Fourier transform

海大河海系　　　陳正宗

Fourier 積分式

Fourier 積分是非週期性函數的 Fourier 展開式。當非週期性函數 $f(x)$ 為分段連續，且 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx$ 存在時

$$\int_0^{\infty} [\, A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x \,]\, d\omega = \begin{cases} f(x) & x \text{ 為連續點} \\ \frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)] & x \text{ 為跳躍點} \end{cases} \tag{1}$$

其中 $A(\omega) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x\, dx,\ B(\omega) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x\, dx,$ 此稱為 Fourier 全三角積分式。

I. 如 $f(x)$ 具對稱性，則 $A(\omega)$ 與 $B(\omega)$ 中有一個為零。

(1) $f(x) = f(-x)$ 時，得 $B(\omega) = 0$

$$\Rightarrow f(x) = \int_0^{\infty} A(\omega)\cos\omega x\, d\omega, \quad \text{其中 } A(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(x)\cos\omega x\, dx$$

此稱為 Fourier 餘弦積分。

(2) $f(x) = -f(-x)$ 時，得 $A(\omega) = 0$

$$\Rightarrow f(x) = \int_0^{\infty} B(\omega)\sin\omega x\, d\omega, \quad \text{其中 } B(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(x)\sin\omega x\, dx$$

此稱為 Fourier 正弦積分。

II. 複數型 Fourier 積分：

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega x}\, d\omega, \quad \text{其中 } F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx \tag{2}$$

III. Fourier 積分之 Parseval's 恆等式：

$$\text{實數型：} \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)\, dx = \int_0^{\infty} [\, A^2(\omega) + B^2(\omega) \,]\, d\omega \tag{3}$$

$$\text{複數型：} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\, d\omega \tag{4}$$

IV. Fourier 級數展開與 Fourier 積分之不同在於：

(1) 前者是對週期函數，後者是對無週期或只有一週期之函數；

(2) 前者是斷續頻相加，後者是連續頻相加。