高等數學學習叢書

偏微分方程

—原理及題解—

編著者 孫家樂
曹淑芳
楊琪瑜

中央圖書出版社出版

第四章　達朗貝爾法與積分變換法

第一節　達朗貝爾法

達朗貝爾法(D'Alembert's method)又稱爲行波(progressing wave)法,是解波動方程柯西問題的一種方法,這種方法的核心就是應用一維波動方程的達朗貝爾公式和三維波動方程的泊松公式。而達朗貝爾方法的思路是通過變量代換後直接積分,因此它的應用範圍不局限於波動方程,也適用於某些其它類型的偏微分方程。

一維波動方程的柯西問題

一、弦振動方程的達朗貝爾公式

對於弦振動問題,如果考察的弦很長而所需知道的又只是在較短的時間且離邊界較遠的一段範圍内的振動情况,那末在端點的邊界條件的影響就可忽略不計,從而就把所考慮的弦認爲是無限長,這樣,問題就可以歸結爲没有邊界條件只有初始條件的柯西問題。

我們先來討論無界弦的自由振動問題:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (-\infty < x < \infty,\ t > 0) \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) \end{cases} \tag{4.1}$$

(4.1)式中方程的特徵方程爲

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - a^2 = 0$$

得兩族特徵綫

$$x + at = c_1, \quad x - at = c_2$$

作變换

$$\begin{cases} \xi = x - at \\ \eta = x + at \end{cases}$$

將 u 看成 ξ, η 的函數,於是求導後代入(4.1)中的方程,得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}=0$$

對它先對 ξ 積分,得 $\frac{\partial u}{\partial \eta}=f(\eta)$, 再對 η 積分,得

$$u=\int f(\eta)d\eta+G(\xi)=F(\eta)+G(\xi)$$

因而(4.1)中方程的通解有以下形式:

$$u(x,t)=F(x+at)+G(x-at) \tag{4.2}$$

利用(4.1)中的初始條件得

$$u\big|_{t=0}=F(x)+G(x)=\varphi(x)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=a[F'(x)-G'(x)]=\psi(x)$$

將上面第二式積分,得

$$F(x)-G(x)=\frac{1}{a}\int_{x_0}^{x}\psi(\xi)d\xi+C$$

其中 x_0, C 是任意常數。解出

$$F(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)+\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}\psi(\xi)d\xi+\frac{C}{2}$$

$$G(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)-\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}\psi(\xi)d\xi-\frac{C}{2}$$

把 $F(x)$, $G(x)$ 代入(4.2)式就得定解問題(4.1)的解爲

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi \tag{4.3}$$

(4.3)式稱爲達朗貝爾公式(D'Alembert's formula)。

二、達朗貝爾公式的物理意義

我們將達朗貝爾公式(4.3)改寫成

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi\\&=\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}[\Psi(x+at)-\Psi(x-at)]\\&=f_1(x+at)+f_2(x-at)\end{aligned}$$

第一個函數 $f_1(x+at)$ 相當於圖形 $f_1(x)$ 向左移動了一段距離 at, 即 $f_1(x+at)$ 是一個以速度 a 沿 x 軸負向傳播的行波,稱爲左傳播波。同理, $f_2(x-at)$ 是一個以速度 a 沿 x 軸正向傳播的行波,這樣達朗貝爾公式的物理意義就是: 對於無限長的弦的自由振動,任意擾動總是以行波的形式以波速 a 分別向左、右方向傳播出去,因此達朗貝爾方法又稱爲行波法。