (3%)

   (3) 請問(1)所得之特徵函數在區間[0, 2]上是否正交 (須說明原因)。 (3%)

2. 已知函數 $f(x)=\cos^3 x$，試求 $f(x)$ 的傅立葉級數展開。(hint:尤拉公式) (8%)

3. 給一函數 $f(x)=\left|\sin(\dfrac{x}{2})\right|$

   (1) 請畫出函數 $f(x)$ 之圖形 $(-6\pi \le x \le 6\pi)$。(2%)

   (2) 試問此函數為奇函數或是偶函數? (2%) 週期 $T=$? (2%)

   (3) 試求 $f(x)$ 的傅立葉級數展開。(8%)

   (4) 試求無窮級數 $\dfrac{-1}{4\times 1^2-1}+\dfrac{1}{4\times 2^2-1}+\dfrac{-1}{4\times 3^2-1}+\dfrac{1}{4\times 4^2-1}+\cdots$ 之值。(4%)

4. 已知某週期函數 $f(x)=\begin{cases}0, & 1\le |x|\le 2\\ 2, & |x|<1\end{cases}$，$f(x)=f(x+4)$，試求 $f(x)$ 之複數型之傅立葉級數。(10%)

5 已知 $u(x-a)$ 為單位步階函數，即 $u(x-a)=\begin{cases}1, & x>a\\ 0, & x<a\end{cases}$ $(a>0)$

   (1) 請畫出 $p(x)=u(x+a)-u(x-a)$ 之圖形，並求其傅立葉轉換 $P(\omega)$。 (6%)

   (2) 請畫出 $q(x)=x[u(x+2)-u(x-2)]$ 之圖形，並求其傅立葉轉換 $Q(\omega)$。 (6%)

   (3) 已知函數 $g(x)=\begin{cases}0, & x<2 \ \ and \ \ x>6\\ 2, & 2\le x\le 6\end{cases}$，試以單位步階函數來表示。 (2%)

   (4) 函數 $f(x-4)=g(x)$ 請畫出 $f(x)$ 之圖形，並求其傅立葉轉換 $F(\omega)$。 (6%)

   (5) 試求函數 $g(x)$ 傅立葉轉換 $G(\omega)$。 (4%)

   (6) 試求 $f(x)=e^{-ax}u(x)$ 之傅立葉轉換 $F(\omega)$，其中 $a>0$。 (5%)

   (7) 試將微分方程 $y''(x)+6y'(x)+5y(x)=\delta(x-3)$ 作傅立葉轉換，並求 $Y(\omega)=$? 與 $y(x)=\mathcal{F}^{-1}[Y(\omega)]=$? (8%)

6. (1) 試求 $f(x)=e^{-a|x|}$，其中 $a>0$ 之傅立葉轉換 $F(\omega)$ (5%)

   (2) 試求 $\mathcal{F}^{-1}[\dfrac{1}{(1+\omega^2)(4+\omega^2)}]=$? (8%)

傅立葉級數展開

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{2n\pi x}{T} + b_n \sin\frac{2n\pi x}{T})$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\,dx,\quad a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos\frac{2n\pi x}{T}dx,\quad b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin\frac{2n\pi x}{T}dx$$

傅立葉級數之 Parseval 恆等式： $\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(x)\,dx = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$

傅立葉積分： $f(x) = \int_0^{\infty}[A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x]\,d\omega$

其中 $A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x\,dx,\quad B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x\,dx$

傅立葉複數形式級數展開

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n x},\quad \text{其中 } \omega_n = \frac{2n\pi}{T},\quad c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)e^{-i\omega_n x}\,dx$$

傅立葉轉換： $F(\omega) = \mathcal{F}[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx$

傅立葉反轉換： $f(x) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}\,d\omega$

傅立葉轉換的 Parseval 恆等式： $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\,d\omega$

Convolution : $f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau \quad \Rightarrow \mathcal{F}[f(t) * g(t)] = F(\omega)\cdot G(\omega)$

$\mathcal{F}[f'(t)] = i\omega F(\omega) \Rightarrow \mathcal{F}[f^{(n)}(t)] = (i\omega)^n F(\omega)$

$\mathcal{F}[t^n f(t)] = i^n \frac{d^n}{d\omega^n}F(\omega)$

$\int_a^b f(x)\delta(x-x_0)\,dx = f(x_0)$ 其中 $a < x_0 < b$

尤拉公式： $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}),\quad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$

Scaling : $\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{a}F(\frac{\omega}{a})$

Time shifting: $\mathcal{F}[f(t-T)] = e^{-i\omega T} F(\omega)$

Frequency shifting: $\mathcal{F}[e^{i\omega_0 t} f(t)] = F(\omega - \omega_0)$

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\beta\sin\alpha$

參考解答:

1. (1) 試解特徵問題: $y'' + \lambda y = 0$; $y'(0) = 0$, $y'(2) = 0$,請求出特徵值與特徵函數。 (8%)

(2) 試說明何謂函數正交。 (3%)

(3) 請問(1)所得之特徵函數在區間$[0, 2]$上是否正交 (須說明原因)。 (3%)

(1) (a) 令 $\lambda = -k^2$

可得 $y(x) = c_1 \cosh kx + c_2 \sinh kx$

由 $y'(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$

$y'(2) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$

(b) 令 $\lambda = 0$

可得 $y(x) = c_1 + c_2 x$

由 $y'(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$

$y'(2) = 0 \Rightarrow 0 = 0 \quad \Rightarrow c_1$ 為任意數

$\therefore \lambda = 0$ 為一特徵值, $y(x) = 1$ 為一特徵函數

(c) 令 $\lambda = k^2$

可得 $y(x) = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx$

由 $y'(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$

$y'(2) = 0 \Rightarrow -c_1 k \sin 2k = 0$

$\because \ c_1 = 0$ (trivial solution)

$\therefore$ 可知其為 $\sin 2k = 0 \Rightarrow k = \dfrac{n\pi}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$

故特徵值為 $\lambda_n = (\dfrac{n\pi}{2})^2$

特徵函數為 $y_n(x) = \cos(\dfrac{n\pi x}{2}) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$

(2) 若某組函數 $\phi_m(x)$ 具有下述特性

$$<\phi_m, \phi_n> = \int_a^b \phi_m(x)\phi_n(x)\, dx \begin{cases} = 0 & if \ m \neq n \\ \neq 0 & if \ m = n \end{cases}$$

則稱此組函數在區間 $[a, b]$ 上正交。

(3) 是

$$\int_0^2 \cos(\frac{m\pi x}{2})\cos(\frac{n\pi x}{2})\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 [\cos(\frac{m\pi x}{2} + \frac{n\pi x}{2}) + \cos(\frac{m\pi x}{2} - \frac{n\pi x}{2})]\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 [\cos\frac{(m+n)\pi x}{2} + \cos\frac{(m-n)\pi x}{2}]\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{(m+n)\pi}\sin\frac{(m+n)\pi x}{2}\bigg|_0^2 + \frac{2}{(m-n)\pi}\sin\frac{(m-n)\pi x}{2}\bigg|_0^2 \right]$$

由於 $m, n = 1, 2, 3, \cdots$

所以上式積分恆為零,故此組特徵函數互為正交。

2. 已知函數 $f(x)=\cos^3 x$，試求 $f(x)$ 的傅立葉級數展開。(hint:尤拉公式) (8%)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \cos^3 x \\
&= [\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})]^3 \\
&= \frac{1}{8}(e^{3ix}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-3ix}) \\
&= \frac{1}{8}(2\cos 3x + 6\cos x)
\end{aligned}
$$

故可知此函數之週期為 2π

$\therefore$ 由傅立葉級數: $f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{2n\pi x}{T}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{2n\pi x}{T}$

$$=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$$

比較係數後可得: $a_0=a_n=0\ \ (n\neq 1,3),\ \ a_1=\frac{3}{4},\ \ a_3=\frac{1}{4},\ \ b_n=0$

$\therefore$ 其傅立葉級數為 $f(x)=\frac{3}{4}\cos x+\frac{1}{4}\cos 3x$

3. 給一函數 $f(x)=\left|\sin(\frac{x}{2})\right|$

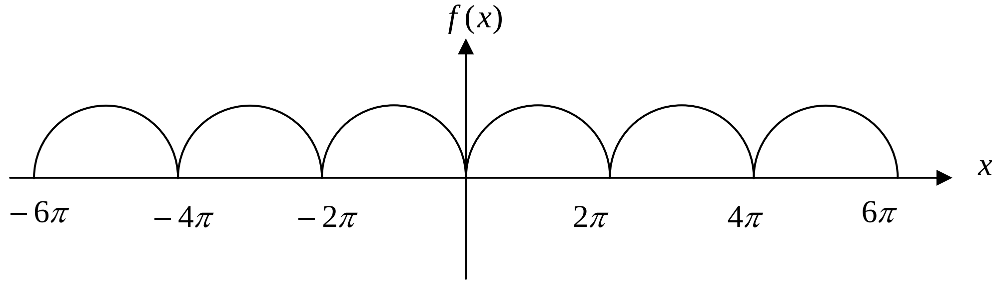
(1) 請畫出函數 $f(x)$ 之圖形 $(-6\pi\leq x\leq 6\pi)$。(2%)

(2) 試問此函數為奇函數或是偶函數? (2%) 週期 $T=$? (2%)

(3) 試求 $f(x)$ 的傅立葉級數展開。(8%)

(4) 試求無窮級數 $\frac{-1}{4\times1^2-1}+\frac{1}{4\times2^2-1}+\frac{-1}{4\times3^2-1}+\frac{1}{4\times4^2-1}+\cdots$ 之值。(4%)

(1)



(2) 由圖可知此為偶函數，週期為 2π

(3) $f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{2n\pi x}{T}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{2n\pi x}{T}$ (已知 $T=2\pi$, $b_n=0$)

$$=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$$

$$a_0=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\frac{x}{2}dx=\frac{2}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos\frac{2n\pi x}{T}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin\frac{x}{2}\cdot\cos nx\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\frac{x}{2}\cdot\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\sin(\frac{1}{2}+n)x+\sin(\frac{1}{2}-n)x]\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\sin(\frac{1}{2}+n)x+\sin(\frac{1}{2}-n)x]\,dx$$

$$= \frac{-4}{\pi}\frac{1}{4n^2-1}$$

$$\therefore\quad f(x) = \frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos nx$$

(4) $\frac{-1}{4\times1^2-1}+\frac{1}{4\times2^2-1}+\frac{-1}{4\times3^2-1}+\frac{1}{4\times4^2-1}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1}$

由(3)結果可知，當 $x=\pi$ 可得

$$f(\pi)=\sin\frac{\pi}{2}=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos n\pi$$

$$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)}{4n^2-1}=\frac{\pi}{4}(\frac{2}{\pi}-1)=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}$$

4. 已知某週期函數 $f(x)=\begin{cases}0, & 1\le|x|\le 2\\ 2, & |x|<1\end{cases}$，$f(x)=f(x+4)$，試求 $f(x)$ 之複數型之傅立葉級數。(10%)

由 $f(x)=f(x+4)$ 可知週期 $T=4$ 且 $f(x)$ 為偶函數

$$\therefore\omega_n=\frac{2n\pi}{T}=\frac{n\pi}{2}$$

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)e^{-i\omega_n x}dx=\frac{1}{4}\int_{-2}^{2}f(x)e^{-i\frac{n\pi}{2}x}dx$$

$$=\int_0^1\cos(\frac{n\pi}{2}x)\,dx$$

$$=\frac{2}{n\pi}\sin(\frac{n\pi}{2}x)\Big|_0^1$$

$$=\frac{2}{n\pi}\sin(\frac{n\pi}{2})$$

當 $n=0$ 時，$c_0=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\,dx=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1} 2\,dx=1$

$$f(x)=1+\frac{2}{\pi}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(\frac{n\pi}{2})e^{i\frac{n\pi}{2}x}=1+\frac{2}{\pi}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}e^{i(2n-1)\pi x}$$

5 已知$u(x-a)$為單位步階函數，即 $u(x-a)=\begin{cases}1, & x>a\\ 0, & x<a\end{cases}$ **(**$a>0$**)**

(1) 請畫出 $p(x)=u(x+a)-u(x-a)$之圖形，並求其傅立葉轉換$P(\omega)$。 **(6%)**

(2) 請畫出$q(x)=x[u(x+2)-u(x-2)]$之圖形，並求其傅立葉轉換$Q(\omega)$。**(6%)**

(3) 已知函數$g(x)=\begin{cases}0, & x<2 \;\; and \;\; x>6\\ 2, & 2\le x\le 6\end{cases}$，試以單位步階函數來表示。 **(2%)**

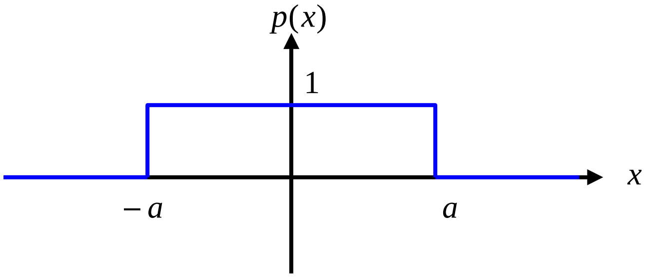
(4) 函數$f(x-4)=g(x)$請畫出$f(x)$之圖形，並求其傅立葉轉換$F(\omega)$。 **(6%)**

(5) 試求函數$g(x)$傅立葉轉換$G(\omega)$。 **(4%)**

(6) 試求 $f(x)=e^{-ax}u(x)$ 之傅立葉轉換 $F(\omega)$，其中 $a>0$。 **(5%)**

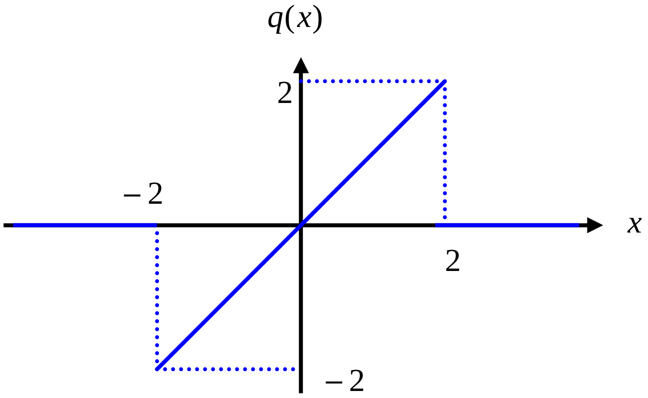
(7) 試將微分方程$y''(x)+6y'(x)+5y(x)=\delta(x-3)$作傅立葉轉換，並求$Y(\omega)=?$ 與$y(x)=\mathcal{F}^{-1}[Y(\omega)]=?$ **(8%)**

(1)



$$P(\omega)=\mathcal{F}[p(x)]=\int_{-\infty}^{\infty}p(x)e^{-i\omega x}\,dx=\int_{-a}^{a}e^{-i\omega x}\,dx=2\int_{0}^{a}\cos\omega x\,dx=\frac{2\sin(a\omega)}{\omega}$$

(2)

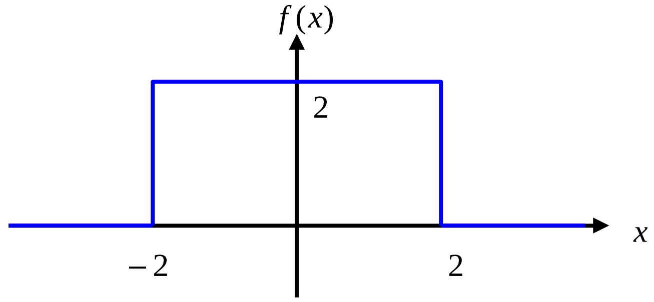


$$\mathcal{F}[x\cdot p(x)]=i\frac{d}{d\omega}P(\omega)=\frac{2i}{\omega^2}[a\omega\cos(a\omega)-\sin(a\omega)]$$

由 $a=2$ 可得 $Q(\omega)=\mathcal{F}[q(x)]=\dfrac{2i}{\omega^2}[2\omega\cos(2\omega)-\sin(2\omega)]$

(3) $g(x)=2[u(x-2)-u(x-6)]$

(4) $f(x-4)=g(x) \;\Rightarrow\; f(x)=g(x+4)=2[u(x+2)-u(x-2)]$



$$F(\omega)=\mathcal{F}[f(x)]=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx=2\int_{-2}^{2}e^{-i\omega x}\,dx=4\int_0^2\cos\omega x\,dx=\frac{4\sin 2\omega}{\omega}$$

(5) $g(x)=f(x-4)$

$$\Rightarrow G(\omega)=\mathcal{F}[g(x)]=\mathcal{F}[f(x-4)]=e^{-i4\omega}\cdot F(\omega)=\frac{4e^{-i4\omega}\cdot\sin 2\omega}{\omega}$$

(6) $\mathcal{F}[f(x)]=F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax}\cdot u(x)e^{-i\omega x}\,dx$

$$=\int_0^{\infty} e^{-(a+i\omega)x}\,dx$$

$$=-\frac{1}{a+i\omega}e^{-(a+i\omega)x}\Big|_0^{\infty}$$

$$=\frac{1}{a+i\omega}$$

(7) $\mathcal{F}[y''(x)+6y'(x)+5y(x)]=\mathcal{F}[\delta(x-3)]$

$$\Rightarrow (i\omega)^2Y(\omega)+6i\omega Y(\omega)+5Y(\omega)=e^{-3i\omega}$$

$$\Rightarrow Y(\omega)=\frac{e^{-3i\omega}}{-\omega^2+6i\omega+5}$$

$$y(x)=\mathcal{F}^{-1}[Y(\omega)]=\mathcal{F}^{-1}[\frac{e^{-3i\omega}}{-\omega^2+6i\omega+5}]=\mathcal{F}^{-1}[\frac{e^{-3i\omega}}{(1+i\omega)(5+i\omega)}]$$

$$=\mathcal{F}^{-1}[\frac{1}{4}(\frac{e^{-3i\omega}}{1+i\omega}-\frac{e^{-3i\omega}}{5+i\omega})]$$

$$=\frac{1}{4}[e^{-(t-3)}u(t-3)-e^{-5(t-3)}u(t-3)]$$

6. (1) 試求 $f(x)=e^{-a|x|}$，其中 $a>0$ 之傅立葉轉換 $F(\omega)$ **(5%)**

(2) 試求 $\mathcal{F}^{-1}[\dfrac{1}{(1+\omega^2)(4+\omega^2)}]=?$ **(8%)**

(1) $f(x)=e^{-a|x|}=\begin{cases} e^{-ax}, & x>0 \\ e^{ax}, & x<0 \end{cases}$

$$F(\omega)=\mathcal{F}[f(x)]=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx$$

$$=\int_{-\infty}^{0} e^{ax}e^{-i\omega x}\,dx+\int_{0}^{\infty} e^{-ax}e^{-i\omega x}\,dx$$

$$=\frac{1}{a-i\omega}e^{(a-i\omega)t}\Big|_{-\infty}^{0}+\frac{-1}{a+i\omega}e^{-(a+i\omega)t}\Big|_{0}^{\infty}$$

$$=\frac{1}{a-i\omega}+\frac{1}{a+i\omega}$$

$$=\frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

(2) 由(1)可知 $\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]=\mathcal{F}^{-1}[\frac{1}{1+\omega^2}]=e^{-|t|}=f(t)$

$$\mathcal{F}^{-1}[G(\omega)]=\mathcal{F}^{-1}[\frac{1}{4+\omega^2}]=\frac{1}{4}e^{-2|t|}=g(t)$$

$$\mathcal{F}^{-1}[\frac{1}{(1+\omega^2)(4+\omega^2)}]=\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)G(\omega)]=f(t)*g(t)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$$

$$=\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t-\tau|}e^{-2|\tau|}\,d\tau$$

If $t>0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t-\tau|}e^{-2|\tau|}\,d\tau=\int_{-\infty}^{0} e^{-(t-\tau)}e^{2\tau}\,d\tau+\int_{0}^{t} e^{-(t-\tau)}e^{-2\tau}\,d\tau+\int_{t}^{\infty} e^{-(\tau-t)}e^{-2\tau}\,d\tau$$

$$=e^{-t}\int_{-\infty}^{0} e^{3\tau}\,d\tau+e^{-t}\int_{0}^{t} e^{-\tau}\,d\tau+e^{t}\int_{t}^{\infty} e^{-3\tau}\,d\tau$$

$$=\frac{1}{3}e^{-t}\cdot e^{3\tau}\Big|_{-\infty}^{0}-e^{-t}\cdot e^{-\tau}\Big|_{0}^{t}-\frac{1}{3}e^{t}\cdot e^{-3\tau}\Big|_{t}^{\infty}$$

$$=\frac{1}{3}e^{-t}-e^{-t}\cdot(e^{-t}-1)+\frac{1}{3}e^{t}\cdot e^{-3t}$$

$$=\frac{4}{3}e^{-t}-\frac{2}{3}e^{-2t}$$

If $t<0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t-\tau|}e^{-2|\tau|}\,d\tau=\int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)}e^{2\tau}\,d\tau+\int_{t}^{0} e^{-(\tau-t)}e^{2\tau}\,d\tau+\int_{0}^{\infty} e^{-(\tau-t)}e^{-2\tau}\,d\tau$$

$$=e^{-t}\int_{-\infty}^{t} e^{3\tau}\,d\tau+e^{t}\int_{t}^{0} e^{\tau}\,d\tau+e^{t}\int_{0}^{\infty} e^{-3\tau}\,d\tau$$

$$= \frac{1}{3}e^{-t}\cdot e^{3\tau}\Big|_{-\infty}^{t} + e^{t}\cdot e^{\tau}\Big|_{t}^{0} - \frac{1}{3}e^{t}\cdot e^{-3\tau}\Big|_{0}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{3}e^{2t} + e^{t}\cdot(1-e^{t}) + \frac{1}{3}e^{t}$$

$$= \frac{4}{3}e^{t} - \frac{2}{3}e^{2t}$$

$$\mathcal{F}^{-1}[\frac{1}{(1+\omega^2)(4+\omega^2)}] = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t-\tau|}e^{-2|\tau|}\,d\tau = \frac{1}{4}(\frac{4}{3}e^{-|t|} - \frac{2}{3}e^{-2|t|}) = \frac{1}{3}e^{-|t|} - \frac{1}{6}e^{-2|t|}$$