

工程數學教學拾趣

陳正宗

摘要: 作者有幸在2006年暑假訪問中央研究院數學研究所, 看到數學傳播很多有趣的文章。相信對學子或數學教師均有正面意義。本人在海洋大學教授工程數學十餘年, 對於學生學習的成效一直相當注意, 願以個人的工程數學教學經驗與讀者分享。

工程數學為工學院大學部同學必修的課程, 如何讓學生不畏懼與有效學習也一直是工程教育的重要課題。本文根據作者多年的工程數學教學經驗, 列舉幾個有趣的問題, 來進行創意教學的思考。(1) 常係數微分方程重根獨立補解之求解。(2) 高斯消去法的矩陣操作方式。(3) Laplace 轉換在 Euler 型微分方程的操作回復性。(4) Poisson 積分式的另類導法。(5) 特徵問題與奇異值分解在連體力學應用。藉以不同角度的觀察來學習工程數學, 其中, (1) 常微分方程中重根情形以一極簡例說明另外獨立補解的導得。(2) 高斯消去法係結合次結構觀念與工程數學, 以矩陣操作予以連貫。(3) 對於 Euler 型微分方程將說明偶數次 Laplace 轉換操作的回復性。(4) 以 Fourier 級數、零場積分方程與退化核推導 Poisson 積分方程式。(5) 透過連體力學變形前與變形後的機制, 可探討奇異值分解與特徵值分解的數學、幾何、力學與物理意義。藉此五個範例提供學生與教師另一類的學習與教導方式。

關鍵詞: 工程數學, 創意教學, 高斯消去法, Laplace 轉換, 奇異值分解。

前言

台灣高等教育在大學入學錄取率近達九成後, 已進入一個完全不同的局面。政府當局一則以喜, 一則以憂。喜的是高等教育的普及對國家競爭力有所助益; 憂的是如何在資源有限的情況下維持大學教育的品質。身為大學教師首當其衝, 因為我們所面對學生的主動性與積極性, 均已今不如昔, 所謂草莓族之說, 即是反應此事。雖然教育部與國科會近幾年已在卓越教學與科學教育提供經費, 並有所謂補強教學, 然而學生的學習效果似乎未見提昇。因此, 在這種情況下, 如

何在工程數學的教學上激發學生的興趣與潛力,使得學習是一種樂趣而非應付考試的粗略想法,是目前學校教師極大的挑戰。如何對學生群作出拔尖、汰後與提中間的教學效果,是我們目前最重要的課題 [4]。本文我們將以工程數學教學的五個示範例進行說明講解方式,有別於傳統教科書的方式是作者多年教學心得的累積。野人獻曝,至少可提供另一個思路來學習,希望能對初學者與教師有所幫助。此五例,包括常微分方程、Laplace 轉換、偏微分方程、高斯消去法與奇異值分解,將分述如下。

案例一 常微分方程 (ODE)[2]

齊次常微分方程求解時,若遇到重根,如何讓初學者能接受另外補解的導得,在教科書 [16, 17, 18]可找到多樣方法,如變數異動法, Laplace 轉換法, \mathcal{L}' hospital 法則...等。筆者覺得最簡單的方法,可由下例說明之。

給一兩階常微分方程 $y'' + 2y' + y = 0$, 吾人假設其解為 $y = e^{st}$ 而導得, $(s + 1)^2 = 0$ 時 $y = e^{-t}$ 的補解, 另一補解為 te^{-t} 。然而對初學者而言, 如何以最簡單的方法去接受 te^{-t} 中 t 的出現。吾人可以特例說明之, 若常微分方程為 $y'' = 0$ 則毫無疑問 (只要學過微積分) 其二補解分別為 $y_1 = 1, y_2 = t$ 亦即 e^{0t} 與 te^{0t} 。如此推廣 $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$ 的三個獨立補解 e^{-t}, te^{-t} 與 t^2e^{-t} 將更容易說明, $1, t, t^2$ 出現的原因就像 $y''' = 0$ 有三個補解, $y_1 = 1, y_2 = t, y_3 = t^2$ 一樣的道理。

案例二 高斯消去法的矩陣操作 (線性代數)[2, 3, 7]

若以高斯消去法的數學操作法解如下代數方程式:

$$\begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

高斯消去法的等效矩陣操作為:

$$a^T \begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \end{bmatrix} a \begin{Bmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{Bmatrix} = a^T \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

其中, a 乃轉換矩陣, 上標“ T ”乃轉置。

經由高斯消去法將矩陣轉成上三角矩陣，整理如表一所示，即可導得，其對應次結構的 $p = 8/5, q = 13/5, r = 12/5, s = 7/5$ 觀念可參考 Bathe 與 Wilson[7]。

表一 高斯消去法的數學操作

自由 度	A	轉換矩陣	$a^T A a$	$P_{4 \times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix}$	$A_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \end{bmatrix}$	$a_{4 \times 3} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\bar{A}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 14 & -16 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \\ -16 & 29 & -4 \\ 1 & -4 & 5 \end{bmatrix}$	$P_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix}$	$A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 14 & -16 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \\ -16 & 29 & -4 \\ 1 & -4 & 5 \end{bmatrix}$	$a_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ 7 & -14 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\bar{\bar{A}}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 15 & -20 \\ 7 & -7 \\ -20 & 65 \\ -7 & 14 \end{bmatrix}$	$P_{1 \times 1} = \begin{bmatrix} 8/7 \\ 5/14 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} U_3 \\ U_4 \end{bmatrix}$	$\bar{\bar{\bar{A}}}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 15 & -20 \\ 7 & -7 \\ -20 & 65 \\ -7 & 14 \end{bmatrix}$	$a_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$	$A_{1 \times 1}^3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$	$P_{1 \times 1} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \end{bmatrix}$

此範例主要說明結構學中在不同座標系統描述時勁度矩陣的同餘轉換，在教學的面相即為高斯消去法。

案例三 Laplace 轉換對 Euler-Cauchy 型微分方程的偶次操作回復性 (Laplace 轉換)[2]

對於任意 Euler-Cauchy 型微分方程如下：

$$at^2y''(t) + bty'(t) + cy(t) = 0 \tag{3}$$

其中, a, b 與 c 為常數, y 是 t 的函數。若對式 (3) 做二次的 Laplace 轉換, 可回復原來方程式。此發現更可適用於任意階數 Euler-Cauchy 型微分方程如下式：

$$a_n t^n y^{(n)}(t) + a_{n-1} t^{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 t y'(t) + a_0 y(t) = 0 \tag{4}$$

作兩次 Laplace 轉換可得原微分方程式。亦即針對 Euler-Cauchy 型微分方程進行二次 Laplace 轉換可回復。此點和如下 Fourier 轉換與 Hilbert 轉換是不太一樣。說明如下：

$$FF(f(t)) = 2\pi f(-t) \tag{5}$$

$$HH(f(t)) = -f(t) \tag{6}$$

其中 F 與 H 分別為 Fourier 與 Hilbert 轉換 [8]。

案例四 Poisson 積分公式的另類導法 (偏微分方程)[5]

過去，從教科書 [15, 19, 20]中可發現，書中推導 Poisson 積分式皆採用映象法求得，如圖1所示即為 Kelvin 的作法。但書中所提及的推導過程並不易被初學者所接受。尤其在求映象點的方式有預設立場來求得此解之嫌。因此本文則摒除傳統的舊方法而提出兩套新的求解方式：(1) 採用映象法但求映象點的方法不同，係採用退化核的技巧求得虛擬映象點源的位置而有別於傳統教科書 Kelvin [19, 20]所提出的解法。(2) 不需映象法而採用零場積分方程式及退化核函數與 Fourier 級數展開之觀念推導 Poisson 積分方程式。在此，以二維內域圓形的例子做一詳細說明。

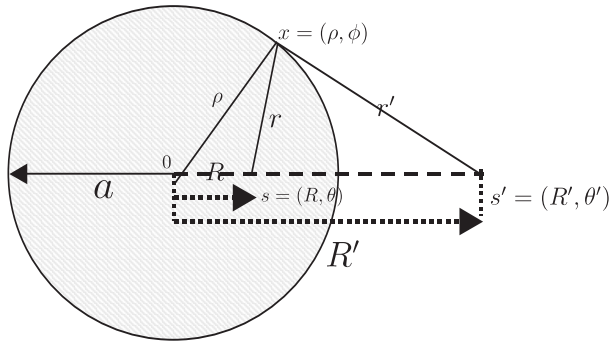


圖1. Reciprocal radii 理論 ($\frac{a}{R} = \frac{R'}{a}$)[15] (傳統方法)

方法 1 - 以退化核尋求映象源並推導 Poisson 積分公式

欲求解二維的拉普拉斯問題，其控制方程式為

$$\nabla^2 u(x) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{7}$$

其中 $u(x)$ 為勢能場， Ω 為半徑為 a 的圓形領域。為了將問題簡單化，以 Dirichlet 邊界條件， $u = f(\theta)$ ，為例說明如圖 2 所示。透過格林第三恆等式並以基本解當做輔助系統，我們可導得邊

界積分方程式[23]

$$2\pi u(s) = \int_{\partial\Omega} T_F(x, s)u(x)d\sigma_x - \int_{\partial\Omega} U_F(x, s)t(x)d\sigma_x, \quad x \in \Omega \quad (8)$$

其中, $d\sigma_x$ 為邊界積分。

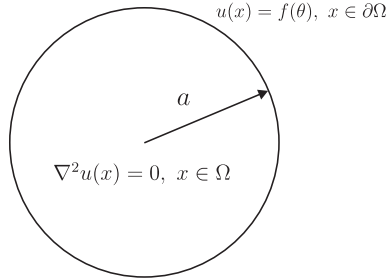


圖2. 二維內域拉普拉斯問題

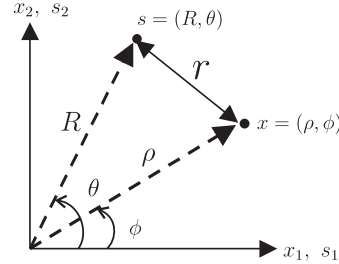


圖3. 二維問題的極座標表示

其中 $u(x)$ 和 $t(x)$ 為位移及斜率; s 與 x 分別為場點及源點, $\partial\Omega$ 為領域 Ω 的邊界, 核函數 U_F 及 T_F 分別為

$$U_F(x, s) = \ln r, \quad T_F(x, s) = \frac{\partial U_F(x, s)}{\partial n_x} \quad (9)$$

其中 U_F 滿足 $\nabla_x^2 U_F(x, s) = \delta(x - s)$ 且 $r = |x - s|$ 。然而, 本文則採用邊界積分方程法求解 Poisson 積分式, 為了求得滿足 Dirichlet 邊界條件的封閉型格林函數, 虛擬映像源點必須定位於領域以外的地方。因此, 將基本解由格林函數取代。設計 $U_G(x; s, s')|_{x \in \partial\Omega} = 0$ 使得邊界積分方程式中 $\int_{\partial\Omega} U_G(x; s, s')t(x)d\sigma_x = 0$ 。因此, 方程式 (8) 則可簡化如下

$$2\pi u(s) = \int_{\partial\Omega} T_G(x; s, s')u(x)d\sigma_x, \quad x \in \partial\Omega, \quad (10)$$

其中 $T_G(x; s, s') = \frac{\partial U_G(x; s, s')}{\partial n_x}$ 。首先, 採用退化核技巧求得封閉型的格林函數而不採用傳統教科書 [15, 19, 20] 中所使用的相似三角形做法找映像點的位置。基本解可改寫成級數形式如下:

$$U_F(x, s) = \ln(r) = \ln|x - s| = \begin{cases} U_F^I(x, s) = \ln R - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{\rho}{R}\right)^m \cos[m(\theta - \phi)], & \rho < R, \\ U_F^E(x, s) = \ln \rho - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{R}{\rho}\right)^m \cos[m(\theta - \phi)], & \rho > R, \end{cases} \quad (11)$$

其中 $x = (\rho, \phi)$ 和 $s = (R, \theta)$ 以極座標形式表示如圖3, 上標 I 及 E 分別指內域 (圓內) 及外域 (圓外) 問題。我們將以退化核技巧先找得映像點的位置, 進而推導封閉型及級數型的格林函數。

當 s 置於圓內, x 在邊界上時, 基本解可展成

$$\ln |x - s| = \ln R' - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{R}{\rho}\right)^m \cos[m(\theta - \phi)], \quad \rho > R. \quad (12)$$

當 s 置於圓外時, 基本解可展成

$$\ln |x - s'| = \ln R' - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{\rho}{R}\right)^m \cos[m(\theta' - \phi)], \quad \rho < R', \quad (13)$$

爲了將方程式中的 ϕ 項消掉, 我們必須把源點 s 與虛擬源點 s' 放置同一線上, 即令 $\theta = \theta'$. 使可輕易得到虛擬映像點位置之關係式爲

$$\frac{R}{\rho} = \frac{\rho}{R'} \Rightarrow R' = \frac{\rho^2}{R} = \frac{a^2}{R}. \quad (14)$$

將方程式 (12) 與 (13) 相減, 可得

$$\ln |x - s| - \ln |x - s'| = \ln a - \ln R'. \quad (15)$$

爲滿足邊界條件 $U_G(x, s, s') = 0$, 封閉型的格林函數導得如下:

$$\begin{aligned} U_G(x; s, s') &= \ln |x - s| - \ln |x - s'| - \ln a + \ln R' \\ &= \ln |x - s| - \ln |x - s'| - \ln a + \ln \frac{a^2}{R} \\ &= \ln |x - s| - \ln |x - s'| + \ln a - \ln R. \end{aligned} \quad (16)$$

其中, $\ln a$ 可視爲剛體運動項, 而 $\ln R$ 與 x 無關。此封閉型的格林函數滿足

$$\nabla_x^2 U_G(x; s, s') = \delta(x - s) - \delta(x - s'), \quad x \in \Omega. \quad (17)$$

且滿足邊界條件 $U(x; s, s')|_{x \in \partial\Omega} = 0$, 如圖 4 所示, 此解即爲齊次 Dirichlet 邊界條件的格林函數

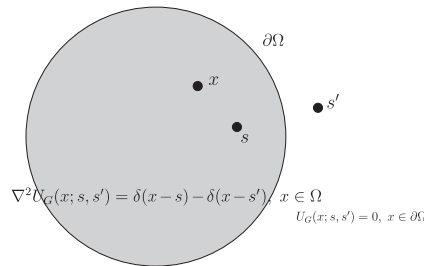


圖 4. 齊次 Dirichlet 問題的格林函數

在方程式 (16) 中, 當 $0 < \rho < R$ 時如圖 5(a) 所示, 此格林函數可展開成

$$\begin{aligned}
 U_G(x; s, s') &= \ln|x - s| - \ln|x - s'| + \ln a - \ln R \\
 &= \left\{ \ln R - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{\rho}{R}\right)^m \cos[m(\theta - \phi)] \right\} \\
 &\quad - \left\{ \ln\left(\frac{a^2}{R}\right) - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{\rho R}{a^2}\right)^m \cos[m(\theta - \phi)] \right\} + \ln a - \ln R \\
 &= \ln\left(\frac{R}{a}\right) - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left[\left(\frac{\rho}{R}\right)^m - \left(\frac{\rho R}{a^2}\right)^m \right] \cos[m(\theta - \phi)], \quad 0 < \rho < R. \quad (18)
 \end{aligned}$$

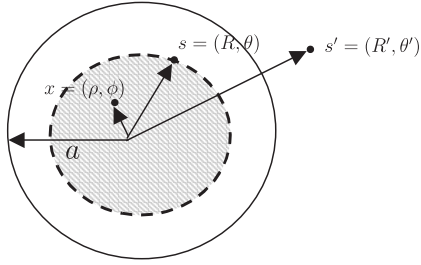


圖 5(a). 格林函數 (內區 $0 < \rho < R$, Eq.18)
Eq.19)

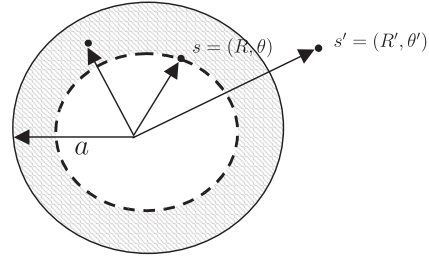


圖 5(b). 格林函數 (環區 $R < \rho < a$,

當 $R < \rho < a$ 時, 如圖 5(b) 所示, 格林函數可表示成

$$\begin{aligned}
 U_G(x; s, s') &= \ln|x - s| - \ln|x - s'| + \ln a - \ln R \\
 &= \left\{ \ln R - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{\rho}{R}\right)^m \cos[m(\theta - \phi)] \right\} \\
 &\quad - \left\{ \ln\left(\frac{a^2}{R}\right) - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{\rho R}{a^2}\right)^m \cos[m(\theta - \phi)] \right\} + \ln a - \ln R \\
 &= \ln\left(\frac{R}{a}\right) - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left[\left(\frac{\rho}{R}\right)^m - \left(\frac{\rho R}{a^2}\right)^m \right] \cos[m(\theta - \phi)], \quad R < \rho < a. \quad (19)
 \end{aligned}$$

將方程式 (18) 與 (19) 整理過後, 可得

$$U_G(x; s, s') = \begin{cases} \ln\left(\frac{R}{a}\right) - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left[\left(\frac{\rho}{R}\right)^m - \left(\frac{\rho R}{a^2}\right)^m \right] \cos[m(\theta - \phi)], & 0 < \rho < R \\ \ln\left(\frac{\rho}{a}\right) - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left[\left(\frac{R}{\rho}\right)^m - \left(\frac{\rho R}{a^2}\right)^m \right] \cos[m(\theta - \phi)], & R < \rho < a \end{cases} \quad (20)$$

封閉型及級數型格林函數圖所得之結果分別於 6(a) 和 6(b)。其中圖 6(b) 係使用 50 項級數和, 即可得到吻合的結果。

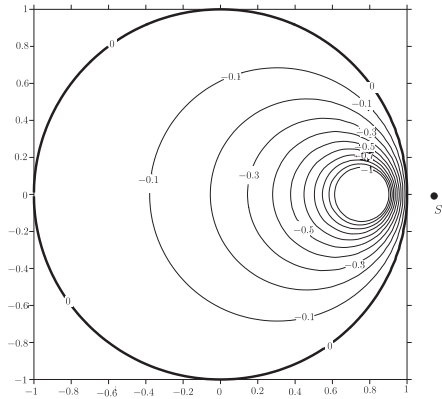


圖6(a). 封閉型的格林函數圖 (Eq.(16))
 ($a = 1, R = 0.8, R' = 1.25, \theta = 0$)

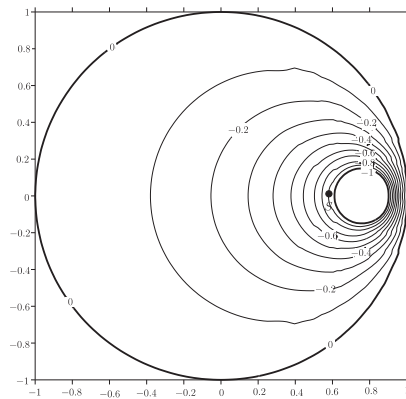


圖6(b). 級數型的格林函數 (Eq.(20))
 ($a = 1, R = 0.8, R' = 1.25, M = 50, \theta = 0$)

透過映像法我們將方程式 (16) 代入方程式 (10), 可得 Poisson 積分方程式如下:

$$\begin{aligned} u(R, \theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T_G(R, \theta; \rho, \phi; \frac{a^2}{R}, \theta) f(\phi) a d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(a^2 - R^2)}{a[a^2 + R^2 - 2aR \cos(\phi - \theta)]} f(\phi) a d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(a^2 - R^2)}{a^2 + R^2 - 2ar \cos(\phi - \theta)} f(\phi) d\phi, \quad 0 < R < a, \quad 0 < \theta < 2\pi, \quad (21) \end{aligned}$$

其中 $f(\phi)$ 為給定的邊界條件。當 $R < \rho$ 的情況下, 其級數的形式為

$$u(R, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{R^m}{a^m} \cos(m(\theta - \phi)) \right\} f(\phi) d\phi, \quad 0 < R < a, \quad 0 < \theta < 2\pi \quad (22)$$

方法2 - 零場積分方程法 (不需映像源觀念)

在法一中, 我們利用到退化核技巧找到映像點, 並導得 Poisson 積分方程式。現在, 我們摒除映像法而採用另一求解方式: 使用直接邊界元素法中的零場積分方程搭配退化核技巧與傅立葉級數展開求解此二維的 Dirichlet 問題。透過格林恆等式, 此勢能問題的積分方程式如下:

$$2\pi u(x) = \int_{\partial\Omega} T_F^I(s, x) u(s) d\sigma_s - \int_{\partial\Omega} U_F^I(s, x) t(s) d\sigma_s, \quad x \in \Omega \quad (23)$$

其中上標 I 指的是內域問題。由圖 7 所示, 我們將場點 x 推至領域以外時 ($x \rightarrow \partial\Omega$), 可得此二維勢能問題的零場積分方程式如下

$$0 = \int_{\partial\Omega} T_F^E(s, x) u(s) d\sigma_s - \int_{\partial\Omega} U_F^E(s, x) t(s) d\sigma_s, \quad x \in \Omega^c \cup \partial\Omega \quad (24)$$

其中 Ω^c 是指領域 Ω 以外的部分。

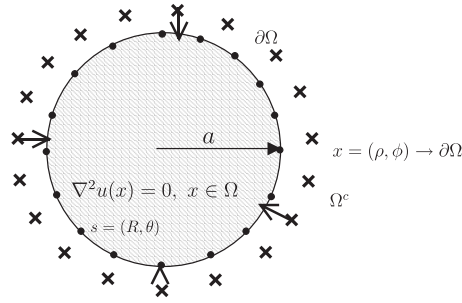


圖7. 零場積分方程

將邊界密度函數, $u(s)$ 和 $t(s)$, 以傅立葉級數展開如下所示

$$u(s) = f(\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)) \quad (25)$$

$$t(s) = p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (p_n \cos(n\theta) + q_n \sin(n\theta)). \quad (26)$$

其中係數, 當 $f(\theta)$ 已知時, a_0, a_n 和 b_n 即為給定的係數, 而 p_0, p_n 和 q_n 則為此 Dirichlet 問題的未定係數。在方程式 (24) 中, 我們將核函數 T 以退化核的形式展開如下:

$$T(s, x) = \frac{\partial U(s, x)}{\partial n_s} = \begin{cases} T_F^I(s, x) = \frac{1}{R} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\rho^m}{R^{m+1}} \cos[m(\theta - \phi)], & \rho < R \\ T_F^E(s, x) = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{R^{m-1}}{\rho^m} \cos[m(\theta - \phi)], & \rho > R \end{cases} \quad (27)$$

再將核函數 $U(s, x)$ 和 $T(s, x)$ ($\rho < R$) 及邊界密度函數 (25) 和 (26) 代入方程式 (24) 中並且代入邊界條件 $\rho = a$, 可求解出未定係數如下:

$$P_0 = 0, \quad P_n = \frac{n}{a} a_n, \quad q_n = \frac{n}{a} b_n, \quad (28)$$

因此, 密度函數 $t(s)$ 可表示成

$$t(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a} (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)). \quad (29)$$

然而我們將方程式 (25), (29) 以及退化核代入方程式 (23) 可得此二維勢能場如下所示

$$2\pi u(x) = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{a} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\rho^m}{a^{m+1}} \cos[m(\theta - \phi)] \right] \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)) \right] a d\theta \\ - \int_0^{2\pi} \left[\ln a + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\rho}{a} \right)^m \cos[m(\theta - \phi)] \right] \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a} (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)) \right] a d\theta \quad (30)$$

方程式 (30) 經整理後 Poisson 積分式的級數表示式可寫成

$$\begin{aligned}
 u(\rho, \phi) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a} \right)^m \cos[m(\theta - \phi)] \right] \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)) \right] a d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a} \right)^m \cos[m(\theta - \phi)] \right] f(\theta) d\theta
 \end{aligned} \tag{31}$$

由方程式 (22) 及 (31) 中, 可發現到此兩種新方法所導證的結果一致。同時也驗證本理論的正確性。在此, 我們無需藉助傳統教科書中的映像法, 自成一套新求解方式。讓學生不至於墨守成規, 一味地接受傳統填鴨式的教育而提供另一思路。本文以二維內域的勢能問題作示範, 相同地外域問題以及三維的問題求解方式均相似, 其結論皆整理於表1及表2中。

表1. 格林函數與 Poisson 積分公式 (二維勢能問題)

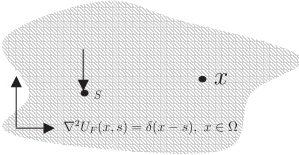
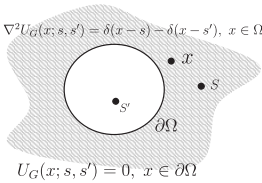
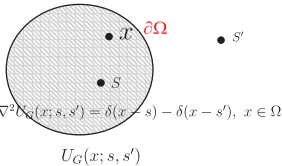
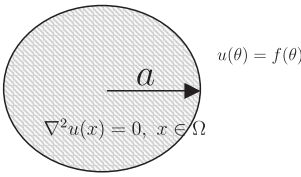
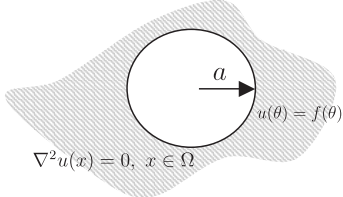
		內域問題	外域問題
輔助系統	基本解		
	格林函數		
封閉型Poisson積分式	$u(R, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(a^2 - R^2)}{a^2 + R^2 - 2aR \cos(\phi - \theta)} f(\phi) d\phi$ $0 < R < a, \quad 0 < \theta < 2\pi$	$u(R, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - a^2)}{a^2 + R^2 - 2aR \cos(\phi - \theta)} f(\phi) d\phi$ $a < R < \infty, \quad 0 < \theta < 2\pi$	
級數型Poisson積分式	$u(R, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{R^m}{a^m} \cos(m(\theta - \phi)) \right\} f(\phi) d\phi$ $0 < R < a, \quad 0 < \theta < 2\pi$	$u(R, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^m}{R^m} \cos(m(\theta - \phi)) \right\} f(\phi) d\phi$ $a < R < \infty, \quad 0 < \theta < 2\pi$	
問題描述			

表2. 格林函數與 Poisson 積分公式 (三維勢能問題)

		內域問題	外域問題
輔助系統	基本解		
	格林函數		
封閉型 Poisson 積分式	$u(R, \theta, \bar{\varphi}) = \frac{1}{4\pi} a(a^2 - R^2) \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin \varphi}{[a^2 + R^2 - 2aR \cos \gamma]^{\frac{3}{2}}} \times f(\phi, \varphi) d\phi d\varphi$ $0 < R < a, 0 < \theta < 2\pi, 0 < \bar{\varphi} < \pi$	$u(R, \theta, \bar{\varphi}) = \frac{-1}{4\pi} a(a^2 - R^2) \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin \varphi}{[a^2 + R^2 - 2aR \cos \gamma]^{\frac{3}{2}}} \times f(\phi, \varphi) d\phi d\varphi$ $a < R < \infty, 0 < \theta < 2\pi, 0 < \bar{\varphi} < \pi$	
級數型 Poisson 積分式	$u(R, \theta, \bar{\varphi}) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{a^2} + \sum_{m=0}^n \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \times \cos(m(\varphi - \bar{\varphi})) p_n^m(\cos \phi) p_n^m(\cos \theta) \frac{R^n}{a^n} \times \sin \varphi (2n+1) f(\phi, \varphi) d\phi d\varphi$ $0 < R < a, 0 < \theta < 2\pi, 0 < \bar{\varphi} < \pi$	$u(R, \theta, \bar{\varphi}) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{a}{R} - \sum_{m=0}^n \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \times \cos(m(\varphi - \bar{\varphi})) p_n^m(\cos \phi) p_n^m(\cos \theta) \frac{a^{n+1}}{R^{n+1}} \times \sin \varphi (2n+1) f(\phi, \varphi) d\phi d\varphi$ $a < R < \infty, 0 < \theta < 2\pi, 0 < \bar{\varphi} < \pi$	
問題描述			

案例五 矩陣分解 (高等工數與連體力學)[12, 13]

連體力學是一切力學的基礎。力學所關切的實際問題是在於各種不同的環境負荷條件下，物體承受外力所產生之變形行為。在工程的問題上，通常是假設其物體為一完全之連續體，而來探討其力學行為，這其中不外乎包含了流體、氣體、甚至於固體。完全連續體的定義是捨棄其物體由原（分）子所構成之事實，在這條件下物體內部在微觀的狀態下是不存在任何空隙或是裂縫等情形；而在巨觀下，整個物體可視為一個單體且為連續介質，則這樣的介質才可稱之為完全連續體。

連體力學研究的立足點則是以古典力學之理論來探討其連續體之相關行為並得其合理之解釋，連體力學即是研究此一理想性的連續體之特性；許多的理論也都是建立在這假設之上，固體力學及流體力學皆在其涵蓋的範圍內。在連體力學中，極分解 (polar decomposition) 是用來描述變形過程的方法，極分解乃是將一變形梯度矩陣 分解成 或是 型式，前者為將變形行為拆解為先旋轉後伸縮，而後者則是先伸縮後旋轉。在矩陣的運算過程中，奇異值分解法是相當有

用的一種方法 [14], 而且奇異值分解法也成功地被應用在諸多問題上 [6, 9, 10, 11]。然而, 在諸多文獻中並沒有談論到極分解與奇異值分解法彼此之間的關連性。此案例將以奇異值分解法 (Singular value decomposition) 用來了解並解釋連體力學中的變形之行爲, 並討論在奇異值分解法中左酉矩陣及右酉矩陣的幾何意義, 因而可說明在極分解中左、右酉矩陣與正交矩陣之關聯。藉由簡剪平面 (Simple Shear Plane) 變形一例 [21] 來論證使用奇異值分解法的技巧與變形之行爲, 而且在例中也將說明奇異值分解法中的左酉矩陣及右酉矩陣在產生變形及未變形之兩系統中所提供之對偶基底。如果在變形前及變形後之彈性體中的微小元素分別以右酉及左酉矩陣之對偶基底來表示時, 則產生變形之過程中, 在新座標轉換系統上可以用一個簡單的對角矩陣來作轉換即可。從這個範例中我們也可看出奇異值與特徵值的關係。

奇異值分解法 (SVD)[14]:

是將矩陣作譜分解的工具。一過定矩陣 $[A]_{m \times n}$, 設 m 是方程的數量, 而 n 是未知數的數目, 則我們可以得到下式

$$[A]_{m \times n} [x]_{n \times 1} = [b]_{m \times 1}, \quad \text{其中 } m > n$$

SVD 會將矩陣 $[A]_{m \times n}$ 分解成

$$[A]_{m \times n} = [\Phi]_{m \times m} [\Sigma]_{m \times n} [\Psi]_{n \times n}^T$$

$$\text{式中 } [\Sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{m \times n}, \quad m > n$$

其中 σ_i 為第 i 個奇異值, 且 $\sigma_n \geq \sigma_{n-1} \cdots \geq \sigma_1$, $[\Phi]_{m \times m}$ 及 $[\Psi]_{n \times n}^T$ 為左酉矩陣及右酉矩陣, 且由特徵向量所構成。在式中所使用之上標符號“ T ”表轉置。

任一變形梯度矩陣 F 可被分解為 VR 或是 RV 兩種形式, 寫成如下

$$F = VR = RU$$

而式中前者可以將物體產生變形的過程分解為先旋轉而後伸縮、而後者則是分解為先伸縮而後旋轉。我們可以藉由上式之模式, 將物體的任一變形行爲分為兩個變形階段來各別討論, 來探討其變形過程上之物理意義。

任一變形梯度矩陣 F ，為未變形前微小單元 dX 轉換成變形後微小單元 dx 之轉換矩陣，如圖 8。所示

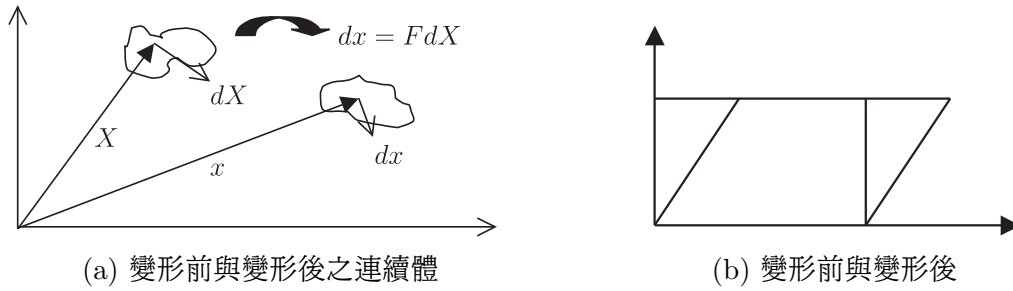


圖 8

依極分解之定理可將變形梯度矩陣 F 分解為

$$F = VR = RU \quad (32)$$

其中 R 為一正交旋轉矩陣， V 及 U 皆為一特定之對稱矩陣，且 V 及 U 可以由下式來求得 [21]

$$U = \sqrt{F^T F} \quad (33)$$

$$V = \sqrt{F F^T} \quad (34)$$

$$R = F U^{-1} \quad (35)$$

若依 SVD 之技巧來分解，則矩陣 F 可分解成 [14]

$$F = \Phi \Sigma \Psi^T \quad (36)$$

其中 Σ 為一對角矩陣且為由 F 之奇異值所構成， Φ 及 Ψ 分別為左酉矩陣及右酉矩陣，我們若將式 (36) 式代入式 (33)、(34) 兩式，我們可以得到

$$U = \Psi \Sigma \Psi^T \quad (37)$$

$$V = \Phi \Sigma \Phi^T \quad (38)$$

再將式 (37) 式代入式 (35) 式中，我們亦可導得

$$R = \Phi \Psi^T \quad (39)$$

經整理後可得下表 3。

表3 矩陣之關係式

	梯度矩陣	右伸縮矩陣	左伸縮矩陣	旋轉矩陣
極分解	$F = VR = RU$	$U = \sqrt{F^T F}$	$V = \sqrt{FF^T}$	$R = FU^{-1}$
SVD分解	$F = \Phi\Sigma\Psi^T$	$U = \Psi\Sigma\Psi^T$	$V = \Phi\Sigma\Phi^T$	$R = \Phi\Psi^T$

其中, Ψ 與 Φ 分別為 FF^T 與 $F^T F$ 的模矩陣。而 Σ^2 則為 $F^T F$ 或 FF^T 的特徵值所組成的對角矩陣。再者, 根據 SVD 分解之基本定義, 我們還可以得到下式

$$F\psi_i = \sigma_i\phi_i \quad (40)$$

$$F^T\phi_i = \sigma_i\psi_i \quad (41)$$

式中 σ_i 是矩陣 F 的第 i 個奇異值, 而 ϕ_i 及 ψ_i 分別為 Φ 及 Ψ 之第 i 個行向量。根據式 (37) 和 (38), 我們很輕易地可以發現 U 和 V 矩陣含有相同之奇異值 σ_i 及各別的特徵向量 ψ_i 與 ϕ_i 。

若未變形之微小單元 dX 可以用 ψ_i 的基底來表示, 我們可以令一新向量 dY

$$dY = \Psi^T dX \quad (42)$$

dY 即是 dX 分解在單位方向向量 Ψ 的分量值。

同理, 若變形後之微小單元 dx 可以用 ϕ_i 的基底來表示, 我們也可以令一新向量 dy

$$dy = \Phi^T dx \quad (43)$$

dy 即是 dx 分解在單位方向向量 Φ 的分量值。

且依據 $FdX = dx$, dy 及 dY 可以推導出

$$dY = \Sigma dY \quad (44)$$

此表示若未變形前向量 dX 分解在單位方向向量 Ψ 上的分量值為 $dY = (\alpha, \beta, \gamma)$, 則變形後向量 dx 分解在單位方向向量 Φ 上的分量值為 $dy = (\alpha\sigma_1, \beta\sigma_2, \gamma\sigma_3)$, 由此可發現兩個轉換之向量可由一簡單之對角矩陣 Σ 來做映射, 而分別建立在 Ψ 及 Φ 之參考座標上。

考慮一物體之簡剪 (Simple Shear) 變形行為, 條件可表示成下式

$$x_1 = X_1 + \frac{2}{\sqrt{3}}X_2 \quad (45)$$

$$x_2 = X_2 \quad (46)$$

$$x_3 = X_3 \quad (47)$$

即

$$\begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dX_1 \\ dX_2 \\ dX_3 \end{bmatrix} \quad (48)$$

則我們可以得到

$$F = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (49)$$

根據式 (33)、(34) 及 (35) 可得

$$U = \sqrt{F^T F} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (50)$$

$$V = FR^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (51)$$

$$R = FU^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-30^\circ) & -\sin(-30^\circ) & 0 \\ \sin(-30^\circ) & \cos(-30^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (52)$$

考慮一變形前之向量 $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1, 0\right)$ ，則我們可以得到

$$dX = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1, 0\right)^T$$

代入方程式 $dx = FdX$ 中，取 $F = VR$ 或 $F = RU$ ，皆可得到

$$dx = (\sqrt{3}, 1, 0)^T$$

變形圖過程可繪出如下：

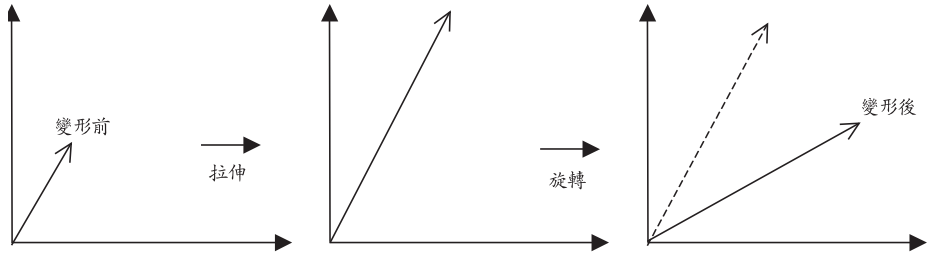


圖9(a). $F = RU$ 先拉後轉

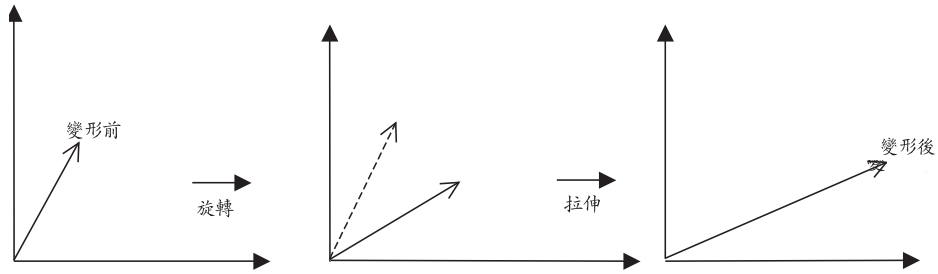


圖9(b). $F = VR$ 先轉後拉

未變形之方向向量 dX 及變形之過程 ($F = RU$) 可以先後分解為一長度伸縮比例為 $\sqrt{3}$ 之操作, 及角度旋轉 -30° 之過程, 如圖 9(a) 所示。反之, $F = VR$ 則是先產生角度旋轉 -30° , 而後長度伸長 $\sqrt{3}$ 倍, 如圖 9(b) 所示。

而根據 SVD 的方法, 矩陣 F 可以分解為下列形式

$$F = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (53)$$

式中

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(30^\circ) & -\sin(30^\circ) & 0 \\ \sin(30^\circ) & \cos(30^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (54)$$

$$[\Sigma] = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (55)$$

$$[\Psi]^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-60^\circ) & -\sin(-60^\circ) & 0 \\ \sin(-60^\circ) & \cos(-60^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (56)$$

可得

$$\Psi\Sigma\Psi^T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 0 \\ \frac{2}{2} & \frac{2\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (57)$$

$$\Phi\Sigma\Phi^T = \begin{bmatrix} \frac{5\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (58)$$

$$\Phi\Psi^T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-30^\circ) & -\sin(-30^\circ) & 0 \\ \sin(-30^\circ) & \cos(-30^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (59)$$

將式 (57)~(59) 與式 (50)~(52) 的結果比較, 則 U , V , R 和 Φ , Σ , Ψ 這兩者的相關聯性, 可發現完全符合最初的推導。

再者, 若考慮一變形前向量 $(1, 1, 0)$, 則我們可以得到

$$dX = (1, 1, 0)^T \quad (60)$$

且在式 (42) 中我們可以得到

$$dY = \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}, \frac{1 - \sqrt{3}}{3}, 0 \right)^T \quad (61)$$

dY 為 dX 分解在單位方向向量 Ψ 的分量值。

而由式 (44) 中亦可得到

$$dy = \left(\frac{3 + \sqrt{3}}{2}, \frac{-3 + \sqrt{3}}{6}, 0 \right)^T \quad (62)$$

dy 為 dx 分解在單位方向向量 Φ 的分量值。

若將式 (62) 中的 dy 代入式 (43) 中我們可以得到下式

$$dx = \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}, 1, 0\right)^T \quad (63)$$

而式 (63) 則與 Fdx 吻合，雖然這中間的運算過程有點繁雜，但在幾何方面的解釋上，對於長度之伸縮及角度之變化卻有了更明確的說明。未變形前向量 dX 分解在單位方向向量 Ψ 上的分量值為 $dY = (\alpha, \beta, \gamma)$ ，則變形後向量 dx 分解在單位方向向量 Φ 上的分量值為 $dy = (\alpha\sigma_1, \beta\sigma_2, \gamma\sigma_3)$ ，由例題中之數值則可輕易發現這兩者間的轉換關係存在，且可將未變形前及變形後之參考座標分別建立在 Ψ 及 Φ 之座標上，則變形之行爲可用一簡單之對角矩陣 Σ 來做映射，其中對偶基底 ψ_1, ψ_2, ψ_3 與 ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 如圖 9(c) 所示

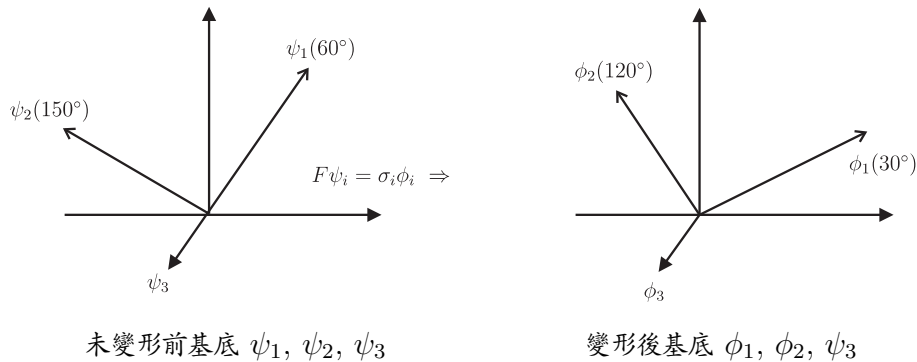


圖 9(c). SVD 之對偶基底示意圖

本案例，我們試著以 SVD 的方法來取代極分解的方法，並解釋物體產生變形的過程。以 SVD 分解的方法來重新檢視極分解在數學、力學物理與幾何上的意義，並建立其間的關係。得知在兩種方法中各個矩陣彼此間的相關性及組成內涵。而平面物體產生變形的過程分為伸縮及旋轉兩方面，在例題中也可以很清楚地來表現出來。文中並提出未變形前與變形後的兩個參考座標系統，即為在奇異值分解法中的右酉矩陣及左酉矩陣在兩系統中所提供之對偶基底。如果在變形及未變形之物件中的微小元素皆以其右酉及左酉矩陣之對偶基底來表示，則其產生變形之過程中，在新座標系統上可以用一個簡單的對角矩陣來作轉換。此一結果，對於數學式的計算或是矩陣的運算效率上有其正面之意義。透過一簡剪的變形範例更能驗證本研究的正確性。

結語

本文列舉五個工程數學的有趣案例，進行說明。並從中了解教學與研究如何整合，嘗試以不同於一般教科書方式來了解工程數學的物理與力學內涵，並提供學生另一思路提高學生學習的興趣。工數並非現代八股，一成不變。而是生動活潑，一些奧妙有趣的關係，仍待我們去發掘，

唯有以啓發代替填鴨, 才能教出一些對工數有興趣, 且將其運用自如的學生。我想這才是工程師學習工程數學的目的 (有趣與有用)。本文一些更詳細資料可參閱網頁 [1]或講義 [2]。也歡迎對工程數學有興趣的師生予以賜教。

誌謝

感謝國科會大學生研究專題 NSC-90-2815-C-022-005-E 與 NSC-88-2815-C-019-003-E 贊助, 李慶鋒、林盛益與吳清森先生所提供數值算例, 亦一併致謝。

參考文獻

1. 海大河工工數 Website 課程相關 <http://msvlab.hre.ntou.edu.tw/>, 2006.
2. 陳正宗, 工程數學講義, 基隆, 2006。
3. 林聰悟與林佳慧, 數值方法與程式, 圖文社, 台北市, 1997。
4. 國立台灣海洋大學教學優良教師經驗分享, 海洋大學, 基隆, 2001。
5. 吳清森, 無網格法及邊界元素法於薄膜及板問題之退化尺度分析, 海洋大學河海工程研究所碩士論文, 基隆, 2004。
6. 林盛益, 邊界元素法於板自由振動之數學分析與數值研究, 海洋大學河海工程研究所碩士論文, 國科會第三屆碩士論文獎, 基隆, 2003。
7. Bathe, K. J. and Wilson, E. L., *Numerical methods in finite element analysis*, Prentice Hall, 1976.
8. Bendat, J. S. and Piersol, A. G., *Random data*, Second edition, John Wiley & Sons, 1991.
9. Chen, J. T., Huang, C. X. and Chen, K. H., *Determination of spurious eigenvalues and multiplicities of true eigenvalues using the real-part dual BEM*, *Comp. Mech.*, Vol.24(1), p.41, 1999.
10. Chen, J. T., Huang, C. X. and Wong, F. C., *Determination of spurious eigenvalues and multiplicities of true eigenvalues in the dual multiple reciprocity method using the singular-value decomposition technique*, *J. Sound and Vibration*, Vol. 230, No.2, pp.203-219, 2000.
11. Chen, J. T., Kuo, S. R., Lee, C.F., A new point of view for the Householder matrix by using matrix exponential, *International Journal of Applied Mathematics*, Vol. 7, No. 3 (2001), 289-308. (國科會大學生研究專案 NSC-88-2815-C-019-003-E 補助)
12. Chen, J. T., Lee, C. F., Lin, S. Y., A new point of view for the polar decomposition using singular value decomposition, *International Journal of Computational and Numerical Analysis and Applications*, Vol. 2, No. 3 (2002), 257-264.(國科會大學生研究專案 NSC-90-2815-C-022-005-E 補助)

13. Chen, J. T. and Wu, C. S., Alternative derivations for the Poisson integral formula, Integral formula, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, Vol.37, No.2, pp.165-185, 2006.
14. Golub, G. H. and Van Loan, C. F., *Matrix Computations*, 2nd edition, The Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1989.
15. Greenberg, M. D, *Application of Green's functions in science and engineering*, Prentice-Hall, New Jersey., 1971.
16. Kreyszig, E., *Advanced engineering mathematics*, Wiley, New York, 1988.
17. O'Neil, P.V., *Advanced engineering mathematics*, Thomson, Boston, 1995.
18. Riley, K. F., Hobson M.P., and Bence S.J., *Mathematical methods for physics and engineering*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
19. Sommerfeld, A., *Partial differential equations in physics*, Academic Press, New York, 1949.
20. Thomson, W., *Maxwell in his treatise*, Vol.I., Chap. XI, quotes a paper in the Cambridge and Dublin Math. Journ. of 1848.
21. Wu H.C., *Continuum Mechanics and Plasticity*, CRC Press, 2005.
22. 陳正宗, 工程數學教學經驗談, 工程力學與數學創意教學研討會, 台北, 2004。
23. 陳正宗與洪宏基, 邊界元素法, 新世界, 台北, 1992。
24. 葉東進, 君子不器—談高中微積分的教學, 數學傳播季刊, 第十八卷第三期, 一~三頁, 民國八十三年九月。
25. 楊維哲, 對微積分教學的一些小意見, 數學傳播季刊, 第十八卷第三期, 一~二頁, 民國八十三年九月。
26. 何昌俊, 數學教學中加強師生思維的共振, 數學傳播季刊, 第二十一卷第二期, 八十五~九十二頁, 民國八十六年六月。
27. 王湘君, 我的教學心路歷程, 數學傳播季刊, 第二十一卷第四期, 四十六~四十七頁, 民國八十六年十二月。

—本文作者現任教於海洋大學河海工程學系特聘教授—