

**國立台灣海洋大學河海工程學系工程數學(二) 2B 班第二次小考
參考解答**

1. 給定一常微分方程式,

$$y''(t) + y(t) = \sin(t) \quad (1)$$

初始條件為 $y(0) = 0, \dot{y}(0) = 0$, 試用 Laplace 轉換求解 $y(t)$. (50%)

ANS

將(1)式做拉式轉換

$$s^2 Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) + Y(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$$

$$\text{整理可得 } Y(s) = \frac{1}{(s^2 + 1)^2} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{s^2 + 1} - \frac{s^2 - 1}{(s^2 + 1)^2} \right]$$

$$\text{因此逆轉換可得 } y(t) = \frac{1}{2} [\sin(t) - t \cos(t)]$$

2. 將一常微分方程式,

$$t^2 \ddot{y}(t) - 4t\dot{y}(t) + 6y(t) = 0 \quad (2)$$

做 Laplace 轉換, 則

(1) $Y(s)$ 需滿足何式? (10%)

(2) 上式是多項式或微分方程式? (10%)

(3) 求解 $Y(s)$ 。 (15%)

(4) 求解 $y(t)$ 。 (15%)

ANS

$$L\{t^2 \ddot{y}(t)\} = s^2 Y''(s) + 4sY'(s) + 2Y(s)$$

$$L\{t\dot{y}(t)\} = -[sY'(s) + Y(s)]$$

$$L\{y(t)\} = Y(s)$$

$$(1) \quad s^2 Y''(s) + 8sY'(s) + 12Y(s) = 0$$

(2) 微分方程式。

$$(3) \quad Y(s) = c_1 s^{-3} + c_2 s^{-4}$$

$$(4) \quad y(t) = c_3 t^2 + c_4 t^3$$