邊界元素法第四次作業 by J. T. Chen

1. 有限差分法

   吾人可將微分式以差分關係表成下式:

$$\frac{\partial u^{+}}{\partial x}\Big|_{(x,y)}=\frac{u(x+h,y)-u(x,y)}{h} \tag{1}$$

$$\frac{\partial u^{-}}{\partial x}\Big|_{(x,y)}=\frac{u(x,y)-u(x-h,y)}{h} \tag{2}$$

$$\frac{\partial u^{+}}{\partial y}\Big|_{(x,y)}=\frac{u(x,y+h)-u(x,y)}{h} \tag{3}$$

$$\frac{\partial u^{-}}{\partial y}\Big|_{(x,y)}=\frac{u(x,y)-u(x,y-h)}{h} \tag{4}$$

   上式中，h 表示x 及y 方向之增量。

   同理可推廣到二次偏微時，可得

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{-2u(x,y)+u(x+h,y)+u(x-h,y)}{h^2} \tag{5}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{-2u(x,y)+u(x,y+h)+u(x,y-h)}{h^2} \tag{6}$$

   因此原控制方程式(1.1)，可以差分形式表示如下:

$$\frac{u(x+h,y)+u(x-h,y)+u(x,y+h)+u(x,y-h)-4u(x,y)}{h^2}=0 \tag{7}$$

   上式表明: Laplace 場分佈在該點值為左右鄰居的平均。

2. 邊界元素法一維的例子:
3. 邊界元素法二維的例子 (方型):
4. 邊界元素法二維的例子 (圓型): Poisson integral formula

   二維內域

$$u(s)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-\rho^2}{R^2+\rho^2-2R\rho\ cos(\theta)}f(\theta)d\theta$$

   二維外域

$$u(\rho,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\rho^2-R^2}{R^2-\rho^2-2R\rho\ cos(\theta-\theta')}f(\theta')d\theta'$$

5. 邊界元素法三維的例子 (方塊):
6. 邊界元素法三維的例子 (球体):

   三維外域

$$u(\rho,\psi,\theta)=\frac{R(R^2-\rho^2)}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{R^2+\rho^2-2R\rho\ cos(\gamma)}f(\psi',\theta')sin(\psi')d\psi'd\theta'$$

   其中， $cos(\gamma)=cos(\bar{\psi})cos(\psi)+sin(\bar{\psi})sin(\psi)cos(\theta'-\theta)$ 。