



常微分方程式

——線性及非線性

J. K. Hale & J. P. Lasalle 著

李志豪 譯

本文節譯自 Abbott 所編輯 The Chauvenet Papers 書中 Hale 及 Lasalle 的文章：Differential Equations : Linearity vs. Non-Linearity.

1. 前 言

人們爲了分析自然現象或人造的系統往往需要數學的模式。微分方程式是有用的模式，它在力學、生物、經濟、電路及自動控制的應用極爲重要。就如同 Lefschetz 所說——微分方程是應用數學的基石 (cornerstone)。微分方程的錯綜複雜的歷史起於 1690 牛頓及 Leibniz 時代，從此微分方程的理論成爲世界上最偉大數學家的挑戰，也刺激現代數學的發展。

早期數學家主要找尋微方的明確的公式解，這些方程式由牛頓運動定律導出的。數學家所發現的少數解有深入的科學及技術的含義，它們是力學及物理發展的基石。

在理想情形下，人們希望微方都有明確的公式解，但很快數學家發現這是不可能的。所以數學家轉而尋求微方定性的理論。

在這方面定性問題的真正進展始於上一個世紀末——這是法國的 Henri Poincare 及俄國的 Alexander Mikhailovich Liapunov 的工作。大部分微方現代的理論可以溯源到這兩位數學家。Liapunov 的工作形成一個微方的學派而在俄國開花結果，而大部分美國數學家的的工作可以追溯到 Poincare 的訓練。

Poincare 主要處理微方解的幾何性質及計算特別解的技巧。另一方面，Liapunov 則是尋求微方解的穩定性而不去解微方。Poincare 除了對微方有大貢獻外，也刺激今日數學的許多發展。Liapunov 的貢獻是對穩定性及自動控制的定量及定性的了解。

由於高速的計算機能解許多問題，也許有人會問是否仍有微方的問題待解決。這答案很簡單。如果我們祇想知道一個特殊解的資料，這時計算機是適合的。但往往我們想知道所有解的定性性質，及一些在微方本身微擾 (Perturbation) 之下不變的性質。進而言之，在一些設計的問題，工程師要在無窮多的系統中選擇有特別性質的。例如說，工程師可能找尋

一種系統，不管初期條件如何，長時間後的行為相同。工程師也可能遇到要分類出所有具有相同定性行為的系統。

這並不是說今日微方能完全的滿足工程的需要。微方祇是一種理想化的數學模式，而在大部分的情形，微方本身並不能被精確的了解。更何況，人們不能預測那一種微擾會影響實際的系統。所以必須討論模式的精確性。任何具有特殊功能的系統必須在各種微擾下保持穩定。

有些微方我們可能找到一般解，這包括所謂線性方程式。一般的解是有限個特殊解的線性組合。這個事實也可說明線性微方的簡易及適用的限度。

幾乎沒有一個系統是線性的，而線性祇是一種近似的系統。這篇文章的目的是指出線性逼近的限度及一些新而有趣的非線性的現象。自然的現象往往是非線性的。事實上人們也可利用非線性性質去改進一些機密的功能為人們服務。

2. 幾何的分析

幾何的觀點有助於得到微方解的定性的資料。我們先從牛頓第二運動定律開始——這定律的數學描述是一微方。我們考慮最簡單的直線運動的情形。在時間 t 的位置是 $x(t)$ ，或寫成 x 。 $\frac{dx}{dt}$ 是速度， $\frac{d^2x}{dt^2}$ 是加速度。為了方

便我們也用牛頓的符號 \dot{x} 表示 $\frac{dx}{dt}$ ， \ddot{x} 表示

$\frac{d^2x}{dt^2}$ 。力可能與質點的位置及速度有關，所以我們記成 $f(x, \dot{x})$ 。牛頓第二運動定律可以敘述成

$$m\ddot{x} = f(x, \dot{x})$$

質量乘以加速度等於作用在質點的力。為了簡

單起見令 $m = 1$ 。質點的運動方程變成

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}) \quad (1)$$

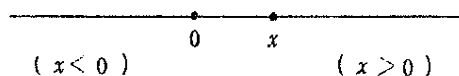


圖 1

忽略大氣的作用，在地球表面單位質點的自由落體運動方程式為

$$\ddot{x} = -g \quad (2)$$

在此 g 是重力加速度。

在地球表面，重力加速度 g 可以假設為常數。如果我們知道初期 ($t = 0$) 的位置 x_0 及速度 y_0 ，則在時間 t

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -gt + y_0 \\ x &= -\frac{1}{2}gt^2 + y_0t + x_0 \end{aligned} \quad (3)$$

這是方程式的解。自由落體的定律是 Galileo 在 Pisa 斜塔所驗證的。

為了解 Poincare 及 Liapunov 的幾何觀點，我們引進新的符號 y 來代替 \dot{x} 。則 $\dot{y} = \ddot{x}$ ，那麼方程式(1) (有二次微分) 可以表成兩個祇有一次微分的方程式

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= f(x, y) \end{aligned} \quad (4)$$

寫成更一般化，則

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p(x, y) \\ \dot{y} &= q(x, y) \end{aligned} \quad (5)$$

在物理的問題， (x, y) 描述系統的狀態——質點的位置及速度。所以如果我們引進坐標系 (圖 2) 平面上每一點 (x, y) 代表系統的狀態。這個平面有時叫相平面 (phase plane)。我們可以視此方程式定出一個向量場，當方程式給定。我們可以知道每一點流 (flow) 的速度 (圖 2)。速度的水平分量是 $p(x, y)$ ，垂直分量是 $q(x, y)$ 。流的速度 (與系統本身的速度又不同) 可以表成一個向量 $V = (p(x, y), q(x, y))$ 。有了向量場我們就可考慮通過每一點的積分

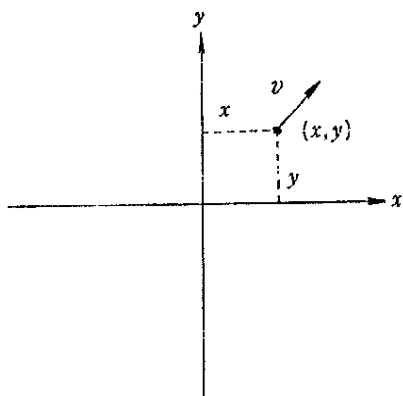


圖 2

曲線。(即求曲線上每一點的切線與 p, q 的方向平行)

因為這種看法非常重要。讓我們看一些例子。令 $\dot{y} = x$ 自由落體的方程式 (方程式 2) 為

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -g \end{cases}$$

這裡在每一點 (x, y) 的向量水平分量為 y ，垂直分量為一個常數。如果起始點是 (x_0, y_0) ，方程式的解為

$$\begin{cases} y = -gt + y_0 \\ x = -\frac{1}{2}gt^2 + y_0t + x_0 \end{cases}$$

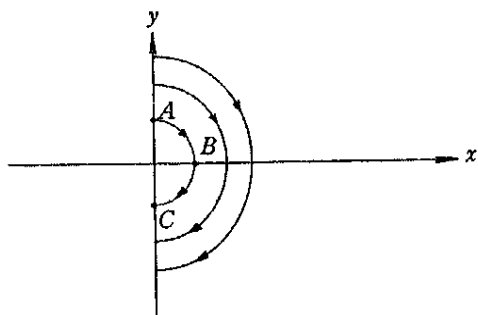


圖 3

這個解的圖形是一拋物線。在圖 3 的箭頭顯示時間增加時流 (flow) 的方向。這個流指述這個系統狀態的變化。假設初期的位置是在圖 3 的 A 點。這個質點運動始於地球表面 ($x = 0$) 初期的速度是向上 (y_0 為正)。從圖 3

可以看出在到達 B 的狀態之前，質點上升 (x 漸增) 及速度漸減。在 B 這個質點達到最大的高度。而瞬間停止 ($y = 0$) 然後開始下落。這時速度 y 變為負 (質點向下運動) 而與地面的位移 x 漸減。C 表示這個質點到達地面。

我們很快的看第二個重要的例子。這個是與一個彈簧連接的質點運動 (圖 4)，也就是所謂的簡諧運動 (Simple harmonic oscillator)。運動的方程式為

$$\ddot{x} + x = 0 \tag{6}$$

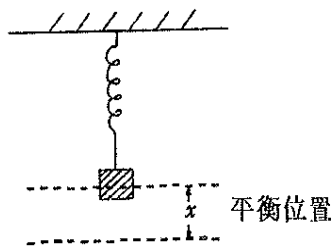


圖 4

這裡不會考慮量度的單位所以假設質點質量為 1，彈性係數為 1。這裡 x 表示質點與平衡位置的位移。令 $\dot{x} = y$ ，方程式(6)成為

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

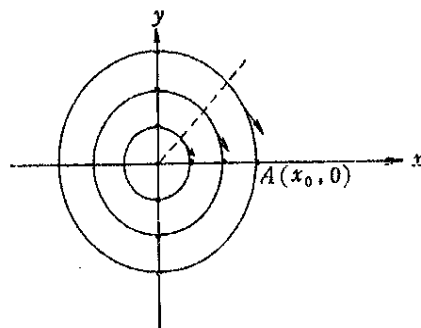


圖 5

在每一點的流向與從原點到該點的直線垂直，所以我們知道解是一個以原點為中心的圓，並且是順時針方向。這些結論可直接由方程式得知。因為

$$\frac{d}{dt}(x^2 + y^2) = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 2xy - 2xy = 0$$

解上的每一點與原點距離不變。對這個例子這也就是說系統的能量守恆。

在 A 質點有最大的位移。因為流的速度為

$$\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = r$$

為圓的半徑。振動 (oscillation) 的週期為 2π 。這個週期與振幅無關。這個方程式也是接近鐘擺 (pendulum) 的微小振動。週期與振幅無關這個事實是伽利略年輕時在 Pisa 的教堂觀察燈的擺動發現的。

幾何的觀點對於了解微方的幾何或定性的理論是基本的。在這種看法人們不去找微方的一般解 (可能非常困難找到)，而直接得到儘可能所有解的性質。這種看法在上面簡諧運動的例子中已說明了。雖然這個方程式可以輕易解出 (這是線性的問題)，我們得到所有振動的資料而不需要去解這個微分方程。(在此處微方的解，積分曲線，流，是同義。)

3. 線性方程式的性質

為了解線性與非線性微方的差異，我們必須先詳細討論方程式(5)的 $p(x, y)$, $q(x, y)$ 為線性的情形。即是下列的方程式

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + by \\ \dot{y} &= cx + ay \end{aligned} \quad (7)$$

這裡 a, b, c, d 為實數。

在方程式(7)，我們很容易找出兩個獨立的特別解，而一般解為此兩個特別解的線性組合。其他的線性的性質是解在 $(0, 0)$ 附近的行為可以預測解在整個相平面 (Phase Plane) 的行為。其他兩個線性的性質是在所有時間 t , $x(t)$, $y(t)$ 皆有定義同時沒有孤立的週期解 (看上一節簡諧運動的例子)。

在方程式(7)，如果 $(x_1(t), y_1(t))$ 及 $(x_2(t), y_2(t))$ 為解，則對任意常數 c_1, c_2 , $(c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t), c_1 y_1(t) +$

$c_2 y_2(t))$ 也是一個解。這種性質即是疊合 (superposition) 原理。我們可以很容易驗證疊合原理為線性微方時有的性質。換句話說，如果方程式(5)有疊合的性質，則 $p(x, y)$ 及 $q(x, y)$ 必須是線性的。

這個原理使我們可以找到微方(7)的所有解。事實上，假設 $(x_1(t), y_1(t))$, $(x_2(t), y_2(t))$ 為方程式(7)的兩個解，而其中 $(x_1(0), y_1(0))$ 及 $(x_2(0), y_2(0))$ 為線性獨立。所以對任何 u, v 我們有

$$\begin{aligned} c_1 (x_1(0), y_1(0)) + c_2 (x_2(0), y_2(0)) \\ = (u, v) \end{aligned}$$

如果 $(x(t), y(t))$ 是方程式(7)的解而且滿足初值條件 $x(0) = u, y(0) = v$ ，則

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \\ y(t) &= c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) \end{aligned}$$

對所有 t 成立。因為在 $t = 0$ 這個等式成立，而通過 $(x(0), y(0))$ 這一點的解僅有一個。所以結論為：要解微分方程(7)，祇要找出兩個線性獨立的解。

如果 λ 為 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的固有值，而 $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

為對應的固有向量，即

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} \\ = \lambda^2 - \lambda(a + d) + ad - bc \\ = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

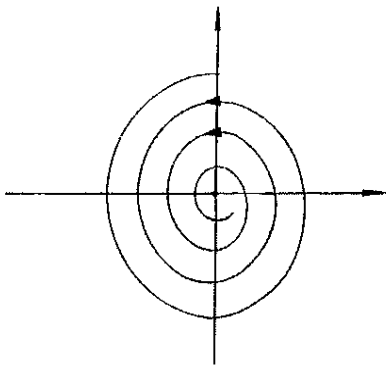
則 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ 為方程式(7)的解。如果(8)有相異的根 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1 \neq \lambda_2$ ，則方程式有兩個這個形式的獨立解。如果(8)有重根，則我們可能要考慮

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{\lambda t} \cdot \left\{ u + t \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} u \right\}$$

的形式。不管如何，這個微方的解 $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ ，其中的 t 為所有實數，不受限制。

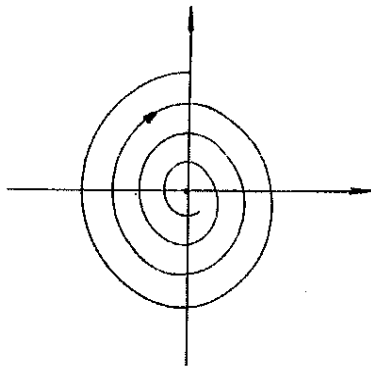
在下列的情式下我們繼續討論微方(7)

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - 2\rho y, \rho^2 - 1 \neq 0 \end{cases} \quad (9)$$



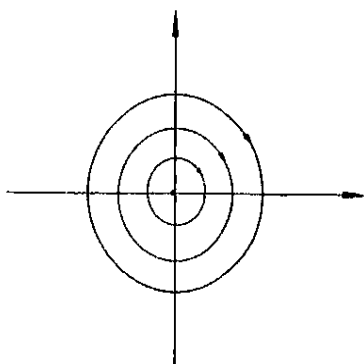
$$\rho > 0, \rho^2 < 1$$

(a)



$$\rho < 0, \rho^2 < 1$$

(b)



$$\rho = 0$$

(c)

圖 6

在此情形方程式(8)的根為 $-\rho \pm \sqrt{\rho^2 - 1}$ ，如果 $\rho^2 < 1$ 則為 $-\rho \pm \sqrt{1 - \rho^2} i$ 。實部與 ρ 的符號相反

- (I) 如果 $\rho > 0$ ，當 t 很大時，則所有微方(9)的解逼近於零。
- (II) 如果 $\rho < 0$ ，當 t 很大時，則所有微方(9)的解逼近於無限。
- (III) (簡諧運動) 如果 $\rho = 0$ ，則所有微方(9)的解為週期 2π 的週期函數。
(以 2π 為週期的函數)

上面我們用的“所有”字眼必須加以強調，因為這是線性微方的特殊性質。更精確地說，線性微方解在 $(0, 0)$ 附近局部的行為可以決定大域 (global) 的行為。

如果微方(7)是一個物理系統的模式，則 a, b, c, d 被這個物理系統所決定。有外力的情形將有何不同？這類新的微方為下列的形式

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by + f(t) \\ \dot{y} = cx + dy + g(t) \end{cases} \quad (10)$$

此處 $f(t), g(t)$ 為 t 的函數。我們在自由落體的情形已經碰到這種方程式，即在(10)中，

$$a = 0, b = 1, c = 0, d = 0,$$

$$f(t) = 0, g(t) = g.$$

(加速度起因於重力)。

我們考慮下列有外力的振動，

$$\ddot{x} + x = \alpha \cos \beta t$$

$$\alpha \neq 0, \beta > 0$$

或者寫成

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + \alpha \cos \beta t \end{cases} \quad (11)$$

如果 $\beta^2 \neq 1$ ，(11)的一個特別解是

$$x_0 = \frac{\alpha}{1 - \beta^2} \cos \beta t$$

$$y_0 = -\frac{\alpha\beta}{1 - \beta^2} \sin \beta t$$

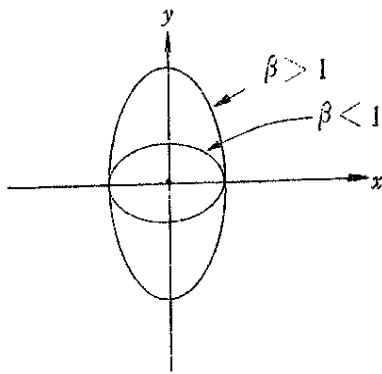


圖 7

因爲
$$x_0^2 + \frac{y_0^2}{\beta^2} = \frac{\alpha^2}{1 - \beta^2}$$

解爲橢圓，半軸分別爲

$$\frac{\alpha}{1 - \beta^2}, \quad \frac{\beta\alpha}{1 - \beta^2}$$

不管 α 的值是多少，如果讓 β 靠近 1，則振幅可以任意大。如果 $\beta = 1$ ，則上列特別解不能用，而微方(1)事實上的解在時間 t 很大時趨於無窮大，這種現象叫共振 (resonance)。

4. 一些非線性系統的大要

疊合原理 (superposition principle) 不能用於非線性系統。也就是說，非線性微方的解不能表成幾個特別解的線性組合，因此對解的定性理論的討論變得極爲重要。尤其是在局部及大域上非線性微方的解的性質可能會完全不同。甚至解並不需要在所有的 t 上都有定義，而且可能有孤立的週期解 (在相平面上的閉曲線)。雖然所有線性微方的性質都不在存於非線性微方。一些非線性微方的局部性質可以由線性的逼近得到。

微方的平衡狀態是一個常數解 (即 $x(t) = c, y(t) = d; c, d$ 爲常數)。就微方(5)而言，所有平衡點爲所有滿足 $p(c, d) = 0, q(c, d) = 0$ 的 (c, d) 點。

爲了對線性及非線性微方做一個簡單的比

較。考慮一次微分方程式

$$\dot{y} = -y \tag{12}$$

及非線性一次方程式

$$\dot{y} = -y(1 - y) \tag{13}$$

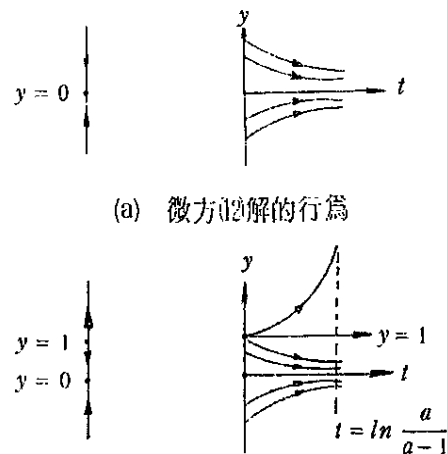
線性方程式(12)的一般解爲 $y = ae^{-t}$ ，其中 a 爲任意常數，也是這個方程式的初期值。另一方面，如果方程式(13)的初期值爲 a ，則用分離變數法可以很容易得到微方(13)的解爲

$$y = \frac{a}{1 - a + ae^{-t}} e^{-t}$$

兩個微方的 y 及 (y, t) 的圖形分別在圖 9 (a) 及 9 (b)。

從圖上可知，在此最簡單的非線性方程式也可觀察到新的現象。非線性方程式可能有一個以上的平衡點，也可能在有限時間內趨近於無限。方程式(13)解的行爲在初期值大於 1 及小於 1 的情形完全不同。以上的現象都不會發生在線性微方上。

微方(13)的一些性質 (局部的) 可由線性的分析得到。我們首先研究接近平衡點 $y = 0$ 解的性質。因爲方程式是 $\dot{y} = -y + y^2$ ，在接近 $y = 0, \dot{y} = -y$ 似乎是一個合理的逼近 (這個性質由 Liapunov 證出)。從圖 9 (a) 及 9 (b) 的曲線可以看出這是對的。爲了分析微方(13)



(a) 微方(12)解的行爲

(b) 微方(13)解的行爲

圖 9

接近 $y = 1$ 的行爲，令 $y = 1 + z$ ，對接近 $z = 0$ 的行爲做研究， z 的方程式爲

$$\dot{z} = z + z^2$$

靠近 $z = 0$ 時，同樣的我們考慮的近似線性方程式爲 $\dot{z} = z$ ，其解爲 $z = be^t$ ， b 爲初期值。當 y 接近 1， t 接近 0 時這個逼近是合理的。另一方面，近似的線性方程式其解對所有時間 t 皆存在，而非線性微方(9)的解在 t 靠近

$\ln \frac{a}{a-1}$ 時趨近無窮大。所以我們得到線性逼近往往祇限於局部(local)，而對大域(global)無效。

現在我們考慮另外一個非線性微方組

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x + 2\rho(1-x^2)y \end{aligned} \quad (10)$$

ρ 爲正的常數

我們在前面提過一個事實——線性微方(7)不可能有孤立的週期解(即如果有一個週期解，就有一系列的週期解)。微方(10)叫 Van der Pol 方程式。Van der Pol 研究這個方程式是因為它與 triode oscillator 有關。當 ρ 很大時，他也提議這個方程式可以解釋心跳的不規則性。Lord Rayleigh 研究這個方程式的另一個形式，這與聲的理論有關。

爲了解微方(10)，我們首先觀察 $x = 0, y = 0$ 爲一平衡點；方程式解在 $(0, 0)$ 附近的行爲可以藉相關的線性微方來描述。此線性微方爲(9)，其中 $\rho > 0$ 。所以，所有線性微方(9)的解皆遠離平衡點。Liapunov 證出如果微方(10)的初期值非常靠近平衡點(但不是平衡點)，則它的解也會有相同的行爲(即與微方(9)接近)。當 $\rho^2 < 1$ 時，(10)解的圖形如同圖 6(a)。

在另一方面，當 x 很大時，微方(10)中 $2\rho(1-x^2)y$ 這一項代表一摩擦力(frictional force)，此摩擦力事實上有阻尼的作用。由此我們可證明(10)的解是有界的。事實上，在 (x, y) 平面上，有一曲線 C ，解的曲線由外

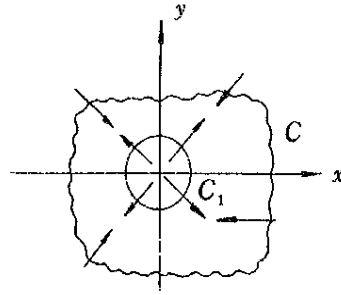


圖 10

向內進入(當 t 增大時)。藉線性的分析，我們也可造出另一曲線 C_1 在 C 之內。解的曲線由 C_1 之內部往外移。這個在圖 10 中描述出來，其中的箭頭表爲沿著解的運動。因爲在 C 與 C_1 所包圍的區域內沒有平衡點，直覺告訴我們，可以猜測在此區域內有一個以閉曲線爲解的圖形(爲一個週期解)。這猜測是對的，在本世紀初，由 Bendixson 所證明。由一個更詳細的推論，我們可以證出，事實上(10)祇有一個解的圖形爲閉曲線，其他的解(除了 $x = 0, y = 0$)在 t 很大時逼近這個曲線。見圖 11。

以上形態的振動(oscillation)叫做 self-sustained，因爲他們的發生不需外力，完全由系統內部的構造產生。這裡要強調的一點是—— self-sustained 的振動是個非線性的現象。

鐘或錶的運動現象可以解釋爲一種 self-sustained 振動。

人們也做了許多嘗試，想用此觀念來解釋一些生物的現象。例如，設有兩種與其他種類隔離的魚，其中一類魚以另一類魚爲食物，而

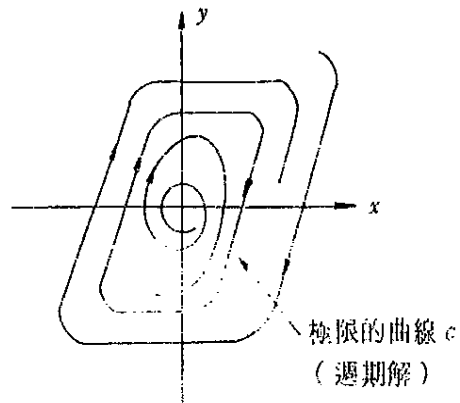


圖 11

另一類魚以蔬菜為食物（而此蔬菜的量是無限的）。在這種情形下，可能造出一組微方來解釋這個現象（解為每一個時間 t 中兩類魚的個數），如果這個方程式有 self-sustained 的性質，則不管初期狀態如何（除了平衡狀態），每一類魚的個數將會達到那個特別的週期行為。

5. 穩定性(Stability)

穩定性是一種很容易了解的概念，但人們不一定能精確的下定義。我們常談到穩定的人格或穩定的經濟，我們也體認到家庭用電的電壓及頻率的相對穩定性。基本上我們是指在某種方式，某種條件下運作的系統。如果條件做些微的改變，這如何影響系統的運作？如果影響很小，則這個系統是穩定的。否則，這系統是不穩定，我們現在看一個球在平面上曲線的振動的例子。圖12中， A, B, C, D 為平衡點。 A, C 的位置顯然為不穩定，因為對球做微擾會使這球滾下坡。 B, D 的位置為穩定，因為微擾使得球在 B, D 附來回滾動。這是一個非常一般化的物理原理的特例。在力學保守系統，在一點的位能是自一固定點移動一單位質點到該點所做的功。物理原理是一位能的極小點（相對極小）為一穩定位置。否則為不穩定。這很容易理解，所以物理老師不常費神去證明它。

這個原理是 Lagrange 在 1800 年左右發表。但直到九十年後，Liapunov 首先完全體

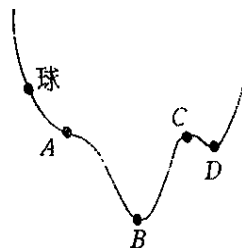


圖 12

會出這個原理及它的推廣。Liapunov 的推廣被稱為穩定性研究的“直接”或“第二個”方法。這個方法被稱為直接是因為他的準則可適用於給定的微方，而不需知道微方的解。

讓我們更精確的驗證這個觀念於下面的系統

$$\begin{cases} \dot{x} = p(x, y) \\ \dot{y} = q(x, y) \end{cases} \quad (10)$$

這裡 (x, y) 代表與我們所想要的狀態之差 (deviation)。原點對應我們想要的狀態，也是平衡狀態，這裡 $p(0, 0) = 0$ ， $q(0, 0) = 0$ ，如果系統初期值在 $(0, 0)$ ，則它永遠在那個狀態。然而這個解祇是理想化的解，而不實際。這也就是為什麼對穩定性有興趣的原因。穩定性要探討的問題是——當系統在平衡狀態下給予微擾，會有什麼現象發生？

令 C_1 為任意以原點為圓心的圓。如果給定任意如此的圓 C_1 ，我們能找到另一個較小的同心圓 C_2 ，使得任何初期值在 C_2 內之解永遠都在 C_1 內（圖13）。在這種情形下， $(0, 0)$ 為穩定。否則為不穩定。如果有另一個圓 C_0 ，使得任何初期值在 C_0 內之解都將

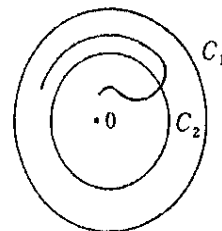


圖 13

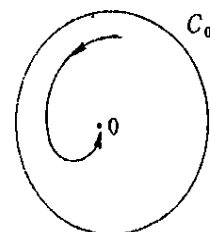


圖 14

逼近原點(圖14)，我們稱原點為漸近(asymptotically)穩定。如果所有的解皆逼近原點，則原點為大域漸近穩定。例如，在圖6(c)，原點為穩定，但不是漸近穩定。在圖6(a)原點為漸近穩定，而在圖6(b)，原點為不穩定。

我們再考慮 Van der Pol 方程式(14)，可以寫成如下

$$\ddot{x} - 2\rho(1-x^2)\dot{x} + x = 0$$

令

$$y = \dot{x} - 2\rho\left(x - \frac{x^3}{3}\right), \quad \varepsilon = -2\rho$$

我們得到一組一次方程式

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \varepsilon\left(\frac{1}{3}x^3 - x\right) \\ \dot{y} = -x \end{cases} \quad (17)$$

這裡我們假設 $\varepsilon = -2\rho$ 為正的 ($\varepsilon > 0$)

解的圖形如圖15。這裡原點為漸近穩定，因為任何始於 c 之解皆逼近原點。但是，如果系統被擾動到 c 之外，則不再有此現象，甚至有些解在有限時間內能趨近無窮大。在 c 之內的區域叫漸近穩定的區域。這個區域的大小及形狀決定這個微方系統的穩定性。

在(17)，將 $x^3/3$ 略去，我們可以得到一個線性微分方程組。利用這個線性微方，我們可以決定(17)局部的性質。所以我們可以有一小塊區域，任何初期值在此區域內之解將趨近原點。但是很顯然的，線性之逼近祇在局部有效，所以要找到(17)的漸近穩定區域到底有多大，非線性項就不可忽略了。Liapunov 方法的決定性的好處是它考慮到微方的非線性也不必去計算任何解。就算在 Van der Pol 方程式，找出極限曲線 C 是非常複雜的 (C 決定漸近穩定區域)，幸好我們可以找到一個較小的區域，而不必知道 C 。

Liapunov 方法就像 Lagrange 原理一樣簡單。Liapunov 方法在於選擇一個適當的函

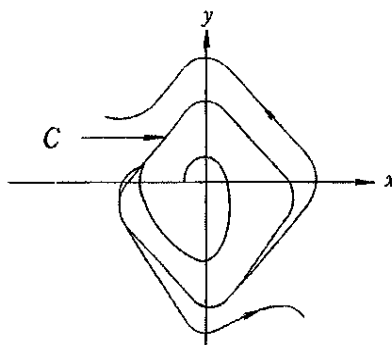


圖 15

數 $V(x, y)$ 使得(a)在我們探討的平衡點上有極小值，(b)所有 $V(x, y) = \text{常數}$ 的曲線，由外部流向內部，則這平衡點為穩定的。

要使用 Liapunov 的方法，我們必須檢驗沿著解 Liapunov 函數 $V(x, y)$ 是否為遞減。因為我們要求 $V(x, y)$ 在平衡點有極小值，它沿著解遞減，表示解走向我們想要的方向。要注意的是，我們做這個推論不必解方程式。

當然，天下沒有白吃的午餐——這個方法困難的地方是如何找到適當的 Liapunov 函數。在 Van der Pol 方程式這個例子中，我們選擇適當的坐標使得 $V(x, y)$ 有一個特別簡單的形式。在這個地方不要被騙，一般，這不是那樣容易的。

對 Van der Pol 方程式，我們能取

$$V(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$$

在原點 $V(0, 0) = 0$ ，在其他點 $V(x, y)$ 大於零。計算 V ，沿著解的變化率，我們得到

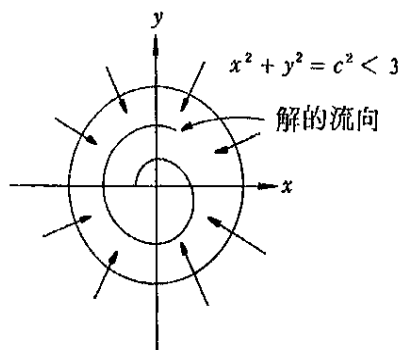


圖 16

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y} \dot{y} = x\dot{x} + y\dot{y} \\ &= -\frac{1}{3} \varepsilon x^2 (3 - x^2)\end{aligned}$$

在圓 $x^2 + y^2 = c^2 < 3$ 內， x^2 小於 3，所以 $\dot{V} \leq 0$ 。事實上，如果 $x \neq 0$ ，則在此圓內 $\dot{V} < 0$ 。這告訴我們在任何圓 $x^2 + y^2 = c^2 < 3$ 內，解流向圓內如同圖 10。這意味著每一個初期值在 $x^2 + y^2 = 3$ 內部之解，在時間 t 很大時將趨近於原點。原點是漸近穩定。我們也知道，不管 ε 是多少 ($\varepsilon > 0$)，漸近穩定的區域至少像 $x^2 + y^2 = 3$ 的內部那麼大。這也給我們有關極限曲線 C 的一些資料。事實上，對於任意非零 ε ，這個極限曲線 C 在 $x^2 + y^2 = 3$ 之圓外。

我們所討論的 Liapunov 方法是現在唯一探討穩定性的一般方法，這個方法被廣泛的使用，來解決實際問題的穩定性，尤其在俄國，人們成功的用此方法來研究剛體運動的穩定性，一系列非線性控制系統的穩定性，及決定核子反應爐的穩定性。這個方法在探討微分方程的數學理論上也極為重要。

理論上這個方法應該可以決定微方的穩定性，但是實際上我們很難造適當的 Liapunov 函數——就像上面所討論的 $V(x, y)$ 那種函數。有幾個方法可以引導我們去造 Liapunov 函數，但要有效使用這些方法需要一點天份與經驗。用計算機來決定非線性系統的穩定性，現在尚未有一般可用的法則。

6. 自動控制的理論簡介

在人類有記錄的歷史中可以看出人類已體會到自動控制的回饋 (feed back) 原理。並且加以利用。大約兩千年前，巴比倫人認識到回饋的原始的形式，他們用此原理來開關溝

渠以控制土壤的濕度。一個更成熟的回饋 (feed back) 器械是一種相當準確的阿拉伯水鐘。它是一個浮著的瓣 (valve)，可控制水槽的高度，與今日我們使用的抽水馬桶的水箱有點類似。

另一個用回饋 (feed back) 原理去達到自動控制效果的器械是瓦特 (Watt) 在 1788 年所使用的飛球控制器——可以使蒸氣引擎速度規律化。當引擎的速度偏離設定的速度時，這種改變會使節流閥 (throttle) 規律化，而修正這個偏差。由於電子及更精細的力學儀器的發展，我們現有非常複雜的控制系統，但是控制中的回饋原理都是一樣——不管是在工業過程的控制，或是經濟、核子反應爐、太空飛行器的控制。

我們的興趣是在於這個原理及其應用能訴之於數學分析。1868 年英國物理學家 Maxwell 首先做出。大約在 1876 年一位俄國工程師 Vyshnegraskii 也獨立的做出。他們主要考慮小的偏離，即與所設定的值有小的偏離的情形。他們觀察出不當的使用回饋原理會增大偏離而無法減少它。適當的使用回饋是基於穩定性的分析。這個偏離是否趨近於零。

Minor sicy 應用這些原理在 1920 年初期設計一艘叫新墨西哥戰艦的自動導航裝置。他利用數學模式所做的預測與實際相符。但很奇怪的，在那個時候美國海軍並不接受這種自動裝置——他們所持的理由是它會使舵手沒事可做。這種邏輯有點像英國行政當局起初拒絕使用蒸氣機在戰艦上，因為燃料所產生的火星會把帆燒破。

甚至在第二次世界大戰時，雖然控制理論的發展已成熟，被應用的理論仍局限於線性逼近，線性回饋及穩定性的線性分析。就算用這麼受限制的理論，也有不少成功的用途。但是，在過去十年控制的理論在美國及俄國快速成長。這方面的文獻真是汗牛充棟。幸好我們可以用很簡單的方程式來說明這些原理。

我們考慮一物體在黏性流體中在外力 F 作用下的運動—— F 可能驅動或阻礙物體的運動。運動的方程式為

$$\ddot{x} + \beta \dot{x} = F \quad (18)$$

這裡 β 是正的，為流體的黏滯係數。我們假設要控制的是物體的速度 \dot{x} 。也就是說，我們想要 $\dot{x} = a$ ，這裡為一給定的常數。我們能控制物體的運動在於我們選擇 F 的可行性。我們祇對速度有興趣，所有令 $\dot{x} = y$ ，得到一階方程式

$$\dot{y} + \beta y = F$$

首先我們來看看工程師所謂“開迴路 (Open loop)”控制與“閉迴路 (Closed loops)”控制 (即回饋控制) 有何不同。在開迴路控制中，設計值的偏離資料沒有用來校正 F 。

因為我們沒有用到物體是走得太快或太慢的資料，我們所能做的是選擇 F 為一個常數。在這個情形下，速度 y 為解為

$$y = y_0 e^{-\beta t} + \frac{F}{\beta} (1 - e^{-\beta t})$$

這裡 y_0 為初期速度。所以不管初期值如何，當時間 t 很大時， y 逼近 F/β 。如果我們希望最後的速度為 a ，則可以選擇 $F = \beta a$ 。這是所要的結果，但是如果 β 很小則 y 需要更長時間才逼近 a 。我們將會看到，這種開迴路控制也有更嚴重的缺點。

現在我們將上面結果與回饋控制 $F = -\delta(y - a) + \beta a$ 比較，這裡 δ 為一正常數。這個控制力 F 現在與實際速度和所設定速度 a 之差成線性的關係。這是線性回饋控制。控制系統的微方為

$$\dot{y} + \beta y = -\delta(y - a) + \beta a$$

或者寫成

$$\dot{y} + (\beta + \delta)y = (\beta + \delta)a。$$

這個回饋的作用相當改變流體的黏滯係數。

而現在我們得到

$$y = y_0 e^{-(\beta+\delta)t} + a(1 - e^{-(\beta+\delta)t})$$

不管初期值如何， y 同樣的趨近 a ，這回趨近的速度更快。

雖然以上說明了回饋控制的好處，更重要的優點是它增加操作的穩定性。假設我們不知道 β 的值，或我們需要在不同的 β 值中操作。為便於解說，假設當我們設計一個控制系統，我們以為黏滯係數為 β ，但現在物體在黏滯係數為 $\beta/2$ 的流體中運動。在開迴路控制下，運動的方程式為

$$\dot{y} + \frac{1}{2}\beta y = \beta a，$$

在回饋控制的情形

$$\dot{y} + \frac{1}{2}\beta y = -\delta(y - a) + \beta a。$$

在開迴路控制下速度 y 現在趨近 $2a$ ，這是百分之百的誤差。在回饋控制下， y 逼近

$$\frac{\beta + \delta}{\frac{1}{2}\beta + \delta} a，$$

如果 δ 取得很大我們可以使得這個系統不受黏滯係數變化的影響。例如說，如果 $\delta = 10\beta$ ，

y 逼近 $\frac{22}{21}a$ ，這個誤差小於百分之五。回饋

控制使得系統幾乎不受周遭環境的影響。

但是回饋控制有一個更重要的特性。在某種意義上，回饋控制使系統能適應周遭變化。假設我們對 β 除了知道它是常數外一無所知。我們不再假設 β 為正的 (如果 β 是負的，則我們所控制的系統為不穩定)。系統的方程式為下列的形式：

$$\begin{aligned} \dot{y} + \bar{\beta}y &= (b - \beta_0)(y - a) + ba \\ \dot{b} &= g(y - a) \end{aligned}$$

g 為待定的 y 的函數，即 $g = g(y)$ 。 β_0 為任意正數，我們可以自由選取。所以在這種控制系統下，我們不會事先知道 β 的值。我們想要的情況是：不管 y 的初期值 y_0 及 b 的初期值如何， y 趨近所設定的速度 a 。函數 g 是用來校正 b 的值，我們可以用 Liapunov 的方法推得。我們希望 y 趨近 a ，我們也可期望 b 趨近未知的常數 β 。這些考慮使我們可取下列 V 當作 Liapunov 函數。

$$V = \frac{1}{2} (y - a)^2 + \frac{1}{2} (b - \beta)^2$$

我們現在計算 V 沿著解的變化率

$$\begin{aligned} \frac{dV(x, y)}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y} \dot{y} \\ &= (y - a) \dot{y} + (b - \beta) \dot{b} \\ &= -\beta_0 (y - a)^2 + (b - \beta) (g + y(y - a)) \end{aligned}$$

所以，如果我們取 $g = -y(y - a)$ ，

$$\frac{dV(x, y)}{dt} = -\beta_0 (y - a)^2。$$

這表示 V 為遞減祇要控制有誤差。我們也可證明 y 趨近 a 而 b 事實上趨近 β 。我們在此可自由選擇 β_0 。上面的式子告訴我們： β_0 的值愈大， y 趨近 a 的速率愈大。所以，不管 β 的值如何，這個控制系統使得與設定速度的偏離趨近於零回饋的現象使系統能適應外界的變化。

7. 未來的趨勢

大部份的二階微分方程式的重點問題都已

$$\text{解決，即形如 } \begin{cases} \dot{x} = p(x, y) \\ \dot{y} = q(x, y) \end{cases}$$

的方程式。這個是尋常的，因為在二維度的空間（即平面）考慮積分曲線的問題較簡單。更精確的說，所有可能為其他解的極限的解為平衡點或閉曲線。但高階的微分方程式，這方面的問題變得更為複雜。

現在仍未完全解決的有關平衡點穩定的問題是如何得到一個一般造 Liapunov 函數的方法。這個問題的解決有助於以電子計算機有效的解穩定性的問題。其他重要的研究領域是找尋 N 階微分方程的相空間裡不受微擾影響的幾何性質。這個問題在 2 階已完全解決，但是對於高階的微分方程式我們知道得很少。

微方的應用相當廣泛，一些實際的應用可以回過來刺激微方理論的發展。但是祇要微方理論上有任何突破，我們就可馬上應用在各類的實際問題。

參考書籍

對微分方程的現代理論做淺顯的介紹是 Birkhoff 及 Rota 所著 *Ordinary Differential Equations*。Ginn, Boston, 1962 以及 Water Leighton 所著 *Ordinary Differential Equations*，Wadsworth, Belmont, California, 1963。如果要看介紹非線性振動理論，其中的數學不太深而且包含許多物理的應用，讀者可以看 Minorsky, *Non-linear Oscillations*。Van Nostrand, Princeton, N. J. 1962。Lasalle 及 Lefschetz 的一本書，*Stability by Liapunov's Direct Method*，Academic Press,

New York, 1961, 對穩定性及其應用有完整而淺顯介紹。

對所有種類振動都介紹的書是 *J. J. Stoker's Nonlinear Vibrations*, Interscience, New York, N. Y., 1950。在 *Recent*

Soviet Contribution to Mathematics, Macmillan, New York, N. Y., 1962 書中的第六部分說明俄國數學在這個領域的貢獻。

對振動做整體的介紹有 Hale 所著 *Oscillations in Nonlinear Systems.*, McGraw Hill, New York, N. Y. 1963.

俄國數學家在現代控制理論著作有英文譯本的是 Pontryagin, Boltjanskii, Gamkrelidze, and Mishchenko, *The Mathematical Theory of Optimal Process*, Interscience, New York, N. Y. 1962.

微分方程更深入的書是 S. Lefschetz, *Differential Equations: Geometry Theory*, 2nd Edition, Interscience, New York, N. Y. 1963 及 E. A. Coddington 和 N. Levinson 所著, *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill, New York, N. Y., 1955.

— 本文譯者為本所副研究員 —



蘇菲亞·柯瓦列夫斯基 與數學界

Ann Hibner Koblitz 著

李志豪 譯

本文節譯自 *The Mathematical Intelligencer* Vol.6, No.1, 1984, PP.20~29.

許多數學家都知道一些關於蘇菲亞·柯瓦列夫斯基（以下簡稱蘇菲亞）的事蹟。她的一生確實是多采多姿。有些數學家認為她有點脫離她那個時代的數學界，因而只視她為一位有才能的業餘數學家。但這些印象並不完全正確。蘇菲亞事實上是一位盡心力的職業數學家，也是數學期刊 *Acta Mathematica* 早期最活躍的編輯之一，又與 Mittag-Leffler 負責這份期刊在歐洲的傳播工作。她更和當時最好的數學家們交往密切（在當時，她也確實被認為是最好的數學家之一），並參與數學界的學術事務、