Example for Fourier transform

海大河海系　　陳正宗

例題

設 $f(t)=\begin{cases} 0.5 & , \ t>0 \\ -0.5 & , \ t<0 \end{cases}$

(1)求 $f(t)$ 的 Fourier 轉換？並說明為何沒有實部。

(2)利用(1)之結果，求 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\omega}{\omega}\, d\omega = ?$

(3)利用 Parseval 定理，求 $\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{1}{a+ib\omega}\right|^2 d\omega = ?$ 其中 $a,\ b$ 為常數

(4)利用留數定理，求 $\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{1}{a+ib\omega}\right|^2 d\omega = ?$

(5)若(3)與(4)之結果相同，請說明其物理意義。　　（　海洋河工）

解　(1)利用 Fourier 轉換之定義

$$
\begin{aligned}
F(\omega) = \mathscr{F}\{\, f(t)\,\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} (-0.5)\, e^{-i\omega t}\, dt + \int_{0}^{\infty} (0.5)\, e^{-i\omega t}\, dt \\
&= 2\,(0.5) \int_{0}^{\infty} e^{-i\omega t}\, dt = \left.\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega}\right|_{0}^{\infty} = \frac{1}{i\omega}
\end{aligned}
$$

沒有實部乃因 $f(t)$ 為奇函數。

(2)利用逆 Fourier 轉換之定義

$$
\begin{aligned}
f(t) = \mathscr{F}^{-1}\{\, F(\omega)\,\} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{i\omega}\, e^{i\omega t}\, d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\omega t + i\sin\omega t}{i\omega}\, d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[(-i)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\omega t}{\omega}\, dt + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\omega t}{\omega}\, d\omega\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\omega t}{\omega}\, d\omega
\end{aligned}
$$

$$\text{（因 } \frac{\cos\omega t}{\omega} \text{ 為奇函數，} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\omega t}{\omega} = 0\text{）}$$

上式中取 $t=1$，則得 $0.5 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\omega}{\omega}\, d\omega$

於是 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\omega}{\omega}\, d\omega = \pi$

(3)取 $g(t)=\begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{a}{b}t}}{b} & ,\ t>0 \\ 0 & ,\ t<0 \end{cases}$ $(b\neq 0)$，則

$$\begin{aligned}
G(\omega) &= \mathscr{F}\{\, g(t)\,\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{a}{b}t}}{b}\, e^{-i\omega t}\, dt \\
&= \frac{1}{b}\int_0^{\infty} e^{-(\frac{a}{b}+i\omega)\,t}\, dt = \frac{1}{b}\, \frac{e^{-(\frac{a}{b}+i\omega)\,t}}{-\frac{a}{b}-i\omega}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{b}\,\frac{1}{\frac{a}{b}+i\omega} \\
&= \frac{1}{a+ib\omega}
\end{aligned}$$

亦即 $\dfrac{1}{a+ib\omega}$ 是 $g(t)$ 的 Fourier 轉換。

代入 Fourier 轉換的 Parseval 定理：

$$\int_0^{\infty} g^2(x)\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |G(\omega)|^2\, d\omega$$

$$\begin{aligned}
\text{得}\ \int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{a+ib\omega}\right|^2 d\omega &= 2\pi\int_0^{\infty}\left|\frac{e^{-\frac{a}{b}t}}{b}\right|^2 dt = \frac{2\pi}{b^2}\int_0^{\infty} e^{-\frac{2a}{b}t}\, dt \\
&= \frac{2\pi}{b^2}\,\frac{e^{-\frac{2a}{b}t}}{-\frac{2a}{b}}\Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{ab}
\end{aligned}$$

(4)因 $\left|\dfrac{1}{a+ib\omega}\right|^2 = \dfrac{1}{a^2+b^2\omega^2}$，故

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{a+ib\omega}\right|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{a^2+b^2\omega^2}\, d\omega$$

而根據留數定理

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\, dx = 2\pi i \sum_{\substack{\text{upper}\\ \text{plane}}} \operatorname{Res}\{\, h(z)\,\}$$

所以

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{a^2+b^2\omega^2}\, d\omega &= 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i\frac{a}{b}}\ \frac{1}{a^2+b^2z^2} = 2\pi i\,\frac{1}{2abi} \\
&= \frac{\pi}{ab}
\end{aligned}$$

(5)其物理意義是能量守恒。