

第四章

彈力與裂縫問題應用

4.1 簡介

積分方程理論早在 1900 年就已引起學者如 Fredholm 等的研究興趣，後經 Hilbert 的帶領風潮，使該理論一直發展到 1940 年也漸告成熟，但由於計算器的缺乏，使得其在實際工程上的應用甚為有限，因此也就沉寂一時。直到 1950 年電腦問世後，許多數值方面的大量運算可藉由電腦來克服，因此，又再度引起工程師們的注意。於 1967 年 Rizzo 首先將彈力積分方程離散而以數值方法來解析彈力的問題，而後 Cruse 更將其推廣到含裂縫問題的應用。由於今日泛函、數值及有限元素法的能量已大大提升，使積分方程的數值應用日益廣泛。本章係依據第一章所述之 U, T, L, M 核函數理論，配合第二章的數值處理技巧，進行邊界元素法在彈力的應用介紹。本章和第三章 Laplace 方程最大的不同在於由純量勢能推廣到向量勢能。文中擬以本書導得的對偶積分式為主幹，說明現今文獻中的各種方法，均可由此對偶積分式來導得，並可將其應用在含裂縫問題的彈力解析上，以得相互輝映之效。

4.2 彈力域內積分式的推導

本節將推導彈性力學問題的域內點對偶邊界積分方程式，其原理與第三章的理論相類似，以下將分四種方式推導 (1) Betti 定理，(2) 殘餘法，(3) 物理觀念，(4) 變分法。分別敘述如下：

4.2.1 Betti 定理

由彈性力學的功能互換原理可知，若有二彈性體皆處於平衡狀態，而其位移場、曳引力場、微體力場分別為 (u_i, t_i, b_i) 與 (u_i^*, t_i^*, b_i^*) ，則由 Betti 的功能互換定理可知

$$\int_D (u_i b_i^* - u_i^* b_i) dV = - \int_B (u_i t_i^* - u_i^* t_i) dB \quad (4.1)$$

其中， D 表示定義域， B 表示邊界。上式可根據 § 1.5 節所提的自我伴隨運算元的定義，寫成下式

$$(Lu | v) = (u | Lv)$$

其中， u 與 v 為兩個彈力場，而

$$L = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & -B \end{bmatrix}$$

若考慮等向性材料，則 D 與 B 分別代表如下運算元：

Navier 運算元：

$$D_{ij} = (\lambda + G) \partial_i \partial_j + G \delta_{ij} \partial_k \partial_k$$

曳引力運算元：

$$B_{ij} = \lambda n_i \partial_j + G(n_j \partial_i + \delta_{ij} n_k \partial_k)$$

其中， λ, G 為 Lamé 常數， n_i 為方向餘弦， δ_{ij} 表示 Kronecker 符號，當 $i = j$ 時，其值為 1，當 $i \neq j$ 時，則為 0， ∂_k 表示對 k 方向之空間偏微。

若考慮兩個彈力平衡狀態 u_j, u_j^* ，則平衡方程式可分別寫成

$$D_{ij} u_j + b_i = 0, \quad x \text{ in } D$$

$$D_{ij} u_j^* + b_i^* = 0, \quad x \text{ in } D$$

曳引力場可寫成

$$B_{ij} u_j(x) = t_i(x)$$

$$B_{ij} u_j^*(x) = t_i^*(x)$$

若考慮 (u_i^*, t_i^*, b_i^*) 為基本解如下：

$$u_i^* = v_i = U_{ij}(x, s) \quad (4.2)$$

$$t_i^* = B_{ik} v_k = B_{ik} U_{kj}(x, s) = T_{ij}(x, s) \quad (4.3)$$

$$b_i^* = -D_{ik} v_k = -D_{ik} U_{kj}(x, s) = \delta_{ij}(x, s) \quad (4.4)$$

其中， $U_{ij}(x, s)$ 與 $T_{ij}(x, s)$ 分別代表基本解，亦可稱為 Kelvin 解，分別說明如下：

(1) $U_{ij}(x, s)$ ：表示於 s 處施以 j 方向之集中力，在 x 處所產生 i 方向之位移場。

(2) $T_{ij}(x, s)$ ：表示於 s 處施以 j 方向之集中力，在 x 處所產生 i 方向之曳引力場。

將基本解 (* 系統)，代入式 (4.1) 且假設 $b_i = 0$ 可導得

$$\int_B (U_{ij}(x, s)t_i(x) - T_{ij}(x, s)u_i(x))dB(x) = \begin{cases} u_j(s), & s \in D_i \\ 0, & s \in D_e \end{cases} \quad (4.5)$$

其中， D_i 和 D_e 分別表示域內與域外。吾人若定義： x 為場點， s 為源點，為配合在 §

4.2.3 小節物理意義說明，則上式可改寫成

$$\int_B (U_{ki}(s, x)t_k(s) - T_{ki}(s, x)u_k(s))dB(s) = \begin{cases} u_i(x), & x \in D_i \\ 0, & x \in D_e \end{cases} \quad (4.6)$$

上式若從彈性力學解存在且唯一的觀點而言，可說成解的積分表示式 (integral representation)。對數值方法之應用而言，為建立一套完整邊界元素法理論，上式對含退化邊界問題而言，若僅對邊界作離散，欲定出唯一解，是不夠的。因此，需再建立另一方程式，即對上述之位移場作曳引力運算可得

$$\int_B (L_{kp}(s, x)t_k(s) - M_{kp}(s, x)u_k(s))dB(s) = \begin{cases} t_p(x), & x \in D_i \\ 0, & x \in D_e \end{cases} \quad (4.7)$$

其中

$$L_{kp}(s, x) = B_{pi}(\partial, n_x)\{U_{ki}(s, x)\} \quad (4.8)$$

$$M_{kp}(s, x) = B_{pi}(\partial, n_x)\{T_{ki}(s, x)\} \quad (4.9)$$

$B_{pi}(\partial, n_x)$ 表示對位移場 $u_i(x)$ 之曳引力運算元。

式 (4.6) 與 (4.7) 中，因 x 不在邊界上，且取 $x \in D_i$ ，則可稱為域內點對偶邊界積分式，也可稱為域內點的對偶邊界積分式。

4.2.2 殘餘法

考慮如下圖 4.1 典型之彈性力學問題

圖 4.1 典型彈性力學問題

控制方程式:

$$D_{ij}u_j(x) = 0, \quad x \in D$$

邊界條件:

$$u_i(x) = \bar{u}_i(x), \quad x \text{ on } B_1$$

$$t_i(x) = \bar{t}_i(x), \quad x \text{ on } B_2$$

其中， $B = B_1 + B_2$ ， $\bar{u}, \bar{t}$ 表示給定的邊界位移與曳引力。

若吾人定義殘餘值、權函數分別如下:

分布區間	殘餘值	權函數
D	$D_{ij}u_j$	W_{1i}
B_1	$u_i(x) - \bar{u}_i(x)$	W_{2i}
B_2	$t_i(x) - \bar{t}_i(x)$	W_{3i}

由殘餘法定理知最小殘餘值如下:

$$\begin{aligned} \int_D W_{1i}(x) D_{ij}u_j(x) dV(x) &= \int_{B_1} [u_i(x) - \bar{u}_i(x)] W_{2i}(x) dB(x) \\ &\quad - \int_{B_2} [t_i(x) - \bar{t}_i(x)] W_{3i}(x) dB(x) \end{aligned} \quad (4.10)$$

由 D_{ij} 的伴隨運算元特性，並取權函數如下:

$$W_{1i} = U_{ik}(x, s)$$

$$W_{2i} = T_{ik}(x, s)$$

$$W_{3i} = U_{ik}(x, s)$$

則可導得

$$\int_B \{U_{ik}(s, x) t_i(s) - T_{ik}(s, x) u_i(s)\} dB(s) = u_k(x) \quad (4.11)$$

同理，若取權函數為

$$W_{1i} = L_{ik}(x, s)$$

$$W_{2i} = M_{ik}(x, s)$$

$$W_{3i} = L_{ik}(x, s)$$

可得

$$\int_B \{L_{ik}(s, x)t_i(s) - M_{ik}(s, x)u_i(s)\}dB(s) = t_k(x) \quad (4.12)$$

以上兩式 (4.11) 與 (4.12) 所得結果和 § 4.2.1 節 Betti 定理導得相同。

4.2.3 物理意義

積分方程的物理意義不外乎勢位 (Potential) 的觀念，而勢位即是由奇異源 (Singularity source) 產生，因此就有影響函數的疊加理念。基於此，吾人可先定義如下四個核函數：

$U_{ij}(x, s)$ ：表示在 s 處受 j 方向的集中力所造成 x 處 i 方向的位移場。

$U_{ij}^*(x, s)$ ：表示在 s 處受 j 方向的差排所造成 x 處 i 方向的變位場。

$T_{ij}(x, s)$ ：表示在 s 處受 j 方向的集中力所造成 x 處的 i 方向曳引力場。

$T_{ij}^*(x, s)$ ：表示在 s 處受 j 方向的差排所造成 x 處的 i 方向曳引力場。

可參考下表

表 4.1 核函數的物理意義

由疊加原理可列式如下：

$$u_i(x) = \int_B \{U_{ik}(x, s)\phi_k(s) + U_{ik}^*(x, s)\psi_k(s)\}dB(s)$$

$$t_i(x) = \int_B \{T_{ik}(x, s)\phi_k(s) + T_{ik}^*(x, s)\psi_k(s)\}dB(s)$$

其中， $\phi_k(s)$ 表示在邊界上內外曳引力之差，為單層奇異源。而 $\psi_k(s)$ 表示在邊界上內外位移之差，為雙層奇異源。

此節的推導結果與 § 4.2.1 節 Betti 定理與 § 4.2.2 節殘餘法所得看似不同，但其實是相同的，在 § 4.2.5 節中將探討這些核函數間的關係，即可證實。

4.2.4 變分法的推導

由變分原理知，將 $u_i = \bar{u}_i$, x on B_1 的束制條件解除，則變分式可寫成

$$\int_V [\sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} - \bar{b}_i \delta u_i] dV - \int_{B_2} \bar{t}_i \delta u_i dB - \delta \int_{B_1} \sigma_{ij} n_j (u_i - \bar{u}_i) dB = 0 \quad (4.13)$$

可整理得

$$\begin{aligned} \int_D [\delta \bar{b}_k u_k - \bar{b}_i \delta u_i] dV - \int_{B_2} \bar{t}_i \delta u_i dB - \int_{B_1} (\delta \sigma_{ij} n_j) (u_i - \bar{u}_i) dB \\ - \int_{B_1} (\sigma_{ij} n_j) \delta u_i dB + \int_{B_1+B_2} \delta \sigma_{kl} u_k n_l dB = 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

將已知邊界條件代入可得

$$\begin{aligned} \int_D [\delta \bar{b}_k u_k - \bar{b}_i \delta u_i] dV - \int_{B_2} \bar{t}_i \delta u_i dB - \int_{B_1} (\sigma_{ij} n_j) \delta u_i dB \\ + \int_{B_2} \delta \sigma_{kl} u_k n_l dB + \int_{B_2} \delta \sigma_{ij} n_j \bar{u}_i dB = 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

若 $B = B_1 + B_2$ ，則

$$\int_{B_2} \bar{t}_i \delta u_i dB + \int_{B_1} \sigma_{ij} n_j \delta u_i dB = \int_B \sigma_{ij} n_j \delta u_i dB \quad (4.16)$$

$$\int_{B_2} \delta \sigma_{kl} u_k n_l dB + \int_{B_1} \delta \sigma_{ij} n_j \bar{u}_i dB = \int_B \delta \sigma_{ij} n_j u_i dB \quad (4.17)$$

由以上三式可導得

$$\int_D \delta \bar{b}_i u_i dV + \int_B \delta \sigma_{ij} n_j u_i dB = \int_D \bar{b}_i \delta u_i dV + \int_B \sigma_{ij} n_j \delta u_i dB$$

上式之結果，可看成前述三種方法的基本解力系作了如下改變

$$\delta \bar{b}_i \leftarrow b_i^* \leftarrow \delta_{ij}(x, s)$$

$$\delta u_i \leftarrow u_i^* \leftarrow U_{ij}(x, s)$$

$$\delta \sigma_{ij} n_j \leftarrow t_i^* \leftarrow T_{ij}(x, s)$$

則仍可導得對偶積分式。其中， δ 表示變分符號。

4.2.5 核函數的關係式

為證明前述 § 4.2.1 ~ 4.2.4 小節四種導法的一致性，核函數需有如下關係

- (1). $U_{ik}(x, s) = U_{ki}(s, x)$
- (2). $U_{ik}^*(x, s) = -T_{ki}(s, x)$
- (3). $T_{ik}(x, s) = L_{ki}(s, x)$
- (4). $T_{ik}^*(x, s) = -M_{ki}(s, x)$

證明: (1). $U_{ik}(x, s) = U_{ki}(s, x)$

此式之證明可直接由核函數的物理意義知，因其恰為功能互換原理之數學式。亦即“於 s 處受 k 方向之集中力所產生在 x 處 i 方向位移值 $U_{ik}(x, s)$ ”應等於“於 x 處受 i 方向之集中力所產生在 s 處 k 方向位移值 $U_{ki}(s, x)$ ”。

證明: (2). $U_{ik}^*(x, s) = -T_{ki}(s, x)$

此式之證明亦可由功能互換原理來推導如下：假設兩種彈力平衡應力狀態，如下圖所示

圖 4.2 $U_{ik}^*(x, s) = -T_{ki}(s, x)$ 圖示證明

則由功能互換原理可列式如下：

$$u_i(s) + \int_S \{T_{ji}(x, s)u_j^-(x) - T_{ji}(x, s)u_j^+(x)\}dB(x) = \int_S t_p(x)u_p(x)dB(x) = 0 \quad (4.18)$$

若取相對位移如下

$$g_j(x) = u_j^-(x) - u_j^+(x) = \delta_{ij}(x - x')$$

則

$$u_i(s) = -T_{ji}(x', s) = U_{ij}^*(s, x')$$

證明: (3). $T_{ik}(x, s) = L_{ki}(s, x)$

由式 (4.8) $L_{kp}(s, x)$ 之定義和 (1) 之證明，可導得

$$L_{kp}(s, x) = B_{pi}(\partial, n_x)\{U_{ki}(s, x)\} = B_{pi}(\partial, n_x)\{U_{ik}(x, s)\} = T_{pk}(x, s) \quad (4.19)$$

證明: (4). $T_{ik}^*(x, s) = -M_{ki}(s, x)$

同理，由式 (4.9) $M_{kp}(s, x)$ 之定義和 (2) 之證明，可導得

$$M_{kp}(s, x) = B_{pi}(\partial, n_x)\{T_{ki}(s, x)\} = B_{pi}(\partial, n_x)\{-U_{ik}^*(x, s)\} = -T_{pk}^*(x, s) \quad (4.20)$$

由以上所證，可知真正不同的核函數只有三個，分別為，直接法的 $U_{ki}(s, x), T_{ki}(s, x)$ 與 $M_{ki}(s, x)$ ，或是間接法的 $U_{ik}(x, s), U_{ik}^*(x, s)$ 與 $T_{ik}^*(x, s)$ 。而其他兩個，即直接法的 $L_{ki}(s, x)$ 與間接法的 $T_{ik}(x, s)$ 均可分別由 $T_{ki}(s, x)$ 與 $U_{ik}^*(x, s)$ 經變換求得。其實際表示式請參閱 § 4.4 節。值得一提的是，

- (1). 核函數若對場點 x 微分，則所得之核函數物理意義，代表同源、但不同反應的影響函數。列式如下

$$B_{pi}(\partial, n_x)\{U_{ik}(x, s)\} = T_{pk}(x, s)$$

其中， $U_{ik}(x, s)$ 與 $T_{pk}(x, s)$ 分別表示同為集中力源所造成不同的位移場與曳引力場。以簡支梁為例，若 $U_{ik}(x, s)$ 表示梁受集中力的位移基本解，則 $T_{ik}(x, s)$ 為梁受集中力的斜率基本解。

- (2). 核函數若對源點 s 微分，則所得之核函數物理意義，代表不同源、但同反應的影響函數。列式如下

$$B_{pk}(\partial, n_s)\{U_{ik}(x, s)\} = -U_{ip}^*(x, s)$$

其中， $U_{ik}(x, s)$ 與 $-U_{ip}^*(x, s)$ 分別表示由不同源的集中力與差排源所造成的位移場。以簡支梁為例，若 $U_{ik}(x, s)$ 表示梁受集中力的位移基本解，則 $U_{ik}^*(x, s)$ 為梁受集中彎矩的位移基本解。

4.3 邊界積分式的推導

前面 § 4.2 節已導得域內點邊界積分式，然於邊界元素法的應用上，為了得到邊界未知物理量之間的相容關係式或稱泛函束制條件，勢必將域內點積分式的場點逼到邊界，才可得邊界未知量的代數方程式。但由於核函數的奇異特性，在積分過程必會遭遇奇異積分與主值的問題。本節將就此特性，推導邊界點的邊界積分式。

若將域內點對偶邊界積分式的場點分別推到邊界時，針對各種核函數的不同奇異性所導致的主值觀念，可得對偶邊界積分方程式如下，

$$c_{ij} u_j(x) = R.P.V. \int_B U_{ki}(s, x) t_k(s) dB(s) - C.P.V. \int_B T_{ki}(s, x) u_k(s) dB(s)$$

$$c_{ij} t_j(x) = C.P.V. \int_B L_{ki}(s, x) t_k(s) dB(s) - H.P.V. \int_B M_{ki}(s, x) u_k(s) dB(s)$$

其中， c_{ij} 為邊界體角所決定。若平滑邊界，則 $c_{ij} = 0.5 \delta_{ij}$ 。若為不平滑邊界，則 c_{ij} 和邊界體角有關。而 $R.P.V.$, $C.P.V.$ 與 $H.P.V.$ 分別表示 Riemann 主值，Cauchy 主值與 Hadamard 主值。

一個有趣的結果為上兩式均分別為對域內點對偶邊界積分式之兩式作趨近邊界之處理所得；但從另一角度而言，當吾人考慮對域內點對偶邊界積分式的第一式先行趨近邊界處理後，再作曳引力運算，亦可同樣得到前述直接由對域內點對偶邊界積分式的第二式直接進行趨近邊界處理的式子，此點表明了趨近邊界的運算與曳引力運算間具可交換性。參見下表，

表 4.2 運算元交換性說明表

另一發現為 Hadamard 主值的計算，可經由不同的方法求得。(參閱 P.???)

4.4 核函數

在本書對偶積分式的邊界元素推導中，共有八個核函數，分別為直接法中的 $U_{ki}(s, x), T_{ki}(s, x), L_{ki}(s, x), M_{ki}(s, x)$ 與間接法中的 $U_{ik}(x, s), T_{ik}(x, s), U_{ik}^*(x, s), T_{ik}^*(x, s)$ ，其實前面 § 4.2.4 小節已提過獨立的表示式只有三個，原因如下表所示

表 4.3 $U_{ki}(s, x), T_{ki}(s, x), L_{ki}(s, x), M_{ki}(s, x)$ 四個核函數的特性

$U_{ki}(s, x), T_{ki}(s, x), L_{ki}(s, x)$ 與 $M_{ki}(s, x)$ 核函數之實際表示式如下：

二維平面應變核函數表示式：

$$U_{ki}(s, x) = C_1(C_2\delta_{ki}\ln(r) - y_i y_k / r^2) + A_{ki} \quad (4.21)$$

$$T_{ki}(s, x) = \frac{-C_3}{r^2}[C_4(n_i y_k - n_k y_i) + (C_4\delta_{ki} + 2y_i y_k / r^2)y_j n_j] \quad (4.22)$$

$$L_{ki}(s, x) = \frac{C_3}{r^2}[C_4(\bar{n}_k y_i - \bar{n}_i y_k) + (C_4\delta_{ik} + 2y_i y_k / r^2)y_j \bar{n}_j] \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} M_{ki}(s, x) = & \frac{-2C_3 G}{r^2} \left\{ \frac{y_i n_i}{r^2} [2a_2 \bar{n}_i y_k + 2\nu(\delta_{ik} y_j \bar{n}_j + \bar{n}_k y_i) - 8y_i y_j y_k \bar{n}_j / r^2] \right. \\ & + n_i (2\nu y_j y_k \bar{n}_j / r^2 + a_2 \bar{n}_k) + n_j (2\nu y_i y_k \bar{n}_j / r^2 + a_2 \delta_{ik} \bar{n}_j) \\ & \left. + n_k (2a_2 y_i y_j \bar{n}_j / r^2 - a_4 \bar{n}_i) \right\} \end{aligned} \quad (4.24)$$

其中，

$$C_1 = -1/(8\pi G(1 - \nu))$$

$$C_2 = 3 - 4\nu$$

$$C_3 = -1/4\pi(1 - \nu)$$

$$C_4 = 1 - 2\nu$$

$$a_2 = 1 - 2\nu, \quad a_4 = 1 - 4\nu$$

$$r^2 = y_i y_i, \quad y_i = x_i - s_i$$

n_i 表示 s 點的 i 方向法向分量， $\bar{n}_i$ 表示 x 點的 i 方向法向分量， A_{ik} 表示某參考點相對位移下之剛體運動項。

三維彈力核函數表示式

$$U_{ki}(s, x) = \frac{1}{16\pi(1 - \nu)G} \frac{1}{r} [(3 - 4\nu)\delta_{ki} + y_i y_k / r^2] \quad (4.25)$$

$$T_{ki}(s, x) = \frac{1}{8\pi(1 - \nu)} \frac{1}{r^2} \{ (1 - 2\nu)(n_i y_k / r - n_k y_i / r) + [3y_i y_k / r^2 + (1 - 2\nu)\delta_{ik}] \frac{y_l n_l}{r} \} \quad (4.26)$$

$$L_{ki}(s, x) = \frac{-1}{8\pi(1 - \nu)} \frac{1}{r^2} \{ (1 - 2\nu)(\bar{n}_k y_i / r - \bar{n}_i y_k / r) + [3y_i y_k / r^2 + (1 - 2\nu)\delta_{ik}] \frac{y_l \bar{n}_l}{r} \} \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} M_{ki}(s, x) = & \frac{G}{4\pi(1 - \nu)r^3} \left\{ \frac{3y_l n_l}{r^2} [(1 - 2\nu)\bar{n}_i y_k + \nu(\delta_{ik} y_j \bar{n}_j + \bar{n}_k y_i) - 5y_i y_j y_k \bar{n}_j / r^2] \right. \\ & + n_i [3\nu y_j y_k \bar{n}_j / r^2 + (1 - 2\nu)\bar{n}_k] + n_j [3\nu y_i y_k \bar{n}_j / r^2 + (1 - 2\nu)\delta_{ik} \bar{n}_j] \\ & \left. + n_k [3(1 - 2\nu)y_i y_j \bar{n}_j / r^2 - (1 - 4\nu)\bar{n}_i] \right\} \end{aligned} \quad (4.28)$$

以上二維與三維的核函數特性，值得一提的是，對 $U_{ki}(s, x)$ 與 $M_{ki}(s, x)$ 而言含有偶數個 y_i 項，對 $T_{ki}(s, x)$ 與 $L_{ki}(s, x)$ 而言含有奇數個 y_i 項。此點在映像法的應用是很重要的。

若吾人考慮如下特例

$$s = (0, 0), \quad x = (x_1, x_2)$$

$$n(s) = (0, -1), \quad n(x) = (0, -1)$$

特例下之核函數場示意圖

則核函數可簡化為

$$U_{11}^*(x, s) = \frac{-C_3}{r^2} [C_4 x_2 + 2x_1^2 x_2 / r^2] \quad (4.29)$$

$$U_{12}^*(x, s) = \frac{-C_3 x_1}{r^2} [-C_4 + 2x_2^2 / r^2] \quad (4.30)$$

$$U_{21}^*(x, s) = \frac{-C_3 x_1}{r^2} [C_4 + 2x_2^2 / r^2] \quad (4.31)$$

$$U_{22}^*(x, s) = \frac{-C_3 x_2}{r^2} [C_4 + 2x_2^2 / r^2] \quad (4.32)$$

$$T_{11}^*(x, s) = \frac{2C_3 G}{r^2} [-8x_1^2 x_2^2 / r^4 + 1] \quad (4.33)$$

$$T_{12}^*(x, s) = \frac{2C_3 G}{r^2} [2x_1 x_2 / r^2 - 8x_1 x_2^3 / r^4] \quad (4.34)$$

$$T_{21}^*(x, s) = \frac{2C_3 G}{r^2} [2x_1 x_2 / r^2 - 8x_1 x_2^3 / r^4] \quad (4.35)$$

$$T_{22}^*(x, s) = \frac{2C_3 G}{r^2} [4x_2^2 / r^2 - 8x_2^4 / r^4 + 1] \quad (4.36)$$

上述的這些式子在以下 § 4.5.8 與 § 4.5.9 節中說明位移不連續法與差排模式法時將會被用來作積分。值得注意的是：

- (1). 此四核函數和場點或源點在邊界上的法向量關係如下表所示，這些關係在退化邊界之邊界積分推導時，是非常重要的。

表 4.4 核函數和法向量之關係表

(2). $T_{ki}(s, x)$ 與 $L_{ki}(s, x)$ 兩個核函數，針對相同密度函數積分所造成的勢能分別在橫越邊界時，均為不連續，但兩者之和恰為連續。列式如下

$$\int \{T_{ki}(s, x) + L_{ki}(s, x)\} \mu_k(s) dB(s)$$

於 x 橫越邊界時為連續。其中 $\mu_k(s)$ 為密度函數。

見下圖例說明，

簡支樑理論

彈性基礎簡支樑理論

(以上與 § 3.4 節頗有異曲同工之妙)

4.5 文獻各類方法新釋

本章至此已建立了完整的彈力積分方程式。而文獻上有關彈性力學的積分方程解法也很多，本節將以對偶積分方程式為基礎，說明文獻上各種方法均可由本書所介紹的對偶架構加以說明，以下即一一闡述之。

4.5.1 間接法第一類—單層勢能法

傳統的間接法是源自於疊加原理的物理觀念。而從數學的角度而言，間接法的觀念乃是要找到既滿足控制方程又滿足邊界條件的積分表示式，即可視為該問題的解。基於此點，吾人可說明間接法第一類（單層勢能法）如後，將位移場解表成以未知單層密度函數 $\phi_k(s)$ 的積分表示式如下：

$$u_i(x) = \int_B U_{ik}(x, s) \phi_k(s) dB(s)$$

其中， $\phi_k(s)$ 表示虛擬密度函數， B 為問題的邊界。則曳引力場可表示為，

$$t_i(x) = \int_B T_{ik}(x, s) \phi_k(s) dB(s)$$

上述位移場表示式， $u_i(x)$ 位移場在定義域內均滿足控制方程式，至於邊界條件的滿足則剛好用來決定 $\phi_k(s)$ 中的未定係數，因此既滿足控制方程又滿足邊界條件，當然是其解。而此模式誤差的來源，則來自 $\phi_k(s)$ 的離散內插假設、幾何邊界之近似模擬與邊界條件之點配置 (Point collocation)，因此會有滲漏 (leakage) 現象，參見圖 3.2。

值得一提的是，文獻上稱此法為虛擬應力法 (fictitious stress method)，並認為 $\phi_k(s)$ 為虛擬密度函數不具物理意義。但確定的是其單位應是曳引力的單位，若以本書 § 4.2.3 小節物理意義的推導而言，其實是將 ψ_k 設為 0，而只取 ϕ_k 的特例而已。因此，可同理推導到以下的間接法第二類 (雙層勢能法) 方法。

4.5.2 間接法第二類—雙層勢能法

如前所述，傳統的間接法是源自於疊加原理的物理觀念，前者是以單層密度函數為未知函數。若考慮疊加源為雙層密度分布函數，則吾人可說明間接法第二類 (雙層勢能法) 如後，將位移場解的積分表示式表成下式：

$$u_i(x) = \int_B U_{ik}^*(x, s) \psi_k(s) dB(s)$$

其中， $\psi_k(s)$ 表示虛擬雙層密度函數。則曳引力場可表為，

$$t_i(x) = \int_B T_{ik}^*(x, s) \psi_k(s) dB(s)$$

上述位移場表示式， $u_i(x)$ 位移場在定義域內均滿足控制方程式，至於邊界條件之滿足則用來決定 $\psi_k(s)$ 中的未定係數，因此既滿足控制方程又滿足邊界條件，當然是其解。而這種模式誤差的來源，則來自 $\psi_k(s)$ 的離散內插假設、幾何邊界之近似模擬與邊界條件之點配置 (Point collocation)，因此也會有滲漏 (leakage) 現象。

值得一提的是，文獻上常提 $\psi_k(s)$ 為虛擬密度函數不具物理意義，但確定的是其單位應是位移的單位，若以本書物理意義的推導而言，其實是 $\phi_k(s) = 0$ ，而只取 $\psi_k(s)$ 的特例而已。

4.5.3 間接法第三類—混合勢能法

對一含裂縫之彈性體而言，其邊界有兩類：一為正規邊界 S ，另一為裂縫（退化）邊界 C ，而從物理意義的了解可知，針對單值的正規邊界而言，以單層勢能模擬較適合。針對裂縫的雙值退化邊界而言，則以雙層勢能模擬較適合。因此，遇到同時含裂縫邊界與正規邊界的問題時，間接法可取混合表示式如下：

$$u_i(x) = \int_S U_{ik}(x, s) \phi_k(s) dB(s) + \int_C U_{ik}^*(x, s) \psi_k(s) dB(s)$$

$$t_i(x) = \int_S T_{ik}(x, s) \phi_k(s) dB(s) + \int_C T_{ik}^*(x, s) \psi_k(s) dB(s)$$

其中， $\phi_k(s)$ 表示佈置在正規邊界 S 之虛擬單層密度函數， $\psi_k(s)$ 表示佈置在退化邊界 C 之虛擬雙層密度函數。當然這些未知密度的係數仍是由邊界條件來決定。

4.5.4 間接法第四類—廣義間接法

上述 § 4.5.1 ~ § 4.5.3 兩小節，均將奇異源分佈於邊界上。本節所謂廣義間接法乃是將虛擬密度源分佈在離邊界一段距離處，如此可避免奇異積分、角點與滲漏等問題。而此積分表示式既滿足控制方程又滿足邊界條件，當然可用來模擬彈力問題。此邊界為一假想邊界 B' ，而非真正問題的邊界 B ，其選擇方式並不唯一，而應以誤差最小與可收斂為準則。值得一提的是，內域問題中虛擬密度分佈的奇異源分佈在外面。外域問題中虛擬密度分佈的奇異源分佈在內面。如此，在定義域內才能處處滿足 Navier 方程式。參見下圖

圖 4.3 虛擬密度的奇異源分佈圖

4.5.5 間接法第五類—體積力法

前述 § 4.5.4 節之廣義間接法是在輔助邊界分佈未知密度源函數，但若將此分佈函數改以等效集中源分佈於定義域之外（意即 s_i 不在定義域內），則未知密度源函數可表示如下：

$$\phi_k(s) = \sum_{i=1}^N C_{ki} \delta(s - s_i)$$

其中，未定係數 C_{ki} 表示等效集中源強度，其大小需由邊界條件來決定，這種作法叫體積力法。本法最大的好處在於不需作邊界積分，而改以體積勢能的離散和來模擬。此法在波動問題已配合特徵函數展開法而被採用，並稱為多重中心展開法 (Multi-Centers Expansion Method)。體積方法觀念在土壤結構互制問題的應用亦有學者使用過。

4.5.6 直接法第一類— U, T 核函數法

上述 § 4.5.1 ~ § 4.5.5 兩小節均先求虛擬量後，再求得實際物理量。而本節所謂直接法乃指所有的邊界欲求量均直接以邊界位移與邊界曳引力為未知量，而不以虛擬未知密度函數來推導的方法。亦可說成以邊界 u_i 與 t_i 為狀態變數，來描述整個場的行為。對一般不含退化邊界的彈力問題，均可使用如下域內點對偶邊界積分式的第一式解域內場

$$u_k(x) = \int_B \{U_{ik}(s, x)t_i(s) - T_{ik}(s, x)u_i(s)\}dB(s)$$

至於邊界未知量，則用邊界點對偶邊界積分式的第一式

$$\frac{1}{2}u_k(x) = R.P.V. \int_B U_{ik}(s, x)t_i(s)dB(s) - C.P.V. \int_B T_{ik}(s, x)u_i(s)dB(s)$$

即可解，這是現今文獻上較常用的解法，於本書稱為 U, T 核函數法，此方法即為 Rizzo 於 1967 年所發表的作法。

4.5.7 直接法第二類— L, M 核函數法

同理，吾人可考慮域內對偶積分式的第二式來求解，則域內點對偶邊界積分式的第二式如下

$$t_k(x) = \int_B \{L_{ik}(s, x)t_i(s) - M_{ik}(s, x)u_i(s)\}dB(s)$$

至於其邊界點的邊界積分式如下

$$\frac{1}{2}t_k(x) = C.P.V. \int_B L_{ik}(s, x)t_i(s)dB(s) - H.P.V. \int_B M_{ik}(s, x)u_i(s)dB(s)$$

亦可解決問題。值得一提的是 § 4.5.6 節與 § 4.5.7 節中的方法雖均能獨自地解決僅含正規邊界的問題，但本節方法，因 $L_{ki}(s, x)$, $M_{ki}(s, x)$ 之奇異性較高，在數值方法上會有影響係數矩陣中對角線項較大的情形產生，應有助於數值處理。另對一含裂縫彈性體而言，以上兩種方法（直接法第一、二類），若僅對邊界作離散，則無法個別解決問題，會產生不唯一解，而需兩者同時考慮，方能解出唯一的解，此點在 § 4.6.3 節將有詳細討論。

4.5.8 位移不連續法

位移不連續法是由 Neuber-Papkovitch 以複變函數導得的一組影響函數，其代表的物理意義是由 $s = -a$ 到 $s = +a$ 上佈置的差排所產生的位移場與應力場，參見下圖 4.4。此影響函數之推導，吾人可由 § 4.4 節中對偶積分式的核函數 $U_{ik}^*(x, s)$, $T_{ik}^*(x, s)$ 從 $-a$ 積到 a ，亦可得到相同的結果如下，讀者可驗證之。

圖 4.4 位移不連續量示意圖

位移場與曳引力場可經由影響函數積分得

$$\begin{aligned} u_x &= \int_{-a}^a U_{11}^*(x, s)D_x ds + \int_{-a}^a U_{12}^*(x, s)D_y ds \\ u_y &= \int_{-a}^a U_{21}^*(x, s)D_x ds + \int_{-a}^a U_{22}^*(x, s)D_y ds \\ t_x &= \int_{-a}^a T_{11}^*(x, s)D_x ds + \int_{-a}^a T_{12}^*(x, s)D_y ds \\ t_y &= \int_{-a}^a T_{21}^*(x, s)D_x ds + \int_{-a}^a T_{22}^*(x, s)D_y ds \end{aligned}$$

以符號運算程式 MACSYMA 可積分得位移場如下：

$$u_x = [2(1 - \nu)f_{,y} - yf_{,xx}]D_x + [-(1 - 2\nu)f_{,x} - yf_{,xy}]D_y$$

$$u_y = [(1 - 2\nu)f_{,x} - yf_{,xy}]D_x + [2(1 - \nu)f_{,y} - yf_{,yy}]D_y$$

其中

$$f(x, y) = \frac{-1}{4\pi(1 - \nu)} \left[\tan^{-1}\left(\frac{y}{x - a}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{y}{x + a}\right) - (x - a)\ln(\sqrt{(x - a)^2 + y^2}) + (x + a)\ln(\sqrt{(x + a)^2 + y^2}) \right]$$

若取 $n(s) = (0, 1)$ 與 $n(x) = (1, 0)$ ，可得應力場如下

$$\sigma_{xx} = 2G[2f_{,xy} + yf_{,xyy}]D_x + 2G[f_{,yy} + yf_{,yyy}]D_y \quad (4.37)$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = 2G[f_{,yy} + yf_{,yyy}]D_x + 2G[-yf_{,xyy}]D_y \quad (4.38)$$

$$\sigma_{yy} = 2G[-yf_{,xyy}]D_x + 2G[f_{,yy} - yf_{,yyy}]D_y \quad (4.39)$$

4.5.9 差排模式法

差排模式法是由差排理論 (dislocation theory) 導得的一組影響函數，其代表的物理意義是由圖 4.5 所示之錯置向量 (Burger's vector) 所引致之彈力反應場。此影響函數可由 § 4.4 節的四個核函數分別積分求得，而奇異源的分佈為由 $s = 0$ 到 $s = \infty$ 所佈置的差排。此函數吾人可由對偶積分式的核函數 $U_{ik}^*(x, s), T_{ik}^*(x, s)$ 針對從 0 到 ∞ 所佈置的差排由 $s = 0$ 積到 $s = \infty$ ，可得相同的結果如下，讀者可驗證之。

圖 4.5 Burger 錯置向量示意圖

所積得之位移場影響函數如下

$$u_x = \frac{G}{4\pi(1-\nu)} \{ [2(1-\nu)\tan^{-1}(y/x) + xy/(x^2+y^2)]D_x + [\frac{1}{2}(1-2\nu)\log(x^2+y^2) + y^2/(x^2+y^2)]D_y \} \quad (4.40)$$

$$u_y = \frac{G}{4\pi(1-\nu)} \{ [-\frac{1}{2}(1-2\nu)\log(x^2+y^2) - x^2/(x^2+y^2)]D_x + [-2(1-\nu)\tan^{-1}(y/x) - xy/(x^2+y^2)]D_y \} \quad (4.41)$$

$$u_z = \frac{1}{2\pi}\tan^{-1}(y/x)D_z \quad (4.42)$$

應力場影響函數如下

$$\sigma_{xx} = \frac{G}{4\pi(1-\nu)} \{ [-2y(3x^2+y^2)/(x^2+y^2)^2]D_x + [2x(x^2-y^2)/(x^2+y^2)^2]D_y \}$$

$$\sigma_{yy} = \frac{G}{4\pi(1-\nu)} \{ [2y(x^2-y^2)/(x^2+y^2)^2]D_x + [2x(x^2+3y^2)/(x^2+y^2)^2]D_y \}$$

$$\sigma_{xy} = \frac{G}{4\pi(1-\nu)} \{ [2x(x^2-y^2)/(x^2+y^2)^2]D_x + [2y(x^2-y^2)/(x^2+y^2)^2]D_y \}$$

$$\sigma_{zz} = \frac{-\nu G}{\pi(1-\nu)}y/(x^2+y^2)D_x + \frac{\nu G}{\pi(1-\nu)}x/(x^2+y^2)D_y$$

4.6 裂縫問題之應用

4.6.1 裂縫問題與破壞力學介紹

近年來破壞力學之概念在含裂縫結構設計方面越來越重要，此一重要性在航空太空結構更形突出；破壞力學對這些結構設計之成敗擔任了重要角色，傳統的應力分析必須與之相輔相成，方能確保結構安全，否則將有低應力破壞的現象發生。破壞力學有一重要參數，即應力強度因子 K ，此參數為結構幾何外形與負荷之函數，代表裂縫尖端應力集中的程度，與傳統應力分析之應力 (σ) 類似，可用來評估結構安全性，進行評估時，就是拿分析所得之應力強度因子 K 與材料破裂韌性 (K_c) 來比較，當成失效準則，亦即當 $K > K_c$ 時，表裂縫將不穩定延伸導致破壞。因為 K_c 可由實驗而得，因此， K 值的計算將是評估含裂縫結構體安全與否的關鍵。

較簡單形狀的含裂縫結構體之三個基本破壞模式的應力強度因子 K (K_I, K_{II}, K_{III}) 已經有很多理論式被推導出來，並經 Paris, Rooke, 及 Sih 等學者整理成手冊，然而對於實際較複雜結構則需較高深之技巧才能得到 K 值，數值法即為非常適合之方法，此一方法目前正以極快的速度發展，它有如下好處

- (1). 可分析較複雜形狀之工程裂縫結構 (如螺接及焊接結構)。
- (2). 可以分析三維含裂縫之結構問題。
- (3). 可以用彈塑元素 (Elastic-plastic element) 來考慮裂縫尖端之塑性問題。

使用標準數值模擬電腦程式分析含裂縫結構，將獲得裂縫尖端附近的位移場及應力場，配合適當方法即可求得 K 值，這些方法經過 Gallagher, Rice and Tracey 及 Jerram 和 Hellen 等學者之探討，證明應力強度因子可利用計算所得之裂縫尖端應力場或位移場代入已知之裂縫尖端場域方程式 (Field equations)，此方程式為一應力及位移與 K 及幾何形狀相關之方程式或從能量觀點考慮而獲得。另亦可在含裂縫尖端元素使用超元素如 MSC/NASTRAN 66 版即用此法直接算 K 。而本章在此將介紹邊界元素法在破壞力學之應用。

4.6.2 破壞力學基本理論介紹

如下圖 4.6 所示，該連續體存在位移不連續面 (即裂縫面)，若其裂縫面沿圖示平面延伸至無限遠，則可以二維平面應變模擬。若其裂縫面延圖示平面延伸至有限遠，則視為三維裂縫問題。當此彈性體承受外力時，於裂縫尖端會產生奇異行為，針對不同的破壞模式如下圖 4.7 所示，裂縫尖端的位移場與應力場可分別表示如下：

圖 4.6 一般裂縫示意圖

圖 4.7 不同的破壞模式示意圖

模式 I

$$\sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos(\theta/2) (1 - \sin(\theta/2) \sin(3\theta/2)) \quad (4.43)$$

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos(\theta/2) (1 + \sin(\theta/2) \sin(3\theta/2)) \quad (4.44)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin(\theta/2) \cos(3\theta/2) \cos(3\theta/2) \quad (4.45)$$

$$u = \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos(\theta/2) (1 - 2\nu + \sin^2(\theta/2)) \quad (4.46)$$

$$v = \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin(\theta/2) (2 - 2\nu - \cos^2(\theta/2)) \quad (4.47)$$

模式 II

$$\sigma_x = \frac{-K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin(\theta/2) (2 + \cos(\theta/2) \cos(3\theta/2)) \quad (4.48)$$

$$\sigma_y = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos(\theta/2) \sin(\theta/2) \cos(3\theta/2) \quad (4.49)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos(\theta/2) (1 - \sin(\theta/2) \sin(3\theta/2)) \quad (4.50)$$

$$u = \frac{K_{II}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin(\theta/2) (2 - 2\nu + \cos^2(\theta/2)) \quad (4.51)$$

$$v = \frac{K_{II}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos(\theta/2) (1 - 2\nu + \sin^2(\theta/2)) \quad (4.52)$$

模式 III

$$\sigma_{xz} = \frac{-K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin(\theta/2) \quad (4.53)$$

$$\sigma_{yz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos(\theta/2) \quad (4.54)$$

$$w = \frac{K_{III}}{\mu} \sqrt{r/2\pi} \sin(\theta/2) \quad (4.55)$$

其中， μ 為剪力模數， K_I, K_{II}, K_{III} 分別代表不同破裂模式的應力強度因子，其物理意義為應力奇異的強度，此值為外力與幾何形狀的函數。一般可以下式表示

$$K = \sigma \sqrt{(\pi a)} Y(a)$$

其中， $Y(a)$ 表示形狀因子。

解得整個應力場與位移場，再將裂縫元素的位移量，套用以上位移公式或能量關係式，即可求得應力強度因子。

4.6.3 破壞力學的邊界積分推導

如同第三章所提含阻水牆流場分析的例子，在彈性力學的應用上，亦有類似的退化邊界問題，此即為裂縫，可參閱下圖 4.8 比較來了解之，

阻水牆流場分析 邊裂紋破壞力學分析

圖 4.8 退化邊界之物理問題

其詳細推導和第三章並沒兩樣，僅將核函數作如下變化

$$U(s, x) \rightarrow U_{ki}(s, x)$$

$$T(s, x) \rightarrow T_{ki}(s, x)$$

$$L(s, x) \rightarrow L_{ki}(s, x)$$

$$M(s, x) \rightarrow M_{ki}(s, x)$$

其中，“ $\rightarrow$ ”表示“改成”。亦即由純量勢能轉成向量勢能，這也就是本書特選 Laplace 方程與彈力的應用來介紹的原因。若將彈力問題之邊界 B 分為正規邊界 S 與退化邊界 C 如下：

$$B = S + C$$

其中，正規邊界 S 為含單值 (Single value) 物理量的邊界，退化邊界 C 為含雙值物理量，且定義在 C^+, C^- 的邊界。

利用前述四個核函數與源點和場點法向量的關係，可導得
當 $x \in S$ 時，邊界積分式為

$$\begin{aligned} \alpha u_i(x) = & R.P.V. \int_S U_{ki}(s, x) t_k(s) dB(s) - C.P.V. \int_S T_{ki}(s, x) u_k(s) dB(s) \\ & + \int_{C^+} U_{ki}(s, x) \Sigma t_k(s) dB(s) - \int_{C^+} T_{ki}(s, x) \Delta u_k(s) dB(s) \end{aligned} \quad (4.56)$$

$$\begin{aligned} \alpha t_i(x) = & C.P.V. \int_S L_{ki}(s, x) t_k(s) dB(s) - H.P.V. \int_S M_{ki}(s, x) u_k(s) dB(s) \\ & + \int_{C^+} L_{ki}(s, x) \Sigma t_k(s) dB(s) - \int_{C^+} M_{ki}(s, x) \Delta u_k(s) dB(s) \end{aligned} \quad (4.57)$$

當 $x \in C^+$ 時，邊界積分式為

$$\begin{aligned} \alpha \Sigma u_i(x) = & R.P.V. \int_{C^+} U_{ki}(s, x) \Sigma t_k(s) dB(s) - C.P.V. \int_{C^+} T_{ki}(s, x) \Delta u_k(s) dB(s) \\ & + \int_S U_{ki}(s, x) t_k(s) dB(s) - \int_S T_{ki}(s, x) u_k(s) dB(s) \end{aligned} \quad (4.58)$$

$$\begin{aligned} \alpha \Delta t_i(x) = & C.P.V. \int_{C^+} L_{ki}(s, x) \Sigma t_k(s) dB(s) - H.P.V. \int_{C^+} M_{ki}(s, x) \Delta u_k dB(s) \\ & + \int_S L_{ki}(s, x) t_k(s) dB(s) - \int_S M_{ki}(s, x) u_k(s) dB(s) \end{aligned} \quad (4.59)$$

其中，若 B 為平滑邊界，則 $\alpha = 1/2$ ，且

$$\Sigma u_k(s) = u_k(s^+) + u_k(s^-) \quad (4.60)$$

$$\Delta u_k(s) = u_k(s^+) - u_k(s^-) \quad (4.61)$$

$$\Sigma t_k(s) = t_k(s^+) + t_k(s^-) \quad (4.62)$$

$$\Delta t_k(s) = t_k(s^+) - t_k(s^-) \quad (4.63)$$

上式反應了在退化邊界上的邊界未知量多了一倍，亦可說成由一個變成兩個，而廣義對偶積分式則利用退化邊界兩邊物理量之和與之差來描述，這裡可看出超奇異積分式的角色了。因沒有它，方程式的數目就會比未知數來得少了！將產生解不唯一的問題。換句話說，對偶邊界式對所有的邊界值問題（含或不含退化邊界的問題）提供了充份足夠的邊界物理量束制條件。亦即邊界值問題真正的主集 (master set) 自由度為邊界未知量，而場內物理量則為僕集 (slavery set)。此兩者的相依關係則靠域內點對偶邊界積分式來維繫。而所有邊界物理量，可再分成未知和已知邊界條件，前者可再看成主集，後者為僕集，而其間的相容關係則靠邊界點的對偶邊界積分式來維繫。然針對對偶邊界積分式的第一式而言，並無法反映 x 在 C^+ 或 C^- 所造成束制方程的不同；第二式亦然。第一式得到完全相同的代數方程；第二式則恰好差個負號。但是第一和第二式在 $x \in C^+$ 時所得的代數方程是相互獨立的，因此需合併使用，才能完全描述退化邊界的問題而克服解不唯一的困難。

4.6.4 域內點與邊界點位移與曳引力的計算

在求得邊界未知量後，域內點與邊界點的位移與曳引力計算，可由下式透過核函數疊加邊界求出量而得

當 $x \in D$ 時，域內點位移與法向量 n 平面上之曳引力，可分別由下兩式計算

$$\begin{aligned} u_i(x) &= \int_{C^+} U_{ki}(s, x) \Sigma t_k(s) dB(s) - \int_{C^+} T_{ki}(s, x) \Delta u_k(s) dB(s) \\ &\quad + \int_S U_{ki}(s, x) t_k(s) dB(s) - \int_S T_{ki}(s, x) u_k(s) dB(s) \end{aligned} \quad (4.64)$$

$$\begin{aligned} t_i^n(x) &= \int_{C^+} L_{ki}^n(s, x) \Sigma t_k(s) dB(s) - \int_{C^+} M_{ki}^n(s, x) \Delta u_k(s) dB(s) \\ &\quad + \int_S L_{ki}^n(s, x) t_k(s) dB(s) - \int_S M_{ki}^n(s, x) u_k(s) dB(s) \end{aligned} \quad (4.65)$$

當 $x \in S$ 時，邊界點的邊界法向曳引力，可由下式計算並可驗核

$$\begin{aligned} t_i^n(x) &= C.P.V. \int_S L_{ki}^n(s, x) t_k(s) dB(s) - H.P.V. \int_S M_{ki}^n(s, x) u_k(s) dB(s) \\ &\quad + \int_{C^+} L_{ki}^n(s, x) \Sigma t_k(s) dB(s) - \int_{C^+} M_{ki}^n(s, x) \Delta u_k(s) dB(s) \end{aligned} \quad (4.66)$$

當 $x \in C^+$ 時，邊界點的邊界法向曳引力，可由下式計算並可驗核

$$\begin{aligned} t_i^n(x) &= \int_S L_{ki}^n(s, x) t_k(s) dB(s) - \int_S M_{ki}^n(s, x) u_k(s) dB(s) \\ &\quad + C.P.V. \int_{C^+} L_{ki}^n(s, x) \Sigma t_k(s) dB(s) - H.P.V. \int_{C^+} M_{ki}^n(s, x) \Delta u_k(s) dB(s) \end{aligned}$$

當 $x \in S$ 時，邊界點的邊界切向曳引力，可由下式計算

$$\begin{aligned} t_i^t(x) &= C.P.V. \int_S L_{ki}^t(s, x) t_k(s) dB(s) - H.P.V. \int_S M_{ki}^t(s, x) u_k(s) dB(s) \\ &\quad + \int_{C^+} L_{ki}^t(s, x) \Sigma t_k(s) dB(s) - \int_{C^+} M_{ki}^t(s, x) \Delta u_k(s) dB(s) \end{aligned} \quad (4.67)$$

當 $x \in C^+$ 時，邊界點的邊界切向曳引力，可由下式計算

$$\begin{aligned} t_i^t(x) &= \int_S L_{ki}^t(s, x) t_k(s) dB(s) - \int_S M_{ki}^t(s, x) u_k(s) dB(s) \\ &\quad + C.P.V. \int_{C^+} L_{ki}^t(s, x) \Sigma t_k(s) dB(s) - H.P.V. \int_{C^+} M_{ki}^t(s, x) \Delta u_k(s) dB(s) \end{aligned}$$

其中，上標 t 為邊界點的切向方向且

$$L_{kp}^n(s, x) = B_{pi}(\partial, n_x) \{U_{ki}(s, x)\} \quad (4.68)$$

$$M_{ki}^n(s, x) = B_{pi}(\partial, n_x) \{T_{ki}(s, x)\} \quad (4.69)$$

$$L_{kp}^t(s, x) = B_{pi}(\partial, t_x) \{U_{ki}(s, x)\} \quad (4.70)$$

$$M_{ki}^t(s, x) = B_{pi}(\partial, t_x) \{T_{ki}(s, x)\} \quad (4.71)$$

沿邊界的切向應力的計算方法可歸納兩種

(1). 積分表示法 — 上述的方法。

(2). 數值導微法 — 直接由所得邊界位移配合組成律與求得的邊界法向應力可做差分導微而求得，這是文獻上常見的作法，可參見廖明亮君的碩士論文。

4.7 奇異積分與主值

本章之核函數亦存在奇異性，其物理數學的特性和第三章所述並無兩樣，均需以主值的觀念處理之。有關奇異積分與主值在 § 1.10 節已詳細介紹過，本節將不再贅述。

4.8 簡例介紹—無限域

為驗證對偶積分式在彈力含裂縫分析之可行性，特舉以下四例說明：

範例一：二維無限域裂縫受均勻內壓分析

(a). 問題描述：參見下圖 4.9

圖 4.9 二維無限域內裂縫受均勻內壓問題

(b). 解析解：

本問題因具對稱性，其對偶邊界積分式可化簡為

$$\frac{1}{2}\Delta t_2(x) = \sigma_{yy} = p = -2 \text{ H.P.V. } \int_{-b}^b M_{22}(s, x) u_2(s) ds$$

參考 § 3.9 節例一之方法可導得正解如下

$$u_2(s) = p(1 - \nu)\sqrt{1 - s^2}/G$$

再由 § 4.6.2 小節之位移場公式，由其漸近行為可導得應力強度因子如下：

$$K_I = p\sqrt{\pi b}$$

(c). 分割網目

10 個元素網目圖

20 個元素網目圖

40 個元素網目圖

(d). 分析結果

分析結果綜整

. (1). 常數元素

圖 4.10(a) 二維無限域內裂縫位移圖 (元素個數 = 10)

圖 4.10(b) 二維無限域內裂縫位移圖 (元素個數 = 20)

圖 4.10(c) 二維無限域內裂縫位移圖 (元素個數 = 40)

(2). 線性元素 (Collocation pt. 在元素中心)

圖 4.11(a) 二維無限域內裂縫位移圖 (元素個數 = 10)

圖 4.11(b) 二維無限域內裂縫位移圖 (元素個數 = 20)

圖 4.11(c) 二維無限域內裂縫位移圖 (元素個數 = 40)

(3). 線性元素 (Collocation pt. 在結點)

圖 4.12(a) 二維無限域內裂縫位移圖 (元素個數 = 10)

圖 4.12(b) 二維無限域內裂縫位移圖 (元素個數 = 20)

圖 4.12(c) 二維無限域內裂縫位移圖 (元素個數 = 40)

(e). 討論:

- (1). 由圖 4.11(a)-(c) 可看出若邊界點配置在元素中心，且使用線性元素將產生滲漏 (Leakage) 現象。但改配置在節點則可解決此問題，如圖 4.12(a)-(c) 所示，但積分時需特別處理。
- (2). 應力強度因子，可經由裂縫面之位移求得，亦可以虛擬裂縫成長 (VCE, Virtual crack extension) 的能量差觀念求得。使用如下公式

$$\frac{\partial W}{\partial b} = \frac{W(b + \Delta b) - W(b)}{\Delta b} = \frac{1 - \nu}{G} K_I^2$$

其中， Δb 表示虛擬裂縫增長量， W 表示應變能。

- (3). 以上數值解均可逼近正解。

範例二：二維無限域裂縫受集中力分析

(a). 問題描述：如下圖 4.13 所示

圖 4.13 二維無限域裂縫受集中力問題

(b). 解析解

裂縫面位移場

$$u_y(x) = \frac{1 - \nu}{\pi G} \ln\left(\frac{b + \sqrt{b^2 - x^2}}{x}\right)$$

應力強度因子

$$K = \frac{p}{\sqrt{\pi b}}$$

(c). 分割網目

10 個元素網目圖

20 個元素網目圖

40 個元素網目圖

(d). 分析結果

(1). 10 個等距線性元素

圖 4.14(a) 二維無限域內裂縫位移圖 (元素個數 = 10)

(2). 20 個等距線性元素

圖 4.14(b) 二維無限域內裂縫位移圖 (元素個數 = 20)

(3). 40 個等距線性元素

圖 4.14(c) 二維無限域內裂縫位移圖 (元素個數 = 40)

(e). 討論:

- (1). 如圖 4.14(a)-(c) 所示, 係使用線性元素且邊界配置點在節點所求得的结果。
- (2). 應力強度因子, 可經由裂縫面之位移求得, 亦可以虛擬裂縫成長 (VCE, Virtual crack extension) 的能量差觀念求得, 後者的準確度較高。
- (3). 以上數值解均可逼近正解。

範例三: 三維無限域錢幣形裂縫受均勻內壓分析

(a). 問題描述: 如下圖所示

圖 4.15 三維無限域內錢幣形裂縫受均勻內壓問題

(b). 解析解

裂縫面位移場

$$u_z(r) = 2(1 - \nu)\sqrt{1 - r^2}/G\pi$$

應力強度因子

$$K = 2p\sqrt{R}/\pi$$

(c). 分割網目: 本問題具軸對稱, 故僅需對 r 軸離散如下

10 個元素網目圖

20 個元素網目圖

40 個元素網目圖

(d). 分析結果

- (1). 10 個等距線性元素

圖 4.16(a) 三維無限域內裂縫位移圖 (元素個數 = 10)

(2). 20 個等距線性元素

圖 4.16(b) 二維無限域內裂縫位移圖 (元素個數 = 20)

(e). 討論:

- (1). 本問題因具軸對稱，邊界的面積分可簡化為一維 r 軸積分。
- (2). 應力強度因子，可經由裂縫面之位移求得。
- (3). 以上數值解均可逼近正解。

範例四: 三維無限域錢幣形裂縫受部份均勻內壓分析

(a). 問題描述: 如下圖 4.18 所示

圖 4.17 三維無限域內錢幣形裂縫受部份均勻內壓問題

(b). 解析解

由 Sneddon 所導得之裂縫面位移場如下

$$w(r) = \frac{4p_0(1-\nu^2)}{\pi E} \sqrt{R^2 - r^2} [1 - \sqrt{(1 - R_1^2/R^2)}]$$

由 Fett 所導得之裂縫面位移場為

當 $\rho < c$ 時，解為

$$w^*(\rho) = \int_{\rho}^c \frac{x dx}{\sqrt{(x^2 - \rho^2)}} + \int_c^1 \frac{x - \sqrt{(x^2 - c^2)}}{\sqrt{(x^2 - \rho^2)}} dx$$

當 $\rho > c$ 時，解為

$$w^*(\rho) = \int_{\rho}^1 \frac{x - \sqrt{(x^2 - c^2)}}{\sqrt{(x^2 - \rho^2)}} dx$$

其中， $\rho = r/R$ ， $c = R_1/R$ 。而 w^* 為經過無因次化表示式如下

$$w^*(\rho) = \frac{\pi E}{(1 - \nu^2)4Rp_0} w(\rho)$$

以上兩個解不同，誰是誰非，擬以邊界元素法驗證之。

(c). 分割網目：本問題具軸對稱，故僅需對 r 軸離散如下

60 個元素網目圖

(d). 分析結果

圖 4.18 三維無限域內錢幣形裂縫面位移圖

(e). 討論：

- (1). 本問題因具軸對稱，邊界的面積分可簡化為一維 r 軸積分。
- (2). 由圖 4.18 可知 Sneddon 之正解有誤，Fett 正解才對，Sneddon 係將積分上下項代錯了，後經 Fett 修正。
- (3). 以上數值解均可逼近正解。

4.9 簡例介紹

4.9.1 有限域(NASTRAN 解法)

上節四例題均為無限域問題，僅需對裂縫邊界作離散，若為有限域裂縫問題如圖 4.19 所示，則除需對正規邊界 S 作離散外，亦需對裂縫邊界 C 作離散，說明如下：

以下就舉一實際問題，於本節分別以 NASTRAN 的二維 CRAC2D 與三維 CRAC3D 元素模擬，於 15.5 節再以對偶邊界元素法分析比較之。

問題描述：

如右圖 15.7 所示：

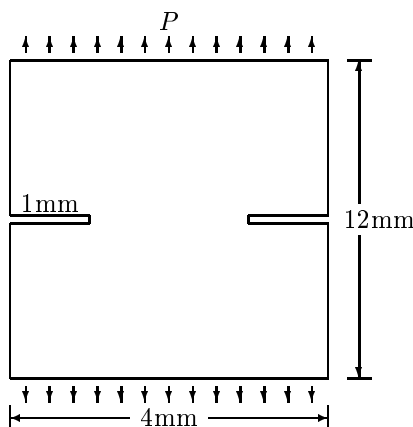


圖 15.7 MSC/NASTRAN 裂縫問題解析例

所需資料：

材料性質資料— E (楊氏模數) = $10 \times 10^6 \text{ psi}$, ν (泊松比) = 0.3

施負荷資料— $P = 1000 \text{ Kg/mm}^2$

約束條件—— 合理地約束剛體運動即可，如資料檔所示。

解析解：

$$K_I = Y(a)\sigma\sqrt{a}, \text{ 其中, } Y(a) = 1.99 + 0.76\frac{a}{w} - 8.48\left(\frac{a}{w}\right)^2 + 2.736\left(\frac{a}{w}\right)^3 + \dots$$

$$\text{代入 } a = 1, w = 4 \text{ 可得 } Y(a) = 2.0775 \text{ 與 } K_I = 2077.5$$

有限元素網目分布圖：

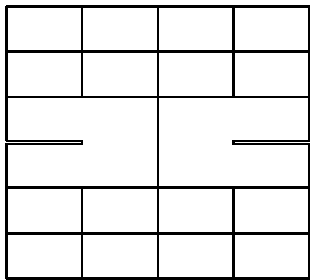


圖 15.8 二維有限元素網目分布圖

圖 15.9 三維有限元素網目分布圖

濃 NASTRAN 資料檔：

二維裂縫元素模擬資料檔

```
ID MSC, CC215 $
$ID KIZ, CRACK3D
TIME 100
SOL 24
CEND
TITLE = BASIC STATIC TEST OF CRACK ELEM, 2D CC215
SUBTITLE= MODE I
  DISP=ALL
  SET 1 = 9,10
  STRESS=1
SUBCASE 1
  LOAD=1
  SPC=1
$ OUTPUT(PLOT)
$ SET 2=ALL
$ PLOT
$ PLOT STATIC DEFORMATION
$ CONTOUR MAJPRIN
$ PLOT CONTOUR
BEGIN BULK
$ 1 .. 2 .. 3 .. 4 .. 5 .. 6 .. 7 .. 8 .. 9 .. 10
ADUM8 18 0 5 0 CRAC2D
PRAC2D 1 1 1. 0 .10 0.50 180.
MAT1 1 10.E6 .3 .10 1.E-6 100.
$
CRAC2D 9 1 17 21 23 24 25 18
      13 12 11 16
$
CRAC2D 10 1 19 20 15 14 13 18
      25 26 27 22
$
$ RIGID BODY MODES
$
$ FOR KI
SPC1 1 1 1 THRU 5
SPC1 1 1 33 THRU 37
```

```

SPC1      1      2      18
SPC1      1      3456  1      THRU      200
$
$ DEFINE COORDINATES FIXED AT THE TIPS TO COMPARE COD
CORD2R    2      -1.0   0.0   0.0   -1.   0.0   1.0   C2R1
+2R1      0.0     0.0   1.0
CORD2R    3      1.0   0.0   0.0   1.0   0.0   1.0   C3R1
+3R1      2.0     0.0   1.0
$
$ 1 .. 2 .. 3 .. 4 .. 5 .. 6 .. 7 .. 8 .. 9 .. 10
GRID      1      -2.0  -6.0
GRID      2      -1.0  -6.0
GRID      3      0.0   -6.0
GRID      4      1.0   -6.0
GRID      5      2.0   -6.0
GRID      6      -2.0  -4.0
GRID      7      -1.0  -4.0
GRID      8      0.0   -4.0
GRID      9      1.0   -4.0
GRID     10      2.0   -4.0
GRID     11      -2.0  -2.0
GRID     12      -1.0  -2.0
GRID     13      0.0   -2.0
GRID     14      1.0   -2.0
GRID     15      2.0   -2.0
GRID     16      -2.0   0.0   0.0   2
GRID     17      -1.0   0.0
GRID     18      0.0   0.0
GRID     19      1.0   0.0
GRID     20      2.0   0.0   0.0   3
GRID     21      -2.0   0.0   0.0   2
GRID     22      2.0   0.0   0.0   3
GRID     23      -2.0   2.0
GRID     24      -1.0   2.0
GRID     25      0.0   2.0
GRID     26      1.0   2.0
GRID     27      2.0   2.0
GRID     28      -2.0   4.0
GRID     29      -1.0   4.0
GRID     30      0.0   4.0
GRID     31      1.0   4.0
GRID     32      2.0   4.0
GRID     33      -2.0   6.0
GRID     34      -1.0   6.0
GRID     35      0.0   6.0
GRID     36      1.0   6.0
GRID     37      2.0   6.0
$
CQUAD4    1      1      1      2      7      6
CQUAD4    2      1      2      3      8      7
CQUAD4    3      1      3      4      9      8
CQUAD4    4      1      4      5     10      9
CQUAD4    5      1      6      7     12     11
CQUAD4    6      1      7      8     13     12
CQUAD4    7      1      8      9     14     13
CQUAD4    8      1      9     10     15     14
CQUAD4   11      1     23     24     29     28
CQUAD4   12      1     24     25     30     29
CQUAD4   13      1     25     26     31     30
CQUAD4   14      1     26     27     32     31
CQUAD4   15      1     28     29     34     33
CQUAD4   16      1     29     30     35     34
CQUAD4   17      1     30     31     36     35
CQUAD4   18      1     31     32     37     36
PSHELL    1      1      1.0   -1
$
$ APPLY LOAD
$
$NORMAL P
FORCE     1      1      -500.  0.0   1.0   0.0

```

```

FORCE 1 2 -1000. 0.0 1.0 0.0
FORCE 1 3 -1000. 0.0 1.0 0.0
FORCE 1 4 -1000. 0.0 1.0 0.0
FORCE 1 5 -500. 0.0 1.0 0.0
FORCE 1 33 500. 0.0 1.0 0.0
FORCE 1 34 1000. 0.0 1.0 0.0
FORCE 1 35 1000. 0.0 1.0 0.0
FORCE 1 36 1000. 0.0 1.0 0.0
FORCE 1 37 500. 0.0 1.0 0.0
$
ENDDATA

```

三維裂縫元素模擬資料檔

```

$NASTRAN REAL=0,HICORE=250000
ID MSC, CC216
$ID KIZ,CRACK3D
TIME 25
SOL 24
CEND
TITLE = 3D CRACK ELEMENT UNDER STATIC LOAD CC216
SUBTITLE= THREE MODES
SET 1 = 9,10
DISP=ALL
STRESS=1
SPCFORCES=ALL
LOAD=ALL
SUBCASE 1
LOAD=1
SPC=1
SUBCASE 2
LOAD=2
SPC=2
SUBCASE 3
LOAD=3
SPC=3
$OUTPUT(PLOT)
$SET 2=ALL
$PLOT
$PLOT STATIC DEFORMATION
$CONTOUR MAJPRIN
$PLOT CONTOUR
BEGIN BULK
$ 1 .. 2 .. 3 .. 4 .. 5 .. 6 .. 7 .. 8 .. 9 .. 10
$
$ MAT1 = 1 MATL PROPS, CDUM1 ADJUSTS THEM FOR PLANE STRAIN
$
ADUM9 64 0 6 0 CRAC3D
CRAC3D 9 1 17 21 23 24 25 18 +C11
+C11 13 12 11 16 +C12
+C12 +C13
+C13 125 118 113 112 111 116 +C14
+C14 +C15
+C15 +C16
+C16 88 +C17
+C17 188
CRAC3D 10 1 19 20 15 14 13 18 +C21
+C21 25 26 27 22 +C22
+C22 119 120 115 114 +C23
+C23 113 118 125 126 127 122 +C24
+C24 +C25
+C25 +C26
+C26 89 +C27
+C27 189
PRAC3D 1 1 0.50 180.
MAT1 1 10.E6 .3 .10 1.E-6 100.
$
SPC1 10 456 1 THRU 200
$ RIGID BODY MODES

```

```

SPC1 1 456 1 THRU 200
SPC1 1 123 18
SPC1 1 12 118
SPC1 1 2 17
$ MODE 2 BC
SPC1 2 456 1 THRU 200
SPC1 2 123 18
SPC1 2 12 118
SPC1 2 2 21
SPC1 2 2 17
SPC1 2 2 19
SPC1 2 2 22
SPC1 2 2 16
SPC1 2 2 20
SPC1 2 2 121
SPC1 2 2 117
SPC1 2 2 119
SPC1 2 2 122
SPC1 2 2 116
SPC1 2 2 120
SPC1 2 2 88
SPC1 2 2 188
SPC1 2 2 89
SPC1 2 2 189
$ TIE THE TOP AND BOTTOM TOGETHER SO THERE IS NO BENDING
RBE2 1 35 2 33 34 36 37 133
      134 135 136 137
RBE2 3 3 2 1 2 4 5 101
      102 103 104 105
$ TIE ALL LAYERS SO THERE IS NO BENDING
RBE2 5 8 2 6 7 9 10 106
      107 108 109 110
RBE2 6 13 2 11 12 14 15 111
      112 113 114 115
RBE2 9 30 2 28 29 31 32 128
      129 130 131 132
RBE2 10 25 2 23 24 26 27 123
      124 125 126 127
$ MODE 3 BC
SPC1 3 456 1 THRU 200
SPC1 3 123 18
SPC1 3 12 118
SPC1 3 2 21
SPC1 3 2 17
SPC1 3 2 19
SPC1 3 2 22
SPC1 3 2 16
SPC1 3 2 20
SPC1 3 2 121
SPC1 3 2 117
SPC1 3 2 119
SPC1 3 2 122
SPC1 3 2 116
SPC1 3 2 120
SPC1 3 2 88
SPC1 3 2 188
SPC1 3 2 89
SPC1 3 2 189
$
$ DEFINE COORDINATES FIXED AT THE TIPS TO COMPARE COD
CORD2R 2 -1.0 0.0 0.0 -1.0 0.0 1.0 C2R1
+2R1 0.0 0.0 1.0
CORD2R 3 1.0 0.0 0.0 1.0 0.0 1.0 C3R1
+3R1 2.0 0.0 1.0
$
$ 1 .. 2 .. 3 .. 4 .. 5 .. 6 .. 7 .. 8 .. 9 .. 10
GRID 1 -2.0 -6.0
GRID 2 -1.0 -6.0
GRID 3 0.0 -6.0
GRID 4 1.0 -6.0

```

GRID	5	2.0	-6.0		
GRID	6	-2.0	-4.0		
GRID	7	-1.0	-4.0		
GRID	8	0.0	-4.0		
GRID	9	1.0	-4.0		
GRID	10	2.0	-4.0		
GRID	11	-2.0	-2.0		
GRID	12	-1.0	-2.0		
GRID	13	0.0	-2.0		
GRID	14	1.0	-2.0		
GRID	15	2.0	-2.0		
GRID	16	-2.0	0.0	0.0	2
GRID	17	-1.0	0.0		
GRID	18	0.0	0.0		
GRID	19	1.0	0.0		
GRID	20	2.0	0.0	0.0	3
GRID	21	-2.0	0.0	0.0	2
GRID	22	2.0	0.0	0.0	3
GRID	23	-2.0	2.0		
GRID	24	-1.0	2.0		
GRID	25	0.0	2.0		
GRID	26	1.0	2.0		
GRID	27	2.0	2.0		
GRID	28	-2.0	4.0		
GRID	29	-1.0	4.0		
GRID	30	0.0	4.0		
GRID	31	1.0	4.0		
GRID	32	2.0	4.0		
GRID	33	-2.0	6.0		
GRID	34	-1.0	6.0		
GRID	35	0.0	6.0		
GRID	36	1.0	6.0		
GRID	37	2.0	6.0		
GRID	88	-0.5			
GRID	89	0.5			
GRID	188	-0.5		-2.0	
GRID	189	0.5		-2.0	
GRID	101	-2.0	-6.0	-2.0	
GRID	102	-1.0	-6.0	-2.0	
GRID	103	0.0	-6.0	-2.0	
GRID	104	1.0	-6.0	-2.0	
GRID	105	2.0	-6.0	-2.0	
GRID	106	-2.0	-4.0	-2.0	
GRID	107	-1.0	-4.0	-2.0	
GRID	108	0.0	-4.0	-2.0	
GRID	109	1.0	-4.0	-2.0	
GRID	110	2.0	-4.0	-2.0	
GRID	111	-2.0	-2.0	-2.0	
GRID	112	-1.0	-2.0	-2.0	
GRID	113	0.0	-2.0	-2.0	
GRID	114	1.0	-2.0	-2.0	
GRID	115	2.0	-2.0	-2.0	
GRID	116	-2.0	0.0	-2.0	2
GRID	117	-1.0	0.0	-2.0	
GRID	118	0.0	0.0	-2.0	
GRID	119	1.0	0.0	-2.0	
GRID	120	2.0	0.0	-2.0	3
GRID	121	-2.0	0.0	-2.0	2
GRID	122	2.0	0.0	-2.0	3
GRID	123	-2.0	2.0	-2.0	
GRID	124	-1.0	2.0	-2.0	
GRID	125	0.0	2.0	-2.0	
GRID	126	1.0	2.0	-2.0	
GRID	127	2.0	2.0	-2.0	
GRID	128	-2.0	4.0	-2.0	
GRID	129	-1.0	4.0	-2.0	
GRID	130	0.0	4.0	-2.0	
GRID	131	1.0	4.0	-2.0	
GRID	132	2.0	4.0	-2.0	
GRID	133	-2.0	6.0	-2.0	

```

GRID    134          -1.0    6.0    -2.0
GRID    135          0.0    6.0    -2.0
GRID    136          1.0    6.0    -2.0
GRID    137          2.0    6.0    -2.0
$
CHEXA   1          1          1          2          7          6          101          102          CH1
+H1     107        106
CHEXA   2          1          2          3          8          7          102          103          CH2
+H2     108        107
CHEXA   3          1          3          4          9          8          103          104          CH3
+H3     109        108
CHEXA   4          1          4          5          10         9          104          105          CH4
+H4     110        109
CHEXA   5          1          6          7          12         11         106          107          CH5
+H5     112        111
CHEXA   6          1          7          8          13         12         107          108          CH6
+H6     113        112
CHEXA   7          1          8          9          14         13         108          109          CH7
+H7     114        113
CHEXA   8          1          9          10         15         14         109          110          CH8
+H8     115        114
CHEXA  11          1          23         24         29         28         123          124          CH11
+H11    129        128
CHEXA  12          1          24         25         30         29         124          125          CH12
+H12    130        129
CHEXA  13          1          25         26         31         30         125          126          CH13
+H13    131        130
CHEXA  14          1          26         27         32         31         126          127          CH14
+H14    132        131
CHEXA  15          1          28         29         34         33         128          129          CH15
+H15    134        133
CHEXA  16          1          29         30         35         34         129          130          CH16
+H16    135        134
CHEXA  17          1          30         31         36         35         130          131          CH17
+H17    136        135
CHEXA  18          1          31         32         37         36         131          132          CH18
+H18    137        136
PSOLID  1          1
$
$ APPLY LOAD
$
$NORMAL P
FORCE   1          3          -1000.    0.0    1.0    0.0
FORCE   1          35          1000.    0.0    1.0    0.0
FORCE   1          103         -1000.    0.0    1.0    0.0
FORCE   1          135          1000.    0.0    1.0    0.0
$ TANGENTIAL Q
FORCE   2          3          -1000.    1.0    0.0    0.0
FORCE   2          35          1000.    1.0    0.0    0.0
FORCE   2          103         -1000.    1.0    0.0    0.0
FORCE   2          135          1000.    1.0    0.0    0.0
$ OUTOF PLANE T
FORCE   3          3          -1000.    0.0    0.0    1.0
FORCE   3          35          1000.    0.0    0.0    1.0
FORCE   3          103         -1000.    0.0    0.0    1.0
FORCE   3          135          1000.    0.0    0.0    1.0
ENDDATA

```

湶 NASTRAN 輸出結果說明：

級數解， $K_I = 2077.5$

二維元素模擬， $K_I = 2021.76$ ，誤差 2.7 %

```

          S T R E S S E S      I N      U S E R      E L E M E N T S (CDUM8)
EL-ID    S1    S2    S3          S4          S5          S6          S7          S8    S9
  9  5.00000E-01  0.0  3.10362E+02  1.54494E+03 -4.68958E-13  2.02176E+03 -1.19371E-12  0.0  0.0

```

10 5.00000E-01 0.0 3.10362E+02 1.54494E+03 1.03917E-13 2.02176E+03 -1.27898E-12 0.0 0.0

三維元素模擬, $K_I = 2138.2$, 誤差 2.9 % (輸出結果為 534.55, 因負荷僅給 1/4, 乘以 4 後, 可得 2138.2)。

STRESSES IN USER ELEMENTS (CDUM9)

EL-ID	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9
9	5.789E+01	3.927E+02	-7.845E+00	-1.344E-12	9.854E-14	-1.433E-13	5.345E+02	-3.367E-12	3.520E-12
10	5.789E+01	3.927E+02	-7.845E+00	-1.782E-12	5.693E-13	-4.235E-14	5.345E+02	-3.154E-12	5.991E-12

4.9.2 有限域—(對偶邊界元素法)

近年來, 由陳與洪所發展的對偶積分模式, 已被應用在裂縫成長分析, 現成的軟體 BEASY-CRACK 也已商業化, 本節將以此方法來驗證 NASTRAN 所得結果。

(1) 問題描述

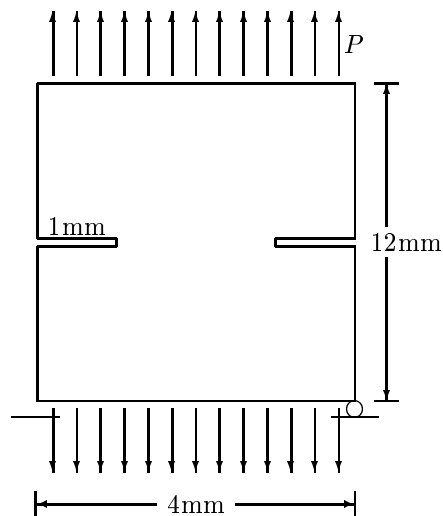


圖 15.8 MSC/NASTRAN 裂縫問題解析例與束制條件

(2) 所需資料

(1) 材料性質

$$E(\text{楊氏模數}) = 10 \times 10^6 \text{ psi}$$

$$\nu(\text{包生比}) = 0.3$$

(2) 負荷資料

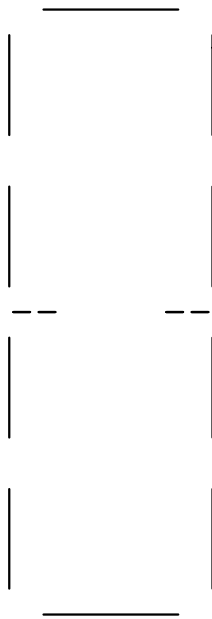
$$P=1000 \text{ kgf/mm}^2$$

(3) 束制條件去除剛體運動項, 如圖 15.8 所示

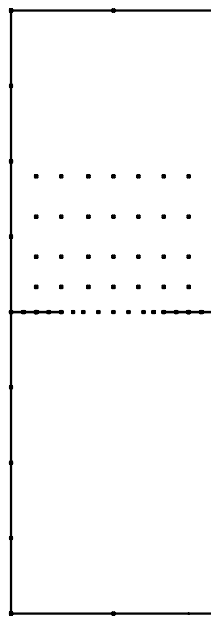
(3)BEASY-CRACK 書輸入資料檔

```
Example - Two edge cracks
STRESS
68947237.89 0.3
36 18 10
BP
8
1 0.002 0.006
2 -0.002 0.006
3 -0.002 0.
4 -0.001 0.
5 -0.002 -0.006
6 0.002 -0.006
7 0.002 0.
8 0.001 0.
BL
10
1 1 2 1 1.0
2 2 3 2 .5 .5
3 3 4 2 .5 .5
4 4 3 2 .5 .5
5 3 5 2 .5 .5
6 5 6 1 1.0
7 6 7 2 .5 .5
8 7 8 2 .5 .5
9 8 7 2 .5 .5
10 7 1 2 .5 .5
BZ
1
1 10 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
IPT
35
1 .0015 .0011
2 .0010 .0011
3 .0005 .0011
4 .0000 .0011
5 -.0005 .0011
.....
TBC
2 0 0
1 0 9810000.
10 0 9810000.
CUN
0 3 0
10 1 1 0.0
10 1 2 0.0
10 3 2 0.0
END
```

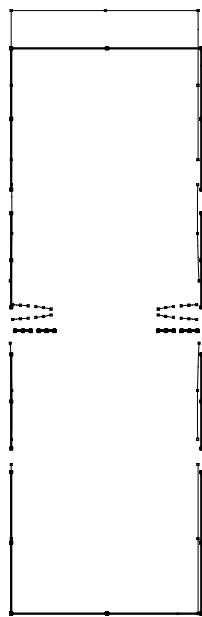
(4) 邊界元素網目圖



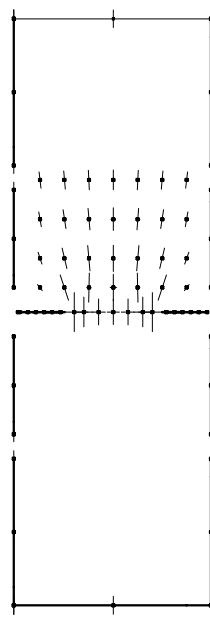
(5) 內點分佈圖



(6) 變形圖

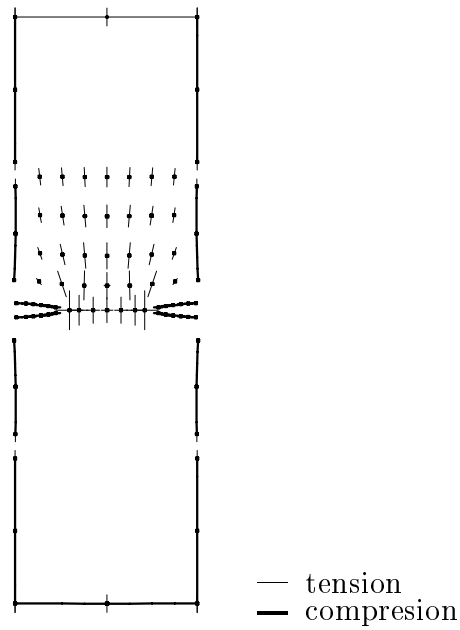


(7) 主軸應力分佈圖 (畫在變形前)



— tension
— compresion

(8) 主軸應力分佈圖 (畫在變形後)



(9) 結果比較

Table 1: 破壞力學應力強度因子分析程式比較

	有限元素法 三維元素模擬	有限元素法 二維元素模擬	對偶邊界元素法 一維元素模擬
元素數	18	18	18
節點數	137	37	36
K_I (誤差值)*	2138 (2.9%)	2021(2.7%)	2066 (0.482%)

* K_I (正確解)=2077.5

習題:

以上例題係為雙邊裂縫問題，試以中央裂縫或邊裂縫進行模擬。

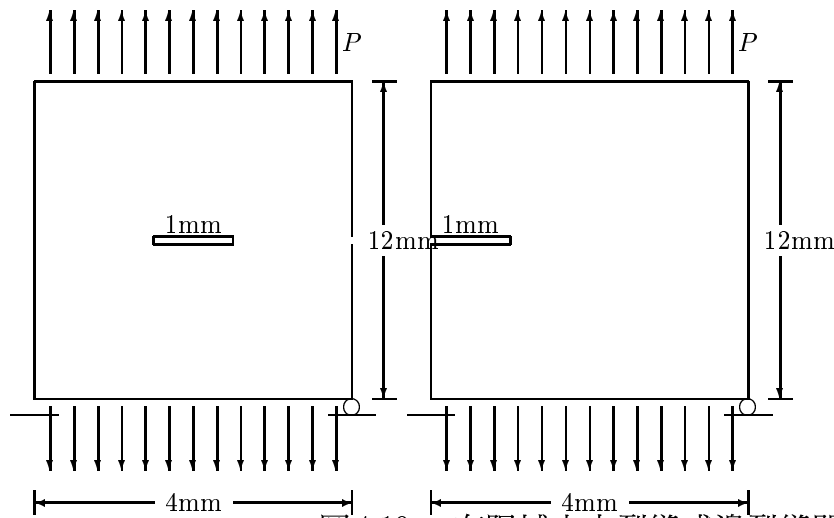


圖 4.19 有限域中央裂縫或邊裂縫問題

15.8 MSC/NASTRAN 發展 5.8 到 MSC/NASTRAN 成熟 但到 1990 年才漸告一成不變 但一於一計一

4.10 結論

本章已就積分方程在彈性力學與裂縫問題作一系統性之介紹，可看出對偶積分式的推導，甚具廣泛性。將其綜整如下表

表 4.5 積分方程在彈力的應用各式方法綜整表

介紹完邊界元素法在 Laplace 方程、彈性力學與破壞力學等不同領域之應用後，讀者比較之，當可發現其分析的邏輯與步驟都是一樣的。所不同的是換換核函數而已，其實也可以說是邊界元素法發展到目前為止，就是這套理論基礎與解題流程而已。了解之後，不管在那個領域的應用，均可依樣畫葫蘆，解決不同的問題。

本書解題之一貫作法係依據對偶積分式之架構並配合邊界元素法來作系統性介紹，應有助於對文獻上彈力的各種積分方程解法的了解。本書此種表示法，在日本方面，1987 年，西谷弘信的“體積力法”一書中亦有類似對偶積分式的影子，本書的四個核函數 U, T, L, M 或 U, U^*, T, T^* 的關係式在該書亦被獨立地提出，並有詳細討論。而在 1989 年，捷克 Sladek 的邊界元素法之應力分析 (Stress Analysis in Boundary Element Method) 一書中亦有本書對偶積分的架構，唯其稱呼不同，他將對偶積分式的第二式叫作“積微方程式” (integro-differential equation) 也就是未將曳引力微分運算元直接放入對偶積分式第一式的積分符號內。他根據這兩個式子，也提出解任意邊界值問題的統一架構。後來，在 1990 年亦被 Gray 所提出。而這套作法與 Kaya, Erdogan 的奇異積分式可說是殊途同歸的碰到超奇異的數學問題，如下表 4.6 所示。

表 4.6 超強奇異核的不同推導方式

這些意外的發現，更加證實筆者在 1986 年研究成果的正確性。而近幾年來，Rizzo, Achenbach, Atluri, crus 與 Guiggiani 等人亦對超奇異積分方程作了一些應用。

當然，以上所解的問題亦可由有限元素法解之。所以安排第八章將就有限元素法與邊界元素法兩種數值計算方法作一探討。

4.11 參考文獻

- 1 H.-K. Hong and J. T. Chen, Derivations of Integral Equations of Elasticity, Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol.114, No.6, pp.1028-1044, 1988.
- 2 H.-K. Hong and J. T. Chen, 1988, Generality and Special Cases of Dual Integral Equations of Elasticity, Journal of the Chinese Society of Mechanical Engineers, Vol.9, No.1, pp.1-9.
- 3 S. W. Chyuan, J. H. Lin, J. T. Chen and D. C. Liu, Dual boundary element analysis for fatigue behavior of missile structure, J. Chinese Institute of Engineers, Vol.23, No.3, pp.339-348, 2000.
- 4 陳正宗，破裂力學之邊界積分推導與阿達馬主值研究，台大應力所碩士論文，1986。
- 4 J. T. CHN, On dual integral representation and its applications to computational mechanics, Ph.D. Dissertation, Department of Civil Engineering, Taiwan University, 1994.
- 5 Tada, H., Paris, P.C. and Irwin, G. R., The Stress Analysis of Cracks Handbook, Del Research Corporation, 1973.
- 6 Sih, G. C., Handbook of Stress Intensity Factors, Institute of Fracture and Solid Mechanics, Lehigh University, 1973.
- 7 Rooke, D. P. and Cartwright, D. J., Compendium of Stress Intensity Factors, HerMajesty's Stationary Office, London, 1976.
- 8 Zienkiewicz, O. C., The Finite Element Method in Engineering Science, 2nd ed., McGraw-Hill, London, 1971.
- 9 Gallagher, R. H., Survey and Evaluation of the Finite Element in Linear Fracture Mechanics Analysis, Conf. Struct Mech. Reactor Technology, Berlin, 1971.
- 10 Rice, J. R. and Tracey, D. H., Computational Fracture Mechanics, in Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics, Academic Press, New York, 1973.

- 11 Jerram, K. and Hellen, T. K., Finite Element in Fracture Mechanics, Proc. Int. Conf. Welding Research related to Power Plant, Southampton, 1972.
- 12 Hellen, T. K., On the Method of Virtual Crack Extensions, Inter. J. for Numerical Methods in Engineering, Vol.9, pp.187-207, 1975.
- 13 李清國, 林信立, 邱垂鈺, 陳正宗, MSC/NASTRAN 程式在求取應力強度因子的應用, 第一屆台灣 NASTRAN 會議, 台北, 1989.
- 14 Zvi Zaphir, Crack Propagation Analysis Using NASTRAN Superelement Capability, in MSC/NASTRAN User's Conference Proceedings, 1983.
- 15 MSC/NASTRAN Theoretical Manual, Sec.5.8.7, The Crack Tip Element.
- 16 Hughes, J. J. R. and Akin, J. E., Techniques for Developing Special Finite Shape Function with Particular Reference to Singularities, Int. J. for Numerical Methods in Engineering, Vol.15, pp.733-pp751, 1980.
- 17 Zienkiewicz, O. C., The Finite Element Method, McGraw-Hill, 1972
- 18 陳正宗、林信立、韓文仁、邱垂鈺、秦無忝, MSC/NASTRAN 使用入門與工程應用, 良宜出版社, 1989.
- 19 陳正宗與洪宏基, 邊界元素法, 第2版, 新世界出版社, 台北, 484 面, 1992.
- 20 陳正宗、林信立、邱垂鈺、全湘偉、黃志勇韓文仁與秦無忝編著, 有限元素分析與工程實例— MSC/NASTRAN 軟體應用, 台北圖書公司, 台北, 500 面, 1996。
- 21 A. Portela, Dual Boundary Element Analysis of Crack Growth, Comp. Mech. Publ., Southampton, 1993.
- 22 A. Portela and M. H. Aliabadi, Crack Growth Analysis Using Boundary Elements, Comp. Mech. Publ., Southampton, 1995.
- 23 M. Reymond and M. Miller, MSC/NASTRAN Quick Reference Guide, V68, 1994.
- 24 R. S. Lahey, M. P. Miller and M. Reymond(eds.), MSC/NASTRAN Reference Manual Vol.1,2,3, V68, 1994.

4.12 附錄(BEASY-CRACK 簡易使用手冊)

I. BEASY-CRACK 部份

- (1) 準備輸入檔, 如EXP1,
- (2) 執行 BEGEN.EXE, 可看見幾何資料檔 (檔名自行輸入),
- (3) 執行 BEPLT.EXE, 可得爆炸網格圖 (HPMSH1.PLT) 和網格配置圖 (HPMSH2.PLT),
- (4) 執行 CRACKER4.EXE, 可看見分析結果資料檔 (檔名自行輸入),
- (5) 執行 BEPLT.EXE, 可得變形圖 (HPMSH3.PLT), 主應分佈圖畫在未變形位置 (HPMSH4.PLT) 和主應力分佈圖畫在變形位置 (HPMSH5.PLT),
- (6) 執行 CPATH.EXE, 可得裂縫成長軌跡圖 (CPATH.PLT)。

II. CTEX 部份

1. 擬以繪出 HPMSH1.PLT 圖檔為例作介紹, 執行"hp2xx HPMSH1.PLT" 可預視爆炸網格圖之圖形。
2. 執行"hp2xx -w200 -h200 -p3 -m cad -f *newfilename*.TE *oldfilename*.PLT 產生 **TEX** 可接受之檔案 HPMSH1.TE。
3. 將 HPMSH1.TE 檔中前四列的 {\ emline} 刪掉, 剔除圖框。
4. 在主文檔中,(TEST.TE), 引入"\ input{HPMSH1}" 指令, 將圖檔匯入。
5. 在 SET 檔,(TEST.SET) 中的 Leftmargine 取"-2.4", Topmargine 則可取"2.54", 將圖形置中。
6. "cl TEST"。
7. "p TEST" 印出圖形。

PS.(1)(2)(3)(4)(5) 代表執行的順序。