0. 預備知識

1. $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

2. $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

3. $\sin mx\cos nx=\frac{1}{2}\left[\sin(m+n)x+\sin(m-n)x\right]$

4. $\sin mx\sin nx=\frac{-1}{2}\left[\cos(m+n)x-\cos(m-n)x\right]$

5. $\cos mx\cos nx=\frac{1}{2}\left[\cos(m+n)x+\cos(m-n)x\right]$

6. $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ (尤拉公式)

7. $\int x\cos bxdx=\frac{x}{b}\sin bx+\frac{1}{b^2}\cos bx+C$

8. $\int x\sin bxdx=-\frac{x}{b}\cos bx+\frac{1}{b^2}\sin bx+C$

9. $\int x^2\cos bxdx=\frac{x^2}{b}\sin bx+\frac{2x}{b^2}\cos bx-\frac{2}{b^3}\sin bx+C$

10. $\int x^2\sin bxdx=-\frac{x^2}{b}\cos bx+\frac{2x}{b^2}\sin bx+\frac{2}{b^3}\cos bx+C$

11. $\int e^{ax}\cos bxdx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left[a\cos bx+b\sin bx\right]+C$

12. $\int e^{ax}\sin bxdx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left[a\sin bx-b\cos bx\right]+C$

13. $\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nxdx=0 \quad (m\neq\pm n)$

14. $\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nxdx=0 \quad (m\neq\pm n)$

15. $\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nxdx=0 \quad (m\neq\pm n)$

16. $\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos mxdx=0$

17. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin mx dx = \pi$

18. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos mx dx = \pi$

19. $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \qquad x \in R$

20. $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \qquad x \in R$

21. $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \qquad x \in R$

22. $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + \cdots + x^n + \cdots \qquad -1 < x < 1$

23. $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + \cdots \qquad -1 < x \le 1$

什麼是級數?

大學時期學習到的級數有泰勒級數(Taylor series)、傅立葉級數(Fourier series)以及洛倫級數(Laurent series)，但像是泰勒級數和洛倫級數這種冪級數型式的展開式是體現不出週期性的。

1. 週期函數

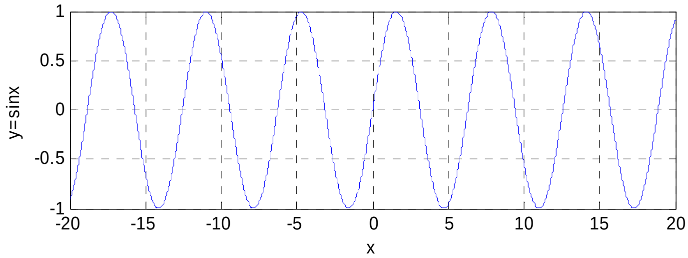
$$f(x+T) = f(x) \quad (T\text{ 為常數}) \tag{1}$$

週期的定義:

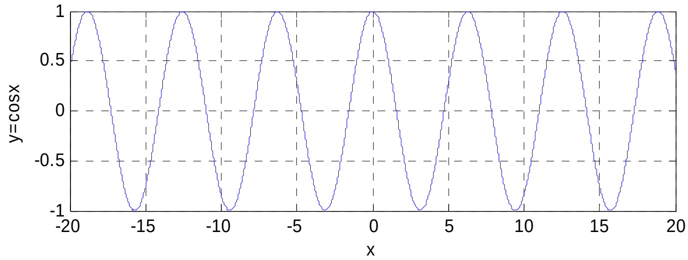
(i) 滿足(1)式的T值中的最小正數，即為該函數的週期。

(ii) 一個常數以任何正數為週期

例：$\sin x$ 和 $\cos x$ 為週期 2π 之函數。$(0\sim 2\pi$ 或 $-\pi\sim\pi)$



$y=\sin x$



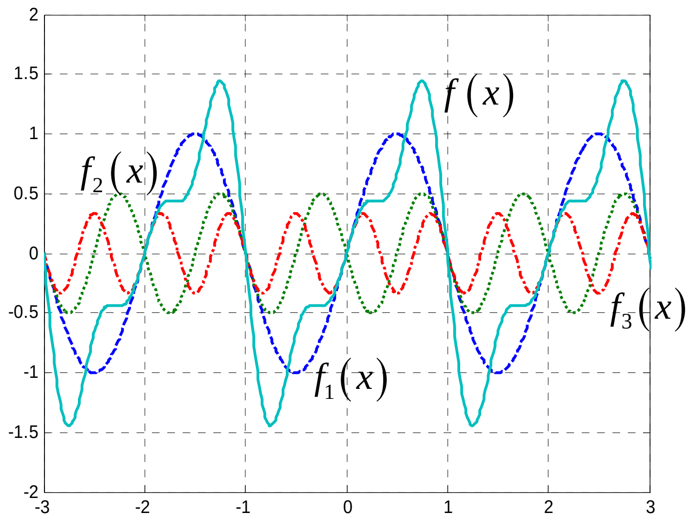
$y=\cos x$

2. 基本三角函數系

$$1\,,\cos\frac{\pi x}{\ell}\,,\sin\frac{\pi x}{\ell}\,,\cos\frac{2\pi x}{\ell}\,,\sin\frac{2\pi x}{\ell}\,,\cdots,\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,,\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,,\cdots \qquad (2)$$

例如 $\cos\dfrac{n\pi x}{\ell}$ 和 $\sin\dfrac{n\pi x}{\ell}$ 的週期為 $\dfrac{2\ell}{n}$，但它們的共同週期為 2ℓ，即所有週期的最小公倍數，通常這個週期命名為函數系的週期。

例：$f(x)=f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)=\sin\dfrac{\pi}{1}x-\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{2\pi}{1}x+\dfrac{1}{3}\sin\dfrac{3\pi}{1}x$



3. 傳立葉級數(Fourier series)

逆問題:

如果給定一個週期為2ℓ的任意週期函數 $f(x)$，

$$f(x+2\ell)=f(x) \tag{3}$$

我們能否將它表示成簡單的三角函數(有限個或無限個)之合呢? 即:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{\ell}x+b_n\sin\frac{n\pi}{\ell}x\right) \tag{4}$$

如果能實現這種分解，那麼對許多複雜的函數就可以通過簡單的三角函數來研究其性質。

上述問題的答案是肯定的，且稱(4)式為函數 $f(x)$ 的**傳立葉級數**(狹義傳立葉級數)。

若函數 $f(x)$ 按非三角函數系 $\{\phi_n(x)\}(n=1,2,3...)$ 進行展開所得的級數稱為廣義傳立葉展開。

但首先需要解決兩個問題:

(i) 在什麼條件下 $f(x)$ 才能按基本三角函數系展開?

(ii) 如何確定展開式中的係數? 即 $a_0,a_1,...b_0,b_1...$。

4. 完備正交函數系

討論一週期型 Sturm-Liouville 邊界值問題

$y''+\lambda y=0$ ，$x\in[d,d+2\ell]$，$y(d)=y(d+2\ell)$ ，$y'(d)=y'(d+2\ell)$

經由完備正交系的討論可得:

在區間$[-\ell,\ell]$ 的函數系$\left\{1,\cos\frac{n\pi}{\ell},\sin\frac{n\pi}{\ell}\right\}_{n=1}^{\infty}$ 為一組正交函數序列，於是，$f(x)$ 按基本三角函數系的展開式為第(4)式，其中係數

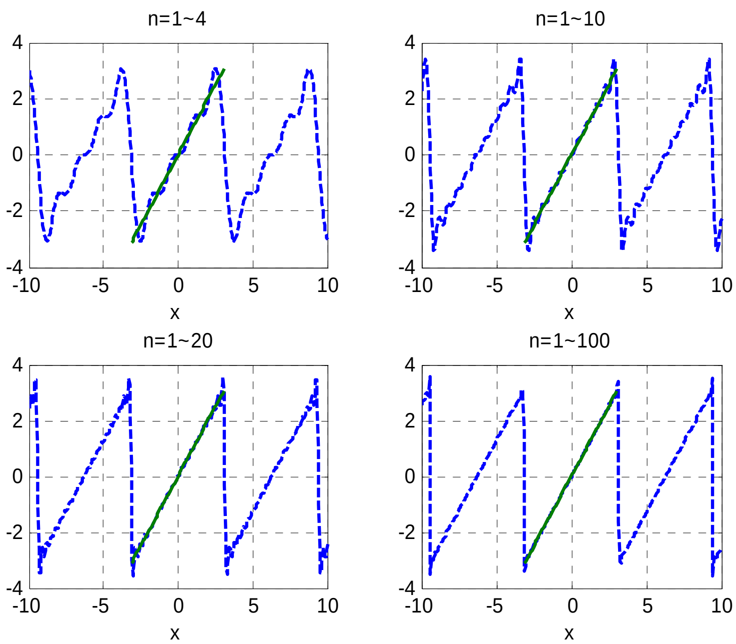
$$a_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\cos\frac{n\pi}{\ell}xdx \quad n=0,1,2,3,\cdots \tag{5}$$

$$b_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}xdx \quad n=1,2,3,\cdots \tag{6}$$

Example 13.1

$f(x)=x$ ， $-\pi\le x\le\pi$ ，試展成傅立葉級數。

Ans: $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\sin nx \quad x \text{ on } [-\pi,\pi]$

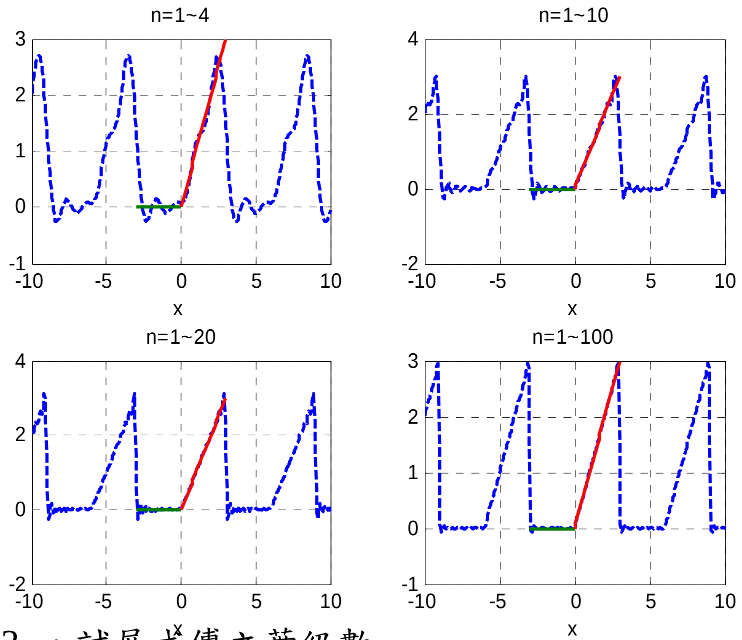


Example 13.2

$$f(x)=\begin{cases}0 & -3\le x\le 0\\ x & 0\le x\le 3\end{cases}$$ ，試展成傅立葉級數。

Ans:

$$f(x)=\frac{3}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n-1\right]\cos\frac{n\pi x}{3}+\frac{3}{n\pi}(-1)^{n+1}\sin\frac{n\pi x}{3}\right)\quad x \text{ on } [-3,3]$$

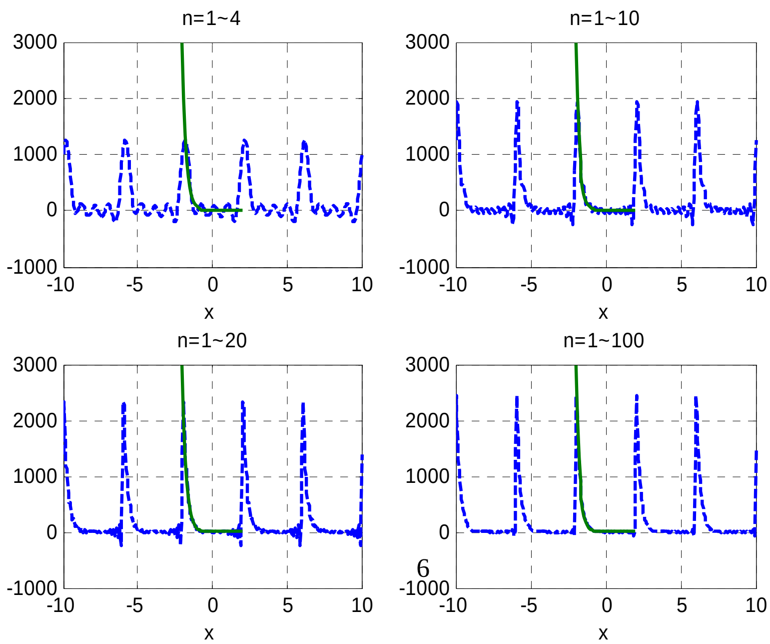


Example 13.3 ，試展成傅立葉級數。

$$f(x)=e^{-4x}\quad ,\quad -2\le x\le 2$$

Ans:

$$f(x)=\frac{1}{16}\left(e^{8}-e^{-8}\right)+\left(e^{8}-e^{-8}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{8(-1)^n}{64+n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}+\frac{n\pi(-1)^n}{64+n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\right)\quad x \text{ on } [-2,2]$$



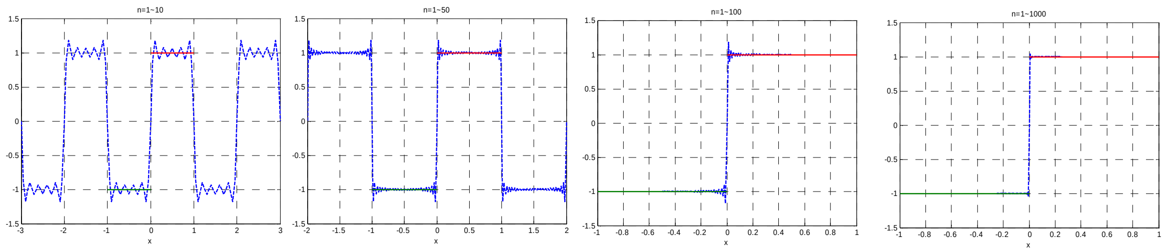
5. 吉布斯現象(The Gibbs Phenomenon)

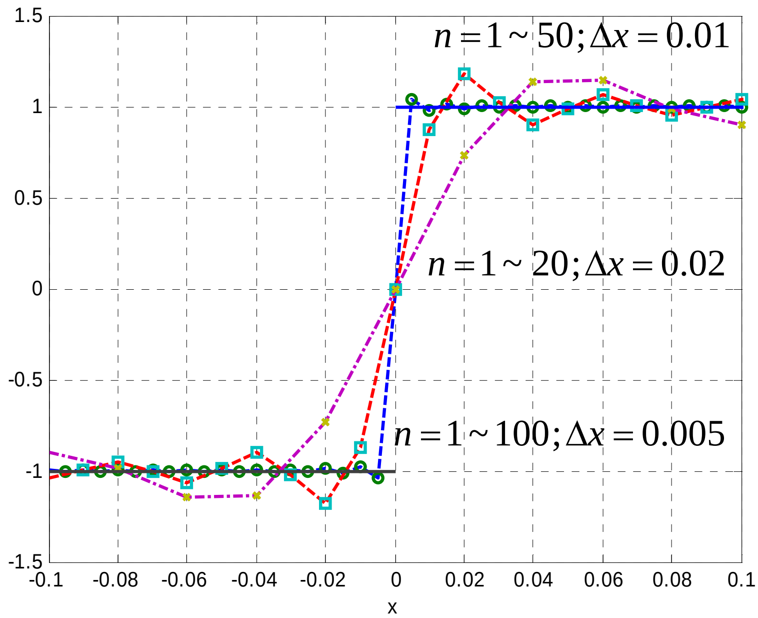
考慮方波 $f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 1\\ -1 & -1\le x\le 0\end{cases}$，

可得 $f(x)=\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x \quad x \text{ on } [-1,1]$，即使 n 趨近無窮大，

誤差項在不連續處總是存在，且超出幅度約 18%，稱為吉布斯現象。

後來就部分和在間斷點附近的異常行為稱為吉布斯現象。





6. 傅立葉級數的性質

收斂性: 狄利克雷定理(Dirichlet's theorem)

(i) 若 $f(x)$ 在 $[-\ell,\ell]$ 上連續或者只有有限個間斷點，且在間斷處函數的左右極限都存在。

(ii) $f(x)$在$[-\ell,\ell]$上只有有限個極大值點與及小值點。

((i)(ii)表 $f(x)$ 為片段連續，可進行積分。)

(iii) 積分$\int_{-\ell}^{\ell}|f(x)|dx$為有限值。(保證$a_n$與$b_n$存在。)

(iv) $f(x)$在$[-\ell,\ell]$外是週期函數，其週期為2ℓ，則級數

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{\ell}x+b_n\sin\frac{n\pi}{\ell}x\right)=\begin{cases} f(x) & ,\text{在連續點處} \\ \frac{1}{2}\left[f(x^+)+f(x^-)\right] & ,\text{在間斷點處} \end{cases}$$

Example 13.6

$$f(x)=\begin{cases} 5 & x=\pi \\ x & -\pi<x<1 \\ 1-x^2 & 1\le x<2 \\ 4 & 2\le x\le\pi \end{cases}$$

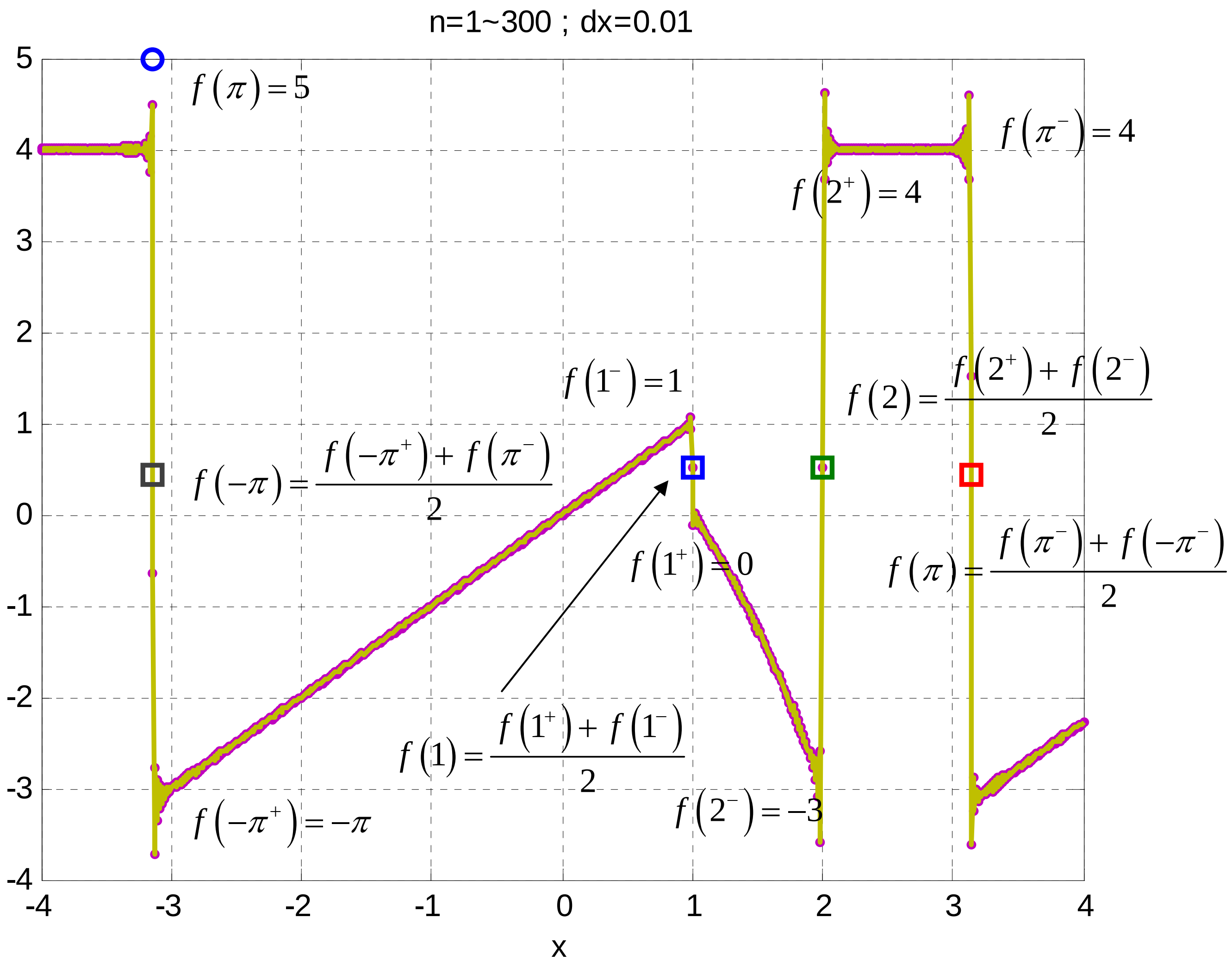
展成傅立葉級數:

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\left(4\pi-\frac{\pi^2}{2}-\frac{53}{6}\right) ,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}(-1)^{n+1}+\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n^3}\right)\sin n+\frac{3}{n^2}\cos n+\left(\frac{2}{n^3}-\frac{7}{n}\right)\sin 2n-\frac{4}{n^2}\cos 2n\right]$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{\pi}{n}+\frac{4}{n}\right)(-1)^{n+1}+\frac{3}{n^2}\sin n+\left(\frac{2}{n^2}-\frac{1}{n}\right)\cos n-\frac{4}{n^2}\sin 2n+\left(\frac{7}{n}-\frac{2}{n^3}\right)\cos 2n\right]$$



Example 13.7

Example 13.8

Example 13.11

7. 奇函數(odd function)與偶函數(even function)

(i) 奇函數

特徵:$G(x)=-G(-x)$ (7)

故可知在區間$[-\ell,\ell]$上的奇函數可寫為

$$G(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}$$

其中 $a_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}G(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx=0\quad(n=0,1,2,3\cdots)$

$b_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}G(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx=\frac{2}{\ell}\int_{0}^{\ell}G(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx\quad(n=1,2,3\cdots)$

且$G(0)=G(\ell)=0$

奇函數的傅立葉級數中只含正弦項，且$x=0$及$x=\ell$兩端級數收斂為 0。

(ii) 偶函數

特徵:$F(x)=F(-x)$ (8)

故可知在區間$[-\ell,\ell]$上的偶函數可寫為

$$F(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}$$

其中

$a_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}F(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx=\frac{2}{\ell}\int_{0}^{\ell}F(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx\quad(n=0,1,2,3\cdots)$

$b_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}F(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx=0\quad(n=1,2,3\cdots)$

且$F'(0)=F'(\ell)=0$

偶函數的傅立葉級數中只含餘弦項，且 $x=0$ 及 $x=\ell$ 兩端級數的導數收斂為 0。

(iii) 四則運算

$E \pm E \Rightarrow E$ ， ，$O \pm O \Rightarrow O$ ， $E \pm O \Rightarrow \times$

$E \div E \Rightarrow E$ ， ，$O \div O \Rightarrow E$ ， $E \div O \Rightarrow O$

$E \times E \Rightarrow E$ ， ，$O \times O \Rightarrow E$ ， $O \times E \Rightarrow O$

Example 13.4
Example 13.5

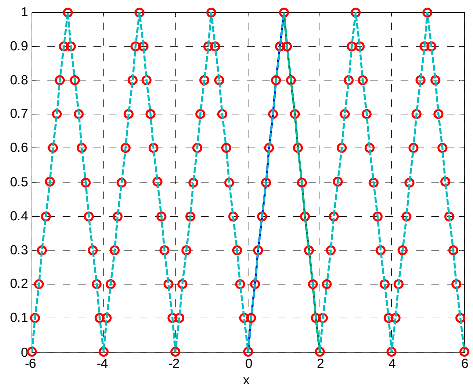
8. 有限區間上的函數的傅立葉級數

現在函數 $f(x)$ 定義在 $[0,\ell]$ 區間上，而在端點和端點之外沒有定義，

考慮 $f(x)=\begin{cases} x & 0<x<1 \\ 2-x & 1<x<2 \end{cases}$

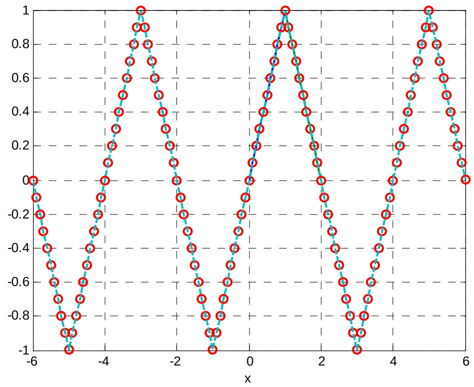
(i) 傅立葉餘弦展開(Fourier cosine series)

$$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left[2(2n-1)\right]^2}\cos(2n-1)\pi x$$



(ii) 傅立葉正弦展開(Fourier sine series)

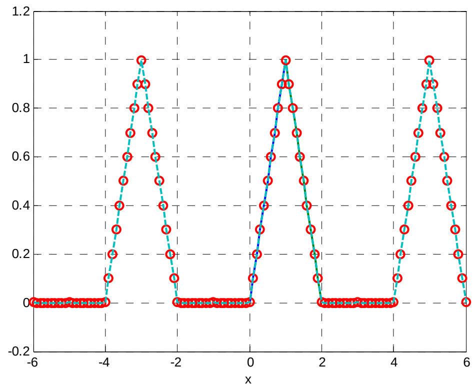
$$f(x)=\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2}$$



(iii) 其它方式

$$f(x)=\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-8}{\left[2\pi(2n-1)\right]^2}\cos(2n-1)\pi x+\frac{4}{\left[\pi(2n-1)\right]^2}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2}$$

可見給 $f(x)$ 在 $[0,\ell]$ 區間之外賦予不同的定義，可以得到不同的傅立葉級數，也就是說，這種問題不能得到唯一解。

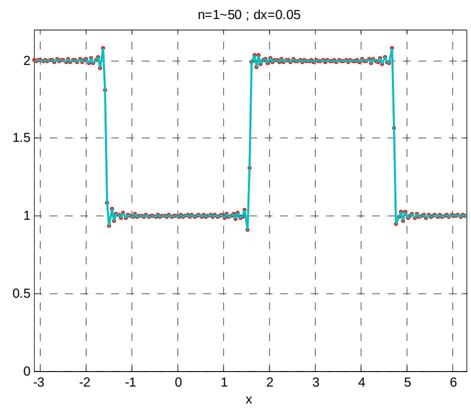


Example 13.20 ，試展成傅立葉級數。

$$f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le \pi/2\\ 2 & \pi/2\le x\le \pi\end{cases}$$

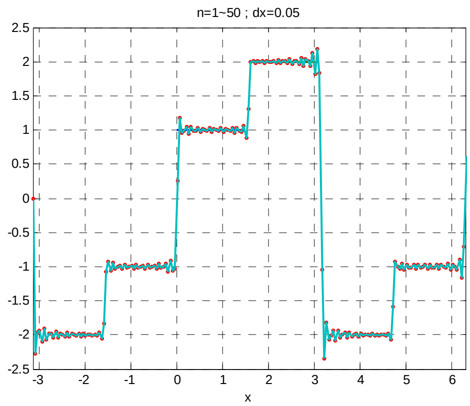
Fourier cosine series

$$f(x)=\frac{3}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n}\cos nx$$



Fourier sine series

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)+1-2(-1)^n\right)\sin nx$$



9. 傳立葉級數的微分與積分

(i) 微分

考慮三角波 $f(x)=|x| \quad -\ell<x<\ell$

其傅立葉級數為 $f(x)=\dfrac{\ell}{2}-\dfrac{4\ell}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2}\cos\dfrac{(2n+1)\pi x}{\ell}$

收斂相當快速且在區間$[-\ell,\ell]$上一致收斂，對上式逐項微分

得 $f'(x)=h(x)=\dfrac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)}\sin\dfrac{(2n+1)\pi x}{\ell}$

正是方波$h(x)=\begin{cases}1 & 0<x<\ell \\ -1 & -\ell<x<0\end{cases}$的傅立葉級數，事實上，三角波的導數正是方波，但是微分之後每一個係數前面增添了一個增長因子，因此降低了收斂程度。也有可能微分之後成為一個發散級數，一般而言，微分使級數的收斂程度降低。

(ii) 積分

函數 $f(x)$ 在$[0,\ell]$區間上分段連續，則

$$\int_{-\ell}^{x}\left[f(t)-\frac{a_0}{2}\right]dt=\frac{-1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell}\xi f(\xi)\,d\xi+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ell}{n\pi}\left(a_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}-b_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}\right) \tag{9}$$

(iii) Bessel inequality:

$$\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)^2\,dx\geq\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{n=1}^{N}\left(a_n^2+b_n^2\right) \tag{10}$$

(iv) Parserval's theorem

$$\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)^2 dx = \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) \tag{11}$$

10.複指數型式的傅立葉級數

利用尤拉公式可得

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi}{\ell}x} \tag{12}$$

$$c_n = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x) e^{-i\frac{n\pi}{\ell}x} dx \tag{13}$$

11.傅立葉級數的應用

(i) 頻譜分析: 不僅可應用於電路,還可應用於無線電波、光波以及聲波等。

(ii) 計算無窮級數:

例:由 $h(x)=\begin{cases}1 & |x|<\pi/2 \\ 0 & \pi/2<|x|<\pi\end{cases}$,可得 $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots=\frac{\pi}{4}$

(iii) 能表示不連續函數: 如矩形波。

(iv) 能表示週期函數: 但注意可能不是唯一展開型式。

(v) 能對任意函數做調和分析: 如將週期性強迫力的振動系統分析,則很容易求得各分量(三角函數)的反應,再疊加即可。