薄膜振動的模式

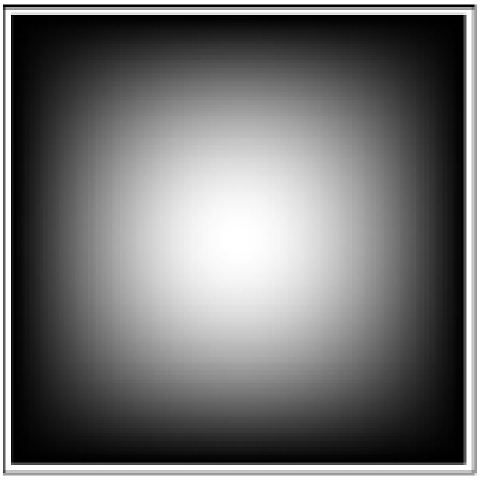
薛哲修、楊淳青
國立彰化師範大學物理系
e-mail: phyan@cc.ncue.edu.tw

摘　要
方形、圓形，橢圓形薄膜振盪模式的比較，以及橢圓幾何的介紹。

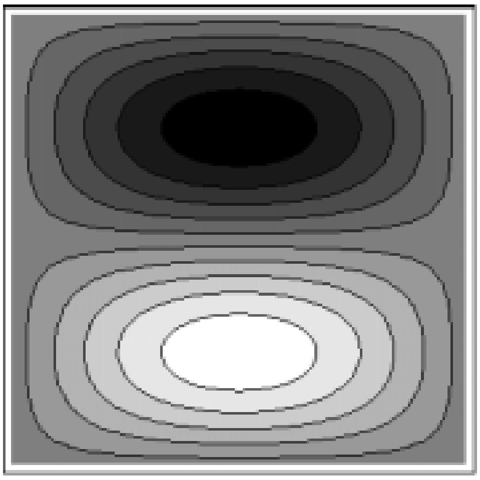
一、 前言

薄膜振盪問題在數學物理領域裡是個很經典的問題, 幾乎所有的數學物理課本都對二維方形以及圓形的薄膜振盪有詳盡的介紹, 所以本文並不著重於介紹方形及圓形薄膜. 事實上圓形薄膜振盪模式的研究在 1764 年時 L. Euler 已經確定了圓形振盪模式可以用 Bessel functions 的線性組合來表示, 然而不同幾何形狀的薄膜, 如橢圓形的薄膜還是具有一些有趣的現象值得去深入的探討。

橢圓幾何的研究可追溯到 1868 年 E. Mathieu 的研究[1]。他引進了這個後來以他的名字命名的特殊方程式, 並且發現橢圓形薄膜的振盪模式可以寫成 Mathieu functions 的線性組合。有關橢圓這類問題的文獻只有在一些特殊的書才有簡短的敘述, 較少完整的介紹，所以本文的另一個主題將放在以 Mathieu functions 來分析橢圓形薄膜的振盪模式。



圖一、(1,1)

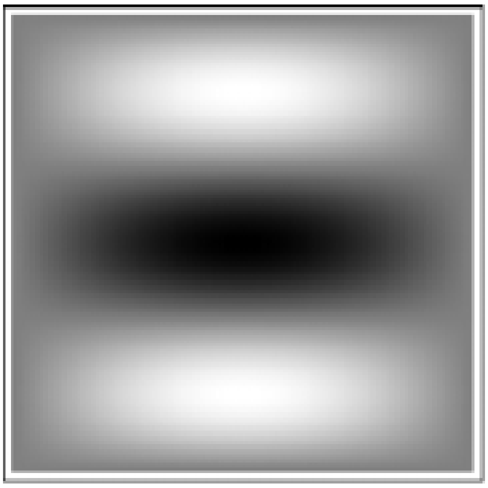


圖二、(1,2)

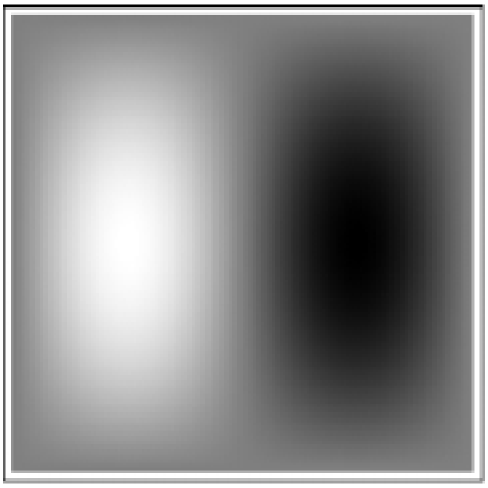
二、方形薄膜

方形薄膜振盪模式不含時間的波函數

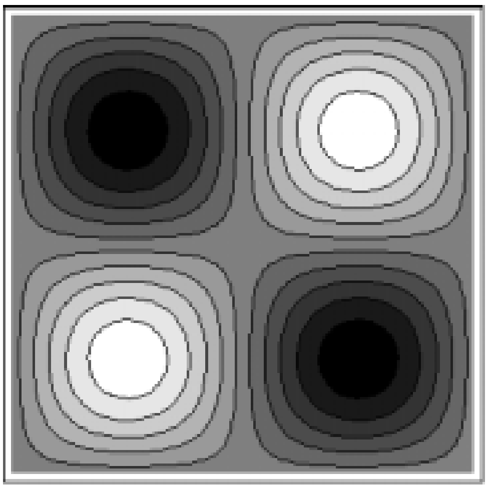
$$\psi(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}C_{nm}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \qquad (1)$$



圖三、(1,3)



圖四、(2,1)



圖五、(2,2)

圖一到圖五為方形薄膜不同的單一模式振盪的波函數圖形，圖一、圖三、圖四以及圖二、圖五分別以密度圖及等高線圖呈現，白色代表波函數值為正，顏色越亮表示值正的越大，黑色代表波函數值為負，顏色越暗表示值負的越大，數對(n,m)標示為以該種模式振盪。

三、圓形薄膜

圓形膜振動所滿足之波動方程式：

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial^2}{v^2\partial t^2}\psi = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}\psi + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\psi + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right) \qquad (3)$$

(極座標)

ψ 所滿足之邊界條件：$\psi(a,\phi,t) = 0$

令 $\psi(r,\phi,t) = R(r)f(\phi)T(t)$

$$\rightarrow \frac{T''}{v^2T} = \frac{R'' + \frac{1}{r}R'}{R} + \frac{f''}{r^2 f} = -\alpha^2 \text{ (常數)}$$

$$\rightarrow T(t) = \cos(\alpha vt + \delta) \qquad (4)$$

$$\frac{r^2R'' + rR'}{R} + \alpha^2 r^2 = -\frac{f''}{f} \equiv m^2 \text{ (常數)}$$

$$f(\phi) = \begin{cases}\cos(m\phi)\\ \sin(m\phi)\end{cases} \qquad (m = 1,2,3,\ldots)$$

($\because\ f(\phi + 2\pi) = f(\phi)$)

$$r^2R'' + rR' + (\alpha^2r^2 - m^2)R = 0$$

令 $x \equiv \alpha r$， $R(r) \equiv J(x)$

$$x^2J'' + xJ' + (x^2 - m^2)J = 0 \qquad (5)$$

***m* 階 Bessel's eq.**

其規則解為：

$$J_m(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i!(i+m)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2i+m} \qquad (6)$$

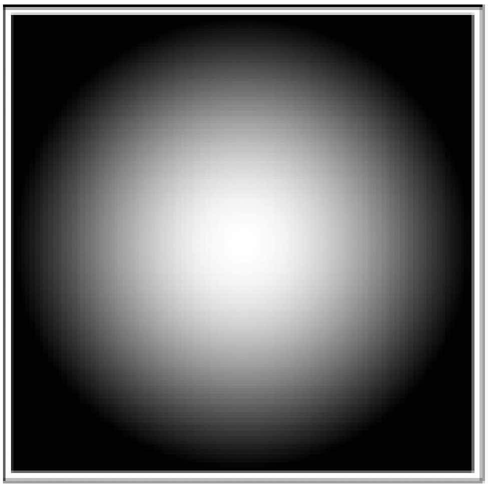
m 階 Bessel 函數[2]

邊界要求 $J_m(\alpha a)=0$

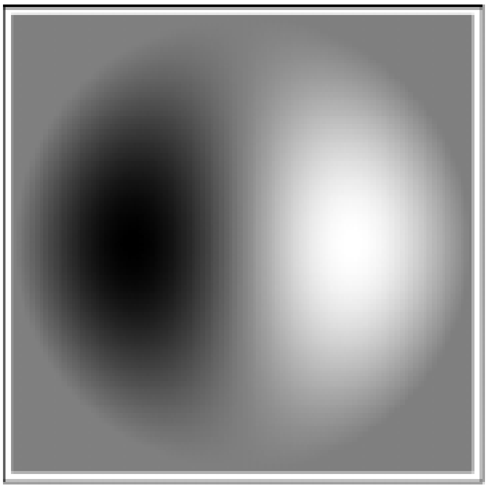
$$R_{nm}(r)=J_m\left(\frac{k_{nm}r}{a}\right) \qquad (n=1,2,3,\ldots)$$

k_{nm} 為 $J_m(x)=0$ 第 n 個根(解、節點) 圓形膜振動模式(不含時間)之一般解：

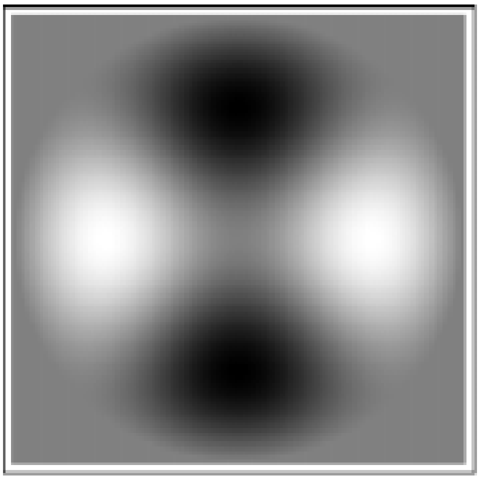
$$\psi=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}J_m\left(\frac{k_{nm}r}{a}\right)(g_{nm}\cos m\phi+p_{nm}\sin m\phi) \qquad (7)$$



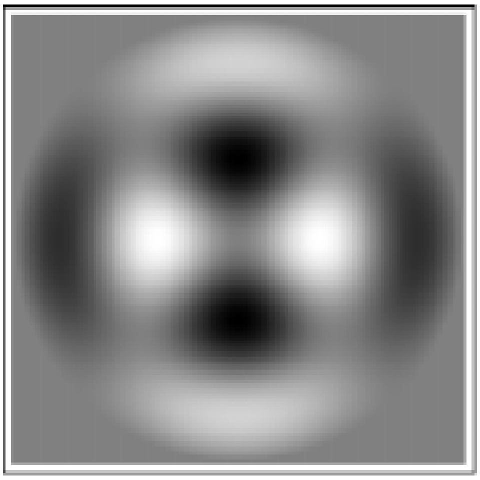
圖六、(0,1)



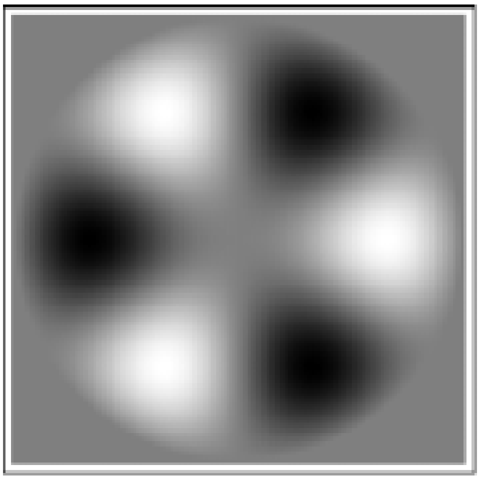
圖七、(1,1)



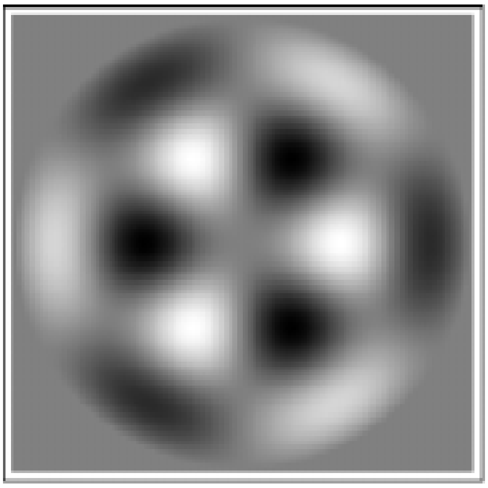
圖八、(2,1)



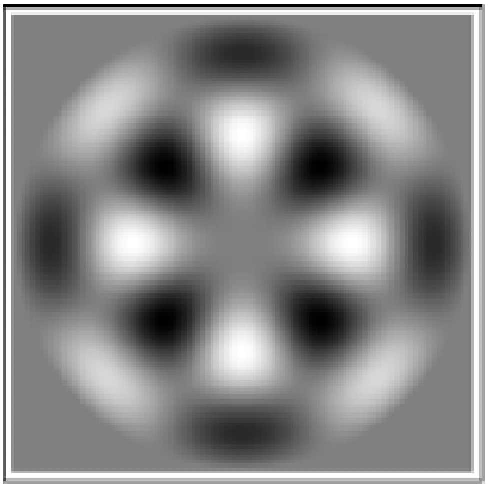
圖九、(2,2)



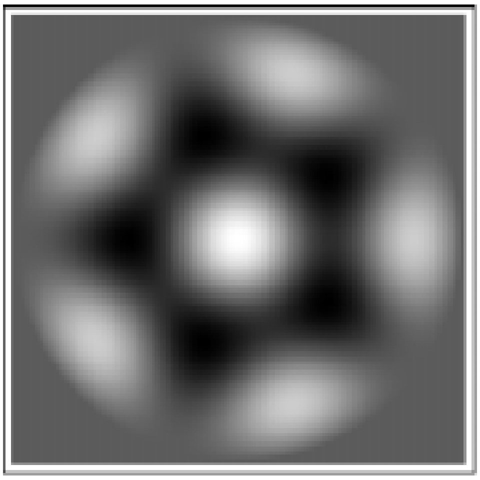
圖十、(3,1)



圖十一、(3,2)



圖十二、(4,2)



圖十三、A*(5,1)+B*(0,3)

圖六到圖十二為圓形薄膜不同的單一種模式的波函數密度圖，數對(m,n)標示振盪模式為第 m 階 Bessel function，邊界為第 n 個節點。圖十三為兩種模式作線性組合的波函數圖形，A、B 為線性組合的係數。

四、橢圓形薄膜

橢圓形薄膜依然符合波動方程式(2)，而為契合橢圓形的邊界我們可以令

$$x = f\cosh(\xi)\cos(\eta) \tag{8}$$

$$y = f\sinh(\xi)\sin(\eta) \tag{9}$$

定義域為

$0 \le \xi < \infty$，$0 \le \eta < 2\pi$

Laplacian operator 的廣義座標表示方式為

$$\nabla^2 = \sum_i \frac{1}{h_i^2}\frac{\partial^2}{\partial q_i^2} \tag{10}$$

令$q_1 = \xi$，$q_2 = \eta$ 可推得

$$h_1 = h_2 = \sqrt{\frac{1}{2}(\cosh 2\xi - \cos 2\eta)} \tag{11}$$

我們可以很輕易的得到 Laplacian operator 的橢圓座標表示方式

$$\frac{2}{f^2(\cosh 2\xi - \cos 2\eta)}\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right)\psi = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi \tag{12}$$

在這裡波函數

$$\psi = \psi(\xi,\eta,t) = R(\xi)\Theta(\eta)T(t) \tag{13}$$

利用分離變數我們可以得到以下三個微分方程式

$$T''(t) + k^2v^2T(t) = 0 \tag{14}$$

$$R''(\xi) - (\alpha - 2q\cosh 2\xi)R(\xi) = 0 \tag{15}$$

$$\Theta''(\eta) + (\alpha - 2q\cos 2\eta)\Theta(\eta) = 0 \tag{16}$$

這裡α 為分離變數常數，$q = \dfrac{k^2 f^2}{4}$。

輕易得到(14)式的解為

$$T(t) = \cos(\omega t + \delta) \tag{17}$$

這裡定義$\omega = kv$。

而(15)，(16)式則分別為 *Modified Mathieu Equation* (MME)，以及 *Ordinary Mathieu Equation* (OME)，其解分別為 *Modified Mathieu Functions* (MMF)，以及 *Ordinary Mathieu Functions* (OMF)。

以下我們介紹如何求得 Mathieu Equation 的解。

我們必須要求 OME(16)式為一週期性函數，週期為 2π。那麼 α 則會滿足 Mathieu functions 的特徵值；如果函數是對稱的，將滿足 even Mathieu functions 的特徵值 $\alpha_r(q)$，$(r=0,1,2,3,...)$，若為反對稱則滿足 odd Mathieu functions 的特徵值 $\beta_r(q)$，$(r=1,2,3,4,...)$。下標 r 為階數。

接著如何求特徵值就變成我們做重要的工作了。我們將(14)式作 Fourier 級數展開[3][4][5]

$$\Theta(q,\eta)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[A_k(q)\cos k\eta+B_{k+1}(q)\sin(k+1)\eta\right] \quad (18)$$

可將(18)式分成以下兩部分

$$ce_r(q,\eta)=\sum_{k=0}^{\infty}A_k(q)\cos k\eta \quad (19)$$

$$se_{r+1}(q,\eta)=\sum_{k=1}^{\infty}B_k(q)\sin k\eta \quad (20)$$

(19)及(20)式分別為第 r 階的 *even Mathieu function*，以及第 $r+1$ 階的 *odd Mathieu function*。

將(19)、(20)式代入(16)式我們可以得到特徵值 α_r、β_r 與 Fourier 係數 A_k、B_k 的遞歸關係。我們分別討論 r 為偶數及奇數的情形

$ce_{2n}:(\alpha=\alpha_{2n});(k\geq 2)$

$$\alpha A_0=qA_2 \quad (21)$$

$$(\alpha-4)A_2=q(2A_0+A_4) \quad (22)$$

$$\left[\alpha-(2k)^2\right]A_{2k}=q(A_{2k-2}+A_{2k+2}) \quad (23)$$

$ce_{2n+1}:(\alpha=\alpha_{2n+1});(k\geq 1)$

$$(\alpha-1)A_1=q(A_1+A_3) \quad (24)$$

$$\left[\alpha-(2k+1)^2\right]A_{2k+1}=q(A_{2k-1}+A_{2k+3}) \quad (25)$$

$se_{2n+2}:(\alpha=\beta_{2n+2});(k\geq 2)$

$$(\alpha-4)B_2=qB_4 \quad (26)$$

$$\left[\alpha-(2k)^2\right]B_{2k}=q(B_{2k-2}+B_{2k+2}) \quad (27)$$

$se_{2n+1}:(\alpha=\beta_{2n+1});(k\geq 1)$

$$(\alpha-1)B_1=q(B_3-B_1) \quad (28)$$

$$\left[\alpha-(2k+1)^2\right]B_{2k+1}=q(B_{2k-1}+B_{2k+3}) \quad (29)$$

為了讓上述的遞歸關係有週期解，特徵值必須滿足下列的連續分數

$$V_0=\frac{2}{V_{2-}}\frac{1}{V_{4-}}\frac{1}{V_{6-}}......\text{；}\alpha\text{ 的解為 }\alpha_{2n} \quad (30)$$

$$V_1-1=\frac{1}{V_{3-}}\frac{1}{V_{5-}}\frac{1}{V_{7-}}......\text{；}\alpha\text{ 的解為 }\alpha_{2n+1} \quad (31)$$

$$V_2=\frac{1}{V_{4-}}\frac{1}{V_{6-}}\frac{1}{V_{8-}}......\text{；}\alpha\text{ 的解為 }\beta_{2n+2} \quad (32)$$

$$V_1+1=\frac{1}{V_{3-}}\frac{1}{V_{5-}}\frac{1}{V_{7-}}......\text{；}\alpha\text{ 的解為 }\beta_{2n+1} \quad (33)$$

在這裡

$$V_j=\frac{(\alpha-j^2)}{q};(j\geq 0) \quad (34)$$

既然特徵值可由(28)式到(31)式求得，而利用遞歸關係也可求得 Fourier 係數 A_k、B_k，最後 OMF 可表示為

$$ce_{2n}(q,\eta)=\sum_{k=0}^{\infty}A_{2k}(q)\cos 2k\eta \quad (35)$$

$$ce_{2n+1}(q,\eta)=\sum_{k=0}^{\infty}A_{2k+1}(q)\cos(2k+1)\eta \quad (36)$$

$$se_{2n+2}(q,\eta)=\sum_{k=0}^{\infty}B_{2k+2}(q)\sin(2k+2)\eta \quad (37)$$

$$se_{2n+1}(q,\eta)=\sum_{k=0}^{\infty}B_{2k+1}(q)\sin(2k+1)\eta \quad (38)$$

從 sine 及 cosine 級數的正交性質我們可以發現 OMF(ce_r 及 se_{r+1})也具有正交性質

$$\int_0^{2\pi} ce_m(q,z)ce_p(q,z)dz$$

$$=\int_0^{2\pi} se_m(q,z)se_p(q,z)dz$$

$$=\begin{cases}\pi & m=p\\ 0 & m\neq p\end{cases} \qquad (39)$$

將(35)式到(38)式分別代入(39)式可得到歸一化關係

$$2A_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}A_{2k}^2=\sum_{k=0}^{\infty}A_{2k+1}^2$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}B_{2k+2}^2=\sum_{k=0}^{\infty}B_{2k+1}^2=1 \qquad (40)$$

而(15)式 MME 的求解可從(16)式 OME 中作變數變換$\eta=i\xi$ 即可求得，從(35)式到(38)式可得

$$Ce_{2n}(q,\xi)=\sum_{k=0}^{\infty}A_{2k}(q)\cosh 2k\xi \qquad (41)$$

$$Ce_{2n+1}(q,\xi)=\sum A_{2k+1}(q)\cosh(2k+1)\xi \qquad (42)$$

$$Se_{2n+2}(q,\xi)=\sum_{k=0}^{\infty}B_{2k+2}(q)\sinh(2k+2)\xi \qquad (43)$$

$$Se_{2n+1}(q,\xi)=\sum_{k=0}^{\infty}B_{2k+1}(q)\sinh(2k+1)\xi \qquad (44)$$

$Ce_r(q,\xi)$、$Se_{r+1}(q,\xi)$分別為第 r 階的 *even modified Mathieu function*，以及第 $r+1$ 階的 *odd modified Mathieu function*。

最後我們可以求得空間部分的波函數為

$$U(\xi,\eta)=\sum_{r=0}^{\infty}R_r(\xi)\Theta_r(\eta)$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\begin{cases}Ce_r(q,\xi)ce_r(q,\eta)\\ Se_{r+1}(q,\xi)se_{r+1}(q,\eta)\end{cases} \qquad (45)$$

$U_{r,n}(\xi,\eta)$可分為

even mode ${}_oU_{r,n}(\xi,\eta)=Ce_r(q,\xi)ce_r(q,\eta)$,

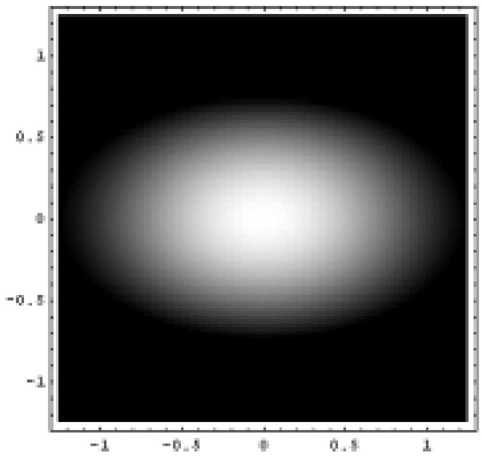
odd mode ${}_eU_{r,n}(\xi,\eta)=Se_r(q,\xi)se_r(q,\eta)$,

結合(17)式我們可以得到完整的波函數

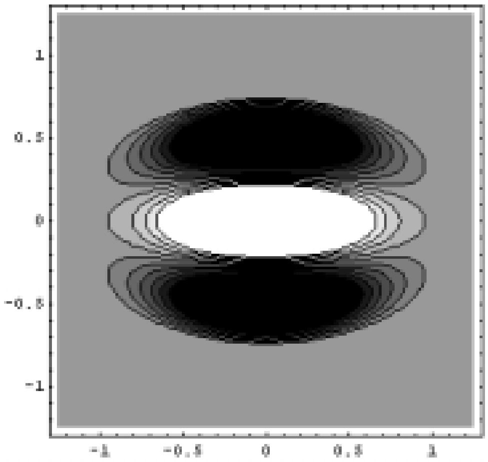
$$\psi(\xi,\eta,t)=U(\xi,\eta)\times\cos(\omega t) \qquad (46)$$

其中$q=\dfrac{k^2f^2}{4}$。

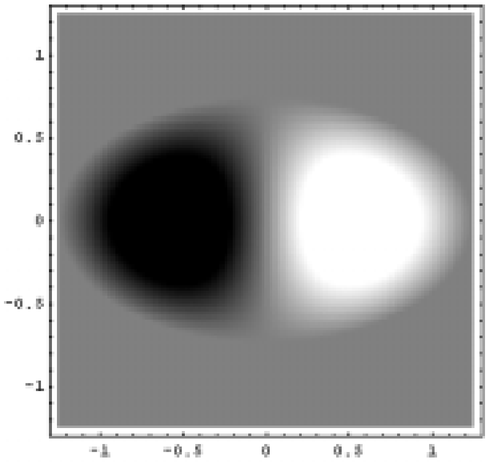
圖十四到圖二十七為橢圓形薄膜不同的單一種模式(even 或 odd)的波函數圖形，數對(r,n)標示模式為第 r 階 Mathieu function，邊界為第 n 個節點，even 表示為 even mode，odd 表示為 odd mode。圖二十八為兩種模式作線性組合之後波函數的圖形，A、B 為線性組合的係數，以下圖十四到圖二十八橢圓形薄膜我們取離心律 e 為 0.8。



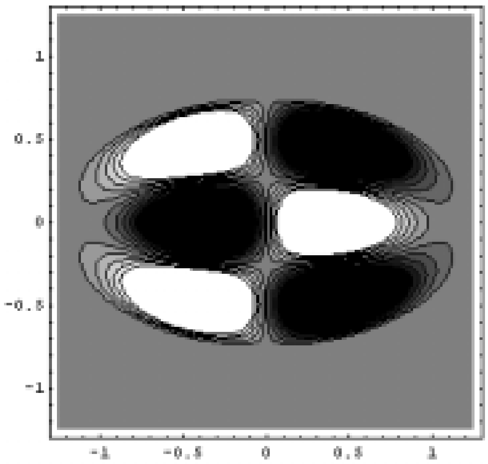
圖十四、even (0,1)



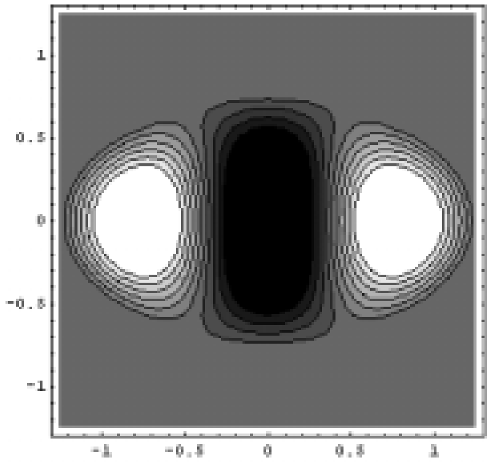
圖十五、**even (0,2)**



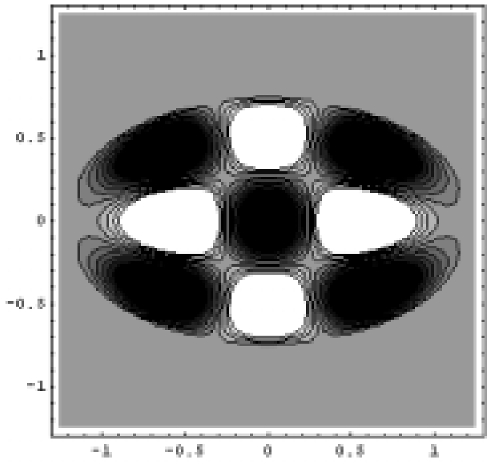
圖十六、**even (1,1)**



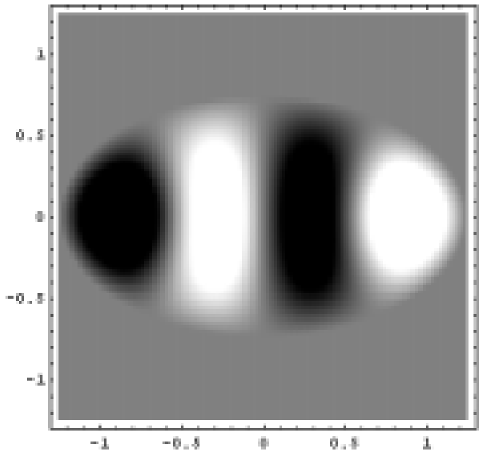
圖十七、**even (1,2)**



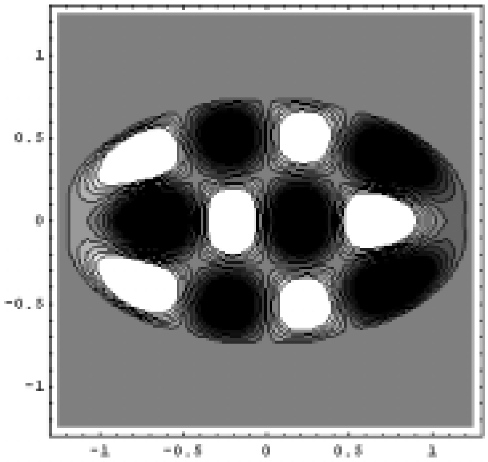
圖十八、**even (2,1)**



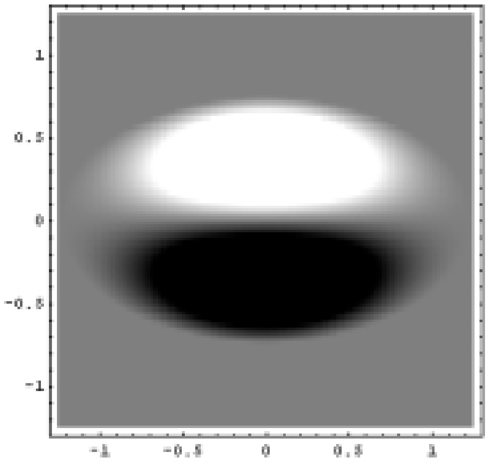
圖十九、**even (2,2)**



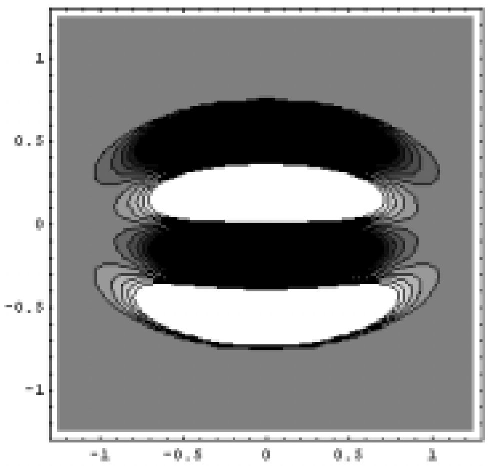
圖二十、**even (3,1)**



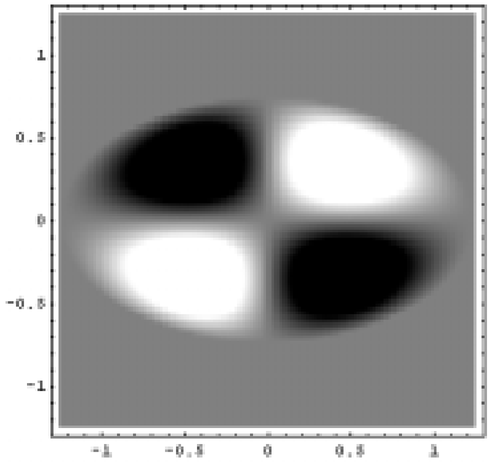
圖二十一、**even (3,2)**



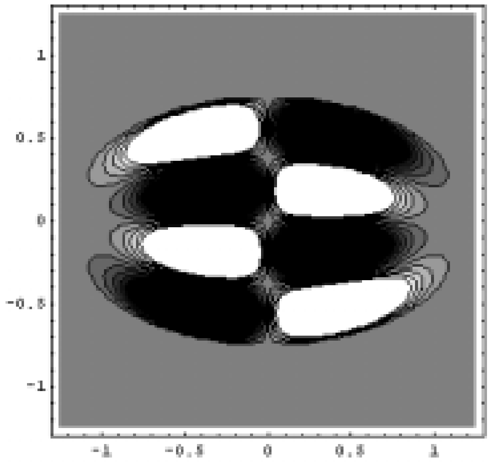
圖二十二、**odd (1,1)**



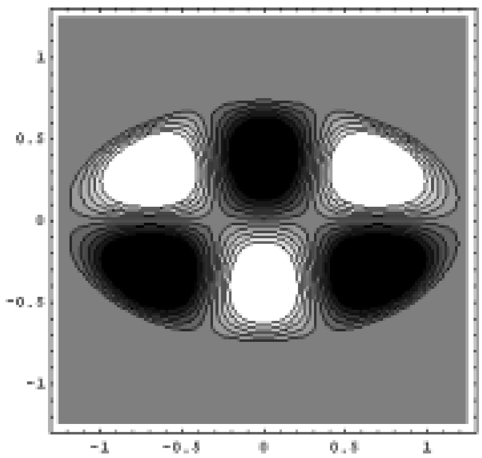
圖二十三、**odd (1,2)**



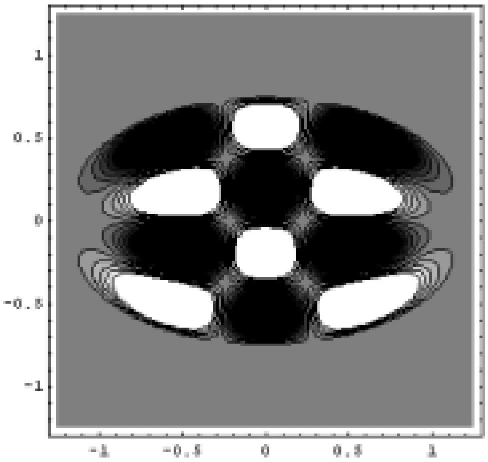
圖二十四、**odd (2,1)**



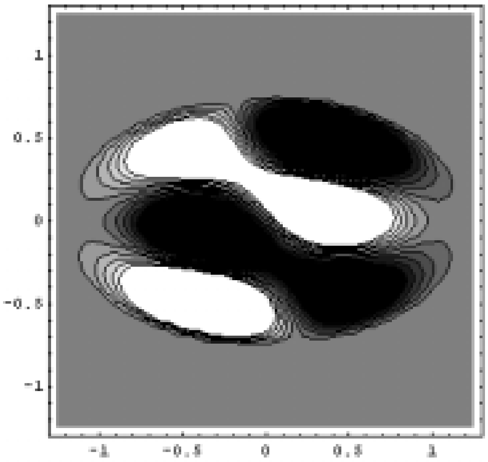
圖二十五、**odd (2,2)**



圖二十六、**odd (3,1)**



圖二十七、odd (3,2)



圖二十八、A*even (1,2)+B*odd (1,2)

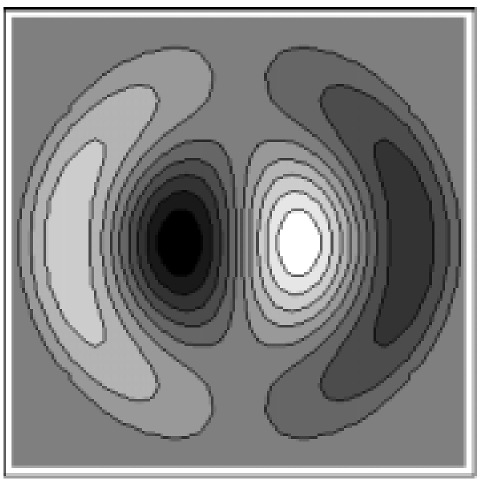
五、結果與討論

橢圓薄膜振盪除了基音振盪$(r=0)$之外，波函數均可分解成 even mode $_{e}U_{r,n}$ 以及 odd mode $_{o}U_{r,n}$；even mode 振盪與橢圓的長軸有關，而 odd mode 則與橢圓的短軸有關，當然這在圓形薄膜並無差別，所以圓形薄膜振盪的波函數角度部分本文只選擇角度波函數為 cosine 的圖形。

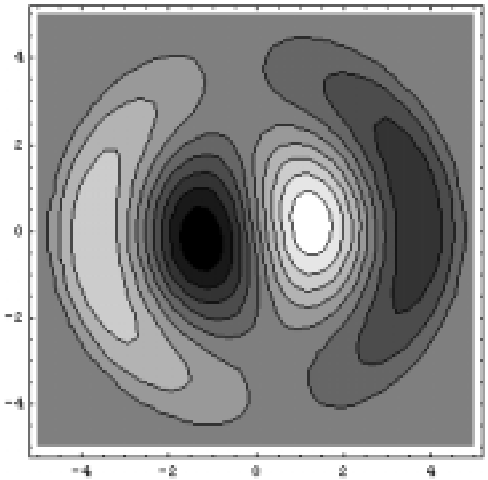
特定的 mode $U_{r,n}$ 包含了 even mode 以及 odd mode，分別以不同的特徵頻率振盪，因此顯然地橢圓薄膜振盪的花紋會隨時間改變，而圓形薄膜的花紋將不隨時間改變；原因為橢圓薄膜振盪的每一種 mode 均包含了 even 及 odd mode。(基音振盪除外)

基本上 odd mode 的振盪頻率快於 even mode 的振盪頻率，但隨著離心律 e 的減少，兩者的振盪頻率會越來越接近，所以當$e \to 0$時，even mode 以及 odd mode 的振盪頻率相當於圓形薄膜的振盪頻率。以下圖二十九為圓形薄膜(1,2)模式以及圖三十為橢圓薄膜(1,2)模式，橢圓的離心律 e=0.2。

文章裡我們不僅介紹了方形、圓形薄膜，以及橢圓形薄膜，也比較了圓形薄膜與橢圓形薄膜的異同之處，更介紹了如何解析橢圓幾何的方法，以及橢圓薄膜特徵頻率的求法。橢圓幾何的分析為一求本徵值與本徵函數的問題，我們希望研究這類本徵值問題不論是對計算物理的發展或數學物理的教學都可以有著相當大的助益。



圖二十九、圓形薄膜(1,2)



圖三十、橢圓薄膜，離心律 e=0.2,
$U_{12} = {}_{e}U_{12} + {}_{o}U_{12}$

六、參考文獻

[1]Emile Mathieu , Jour. de Math. Pures et Appliquées (Jour. de Liouville)13 (1868) 137

[2]George B. Arfken , Hans-Jurgen Weber Mathematical Methods For Physicists

[3]N. W. McLachlan , Theory and application of Mathieu functions , (Oxford Press , UK , 1951)

[4]Lawrence Ruby , Am. J. Phys. 64 (1996) 39

[5]M. Abramowitz and I. Stegun , Handbook of Mathematical functions , (Dover , USA , 1965)