

文章编号: 1004-3918(2007)05-0731-04

弹性半平面中斜裂纹问题的应力强度因子

柯献辉, 吴言成, 王伟, 张欣, 杜云海

(郑州大学工程力学系, 郑州 450001)

摘要: 从研究半平面斜裂纹问题的超奇异积分方程出发, 通过适当的正则化代换和方程配置, 建立求解问题的线性方程组, 从而得出计算半平面中任意斜裂纹问题的数值方法, 并编制 Fortran 计算程序, 对不同情况下裂纹的应力强度因子进行计算. 数值结果表明, 半平面的边界对裂纹应力强度因子的大小有剧烈影响.

关键词: 半平面; 斜裂纹; 超奇异积分方程; 应力强度因子

中图分类号: TB 124 **文献标识码:** A

超奇异积分方程法是断裂力学问题求解的新方法, 近来有许多力学工作者在这方面开展研究工作, 在利用超奇异积分方程计算弹性体裂纹问题方面取得很大进展. 弹性半平面中裂纹问题是许多工程结构和机械零部件强度计算面对的一个很重要的问题, 具有广泛的工程研究价值. 文献[1-2] 针对平行于边界的裂纹问题分别就自由边和固定边半平面裂纹问题进行了研究和计算, 文献[3] 讨论了双材料平面中任意斜裂纹问题, 给出了超奇异积分方程, 并就一般双材料情况(材料的切变模量比 $0 < G_2/G_1 < \infty$) 进行了计算. 本文在文献[3] 结果的基础上, 适当修改积分函数, 进一步求解半平面($G_2/G_1=0$, 或 ∞) 任意斜裂纹问题.

1 超奇异积分方程

设自由边或固定边半平面中有单个任意斜裂纹 Γ , 在裂纹岸上受分布力 $F_i(\eta')$ ($i=1, 2$), 如图 1 所示, 问题的超奇异积分方程为

$$\oint_{\Gamma^+} \frac{\tilde{u}_i^*(y')}{(y'-\eta')^2} dy' + \int_{\Gamma^+} K_{ik}(P, Q) \tilde{u}_k^*(y') dy' = -\frac{\pi(\kappa+1)}{2G} F_i(\eta') \quad (ik=1, 2) \quad (1)$$

其中: “ \oint ” 为超奇异积分算子, $\tilde{u}_i^*(P) = u_i^*(P^+) - u_i^*(P^-)$ 为裂纹岸位移间断, G 为材料的切变模量, 常数 κ 在平面应力和平面应变情况下分别为 $\kappa = (3-\mu)/(1+\mu)$ 和 $\kappa = (3-4\mu)$, μ 为材料泊松比. 正常积分项积分核 $K_{ik}(P, Q)$ 的表达式

$$K_{11} = \beta_{1m}\beta_{1n} [(\kappa+1)\beta_{1k}f_{mnk} + (3-\kappa)\beta_{2k}g_{mnk}] / 4(\kappa-1)$$

$$K_{12} = \beta_{2m}\beta_{1n} [(\kappa+1)\beta_{1k}f_{mnk} + (3-\kappa)\beta_{2k}g_{mnk}] / 4(\kappa-1)$$

$$K_{21} = \beta_{1m}\beta_{1n} [\beta_{1k}f_{mnk} + \beta_{2k}g_{mnk}] / 4$$

$$K_{22} = \beta_{2m}\beta_{1n} [\beta_{1k}f_{mnk} + \beta_{2k}g_{mnk}] / 4$$

这里 $\beta_{11} = \cos \theta$, $\beta_{12} = \sin \theta$, $\beta_{21} = -\sin \theta$, $\beta_{22} = \cos \theta$, 函数 f_{mnk} 和 g_{mnk} 由基本解导出^[3]. 对于自由边半平面情况, 取其中的参数 $A=1, B=1$; 对于固定边半平面情况, 取 $A=-1/\kappa, B=-\kappa$.

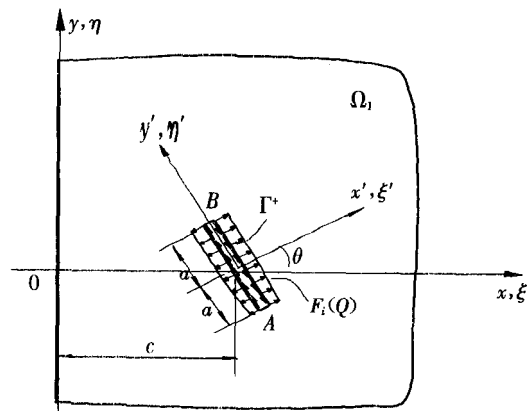


图 1 弹性半平面中的斜裂纹
Fig.1 A oblique crack in half-plane

2 数值算法

2.1 正则化方程

引入变量和函数代换: $y' = ar, \eta' = as, \tilde{u}_i(y') = af_i(r)$

$$H_{ik}(r, s) = a^2 K_{ik}(y', \eta'), \quad g_i(s) = -\frac{\pi(\kappa+1)}{2G} F_i(\eta')$$

收稿日期: 2007-05-19

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10572131)

作者简介: 柯献辉(1967-), 男, 河南信阳人, 实验师.

可将式(1)正则化为

$$\int_{-1}^1 \frac{f_i(r)}{(r-s)^2} dr + \int_{-1}^1 H_{ik}(r,s) f_k(r) dr = g_i(s) \quad (-1 < s < 1; i, k=1, 2) \quad (2)$$

并可把 $f_i(r)$ 表为

$$f_i(r) = F_i(r) \sqrt{1-r^2} \quad (i=1, 2) \quad (3)$$

2.2 离散方程组

由于裂纹间断变化的连续性, 可以知 $F_i(r)$ 在闭区间 $[-1, 1]$ 上是有界连续函数, 将其近似表示为第二类 Chebyshev 多项式截断级数:

$$F_i(r) = a_{in} U_n(r) \quad (i=1, 2; n=0, 1, \dots, N) \quad (4)$$

把式(3)、(4)代入正则化积分方程组(2), 可将其化为如下由两个方程组成的线性代数方程组

$$G_{ikn}(s) a_{kn} = g_i(s) \quad (i, k=1, 2; n=0, 1, \dots, N) \quad (5)$$

方程组的系数

$$G_{ikn}(s) = \delta_{ik} R_n(s) + \int_{-1}^1 H_{ik}(r,s) U_n(r) \sqrt{1-r^2} dr \quad (6)$$

这里, $R_n(s) = -\pi(n+1)U_n(s)$ 为超奇异积分的有限部积分^[4], δ_{ik} 为 Kronecker 数.

为确定待定系数 a_{kn} , 需配置足够数目的线性方程, 取第二类 Chebyshev 多项式在开区间 $(-1, 1)$ 上的 $N+1$ 个零点作为配置点:

$$S_j = \cos\left(\frac{j}{N+2}\pi\right) \quad (j=1, 2, \dots, N+1) \quad (7)$$

可将式(4)离散为以下线性方程组

$$G_{ikn}(s_j) a_{kn} = g_i(s_j) \quad (i, k=1, 2; n=0, 1, \dots, N; j=1, 2, \dots, N+1) \quad (8)$$

方程组(8)包含 $2(N+1)$ 个方程和 $2(N+1)$ 个未知数.

在裂纹端点应力强度因子计算公式为

$$\begin{aligned} K_{IA} &= [2G/(\kappa+1)] \sqrt{a} F_1(-1), \\ K_{IB} &= [2G/(\kappa+1)] \sqrt{a} F_1(1), \\ K_{IIA} &= [2G/(\kappa+1)] \sqrt{a} F_2(-1), \\ K_{IIB} &= [2G/(\kappa+1)] \sqrt{a} F_2(1) \end{aligned} \quad (9)$$

其中, $F_k(\pm 1)$ 可利用第二类 Chebyshev 多项式在区间端点的极限值进行计算

$$F_k(\pm 1) = \sum_{n=0}^N (\pm 1)^n (n+1) a_{kn} \quad (k=1, 2) \quad (10)$$

3 数值结果

假定在裂纹岸上作用大小相等、方向相反的均布压力 F_0 , 取不同的裂纹位置 $c/2a$, 不同的裂纹法向倾角 θ , 按照本文方法用 Fortran 语言编写计算程序, 计算得到弹性半平面斜裂纹问题在边界附近的应力强度因子数值结果如表 1 所示, 其中 $\bar{K}_k = K_k / (F_0 \sqrt{a})$ ($k=I, II$). $\theta=0^\circ$ 为裂纹平行于边界的情况, 计算结果分别与文献[1-2]相关结果相同(见表 1). 在边界附近, 应力强度因子发生急剧变化, 固定边致使应力强度因子急剧减小, 而自由边则引起应力强度因子急剧增大. 同时, 边界的作用使边界附近的裂纹即便是受单一(I型或II型)载荷作用, 也具有混合应力强度因子. 而在裂纹远离边界($c/2a > 5$)时, 边界对应力强度因子的影响基本消失, 应力强度因子趋于均质材料情况. 裂纹方向不同也导致应力强度因子呈现复杂的变化规律. 在裂纹面上分别作用均布法向力 F_0 、均布切向力 Q_0 , 较大应力强度因子随裂纹位置的变化规律如图 2 所示.

表 1 半平面中斜裂纹受均布压力时的无量纲应力强度因子

Tab.1 Non-dimensional stress intensity factors of oblique crack in half-plane under uniform pressure

$c/2a$		0.6	0.8	1	1.5	2.5	5	
固定边	$\theta=0^\circ$ [2]	\bar{K}_{IA}	0.857	0.893	0.902 ^[2]	0.957	0.983	0.995 ^[2]
		\bar{K}_{IB}	0.857	0.893	0.902 ^[2]	0.957	0.983	0.995 ^[2]
		\bar{K}_{IIA}	0.047	0.029	0.018 ^[2]	0.007	0.002	0 ^[2]
		\bar{K}_{IIB}	-0.047	-0.029	-0.018 ^[2]	-0.007	-0.002	0 ^[2]
	$\theta=30^\circ$	\bar{K}_{IA}	0.887	0.915	0.936	0.965	0.986	0.996
		\bar{K}_{IB}	0.817	0.874	0.911	0.956	0.984	0.996
		\bar{K}_{IIA}	0.049	0.034	0.023	0.010	0.003	0.001
		\bar{K}_{IIB}	-0.051	-0.024	-0.012	-0.002	0	0
	$\theta=60^\circ$	\bar{K}_{IA}	0.901	0.934	0.953	0.976	0.990	0.997
		\bar{K}_{IB}	0.750	0.856	0.910	0.962	0.987	0.997
		\bar{K}_{IIA}	0.033	0.023	0.016	0.007	0.003	0.001
		\bar{K}_{IIB}	-0.048	-0.014	-0.004	0.001	0.001	0
$\theta=90^\circ$	\bar{K}_{IA}	0.899	0.937	0.957	0.979	0.992	0.998	
	\bar{K}_{IB}	0.716	0.874	0.927	0.971	0.990	0.998	
	\bar{K}_{IIA}	0	0	0	0	0	0	
	\bar{K}_{IIB}	0	0	0	0	0	0	
自由边	$\theta=0^\circ$ [1]	\bar{K}_{IA}	1.385	1.240	1.163 ^[1]	1.078	1.029	1.007 ^[1]
		\bar{K}_{IB}	1.385	1.240	1.163 ^[1]	1.078	1.029	1.007 ^[1]
		\bar{K}_{IIA}	-0.125	-0.064	-0.037 ^[1]	-0.012	-0.003	0 ^[1]
		\bar{K}_{IIB}	0.125	0.064	0.037 ^[1]	0.012	0.003	0 ^[1]
	$\theta=30^\circ$	\bar{K}_{IA}	1.291	1.183	1.126	1.059	1.023	1.006
		\bar{K}_{IB}	1.433	1.248	1.160	1.076	1.026	1.006
		\bar{K}_{IIA}	-0.146	-0.081	-0.05	-0.021	-0.006	-0.001
		\bar{K}_{IIB}	0.062	0.021	0.007	0.001	-0.002	-0.001
	$\theta=60^\circ$	\bar{K}_{IA}	1.198	1.115	1.077	1.036	1.014	1.003
		\bar{K}_{IB}	1.441	1.202	1.119	1.048	1.016	1.004
		\bar{K}_{IIA}	-0.107	-0.057	-0.035	-0.015	-0.005	-0.001
		\bar{K}_{IIB}	0.003	-0.012	-0.012	-0.008	-0.003	-0.001
$\theta=90^\circ$	\bar{K}_{IA}	1.163	1.084	1.054	1.025	1.009	1.002	
	\bar{K}_{IB}	1.464	1.168	1.091	1.035	1.011	1.003	
	\bar{K}_{IIA}	0	0	0	0	0	0	
	\bar{K}_{IIB}	0	0	0	0	0	0	

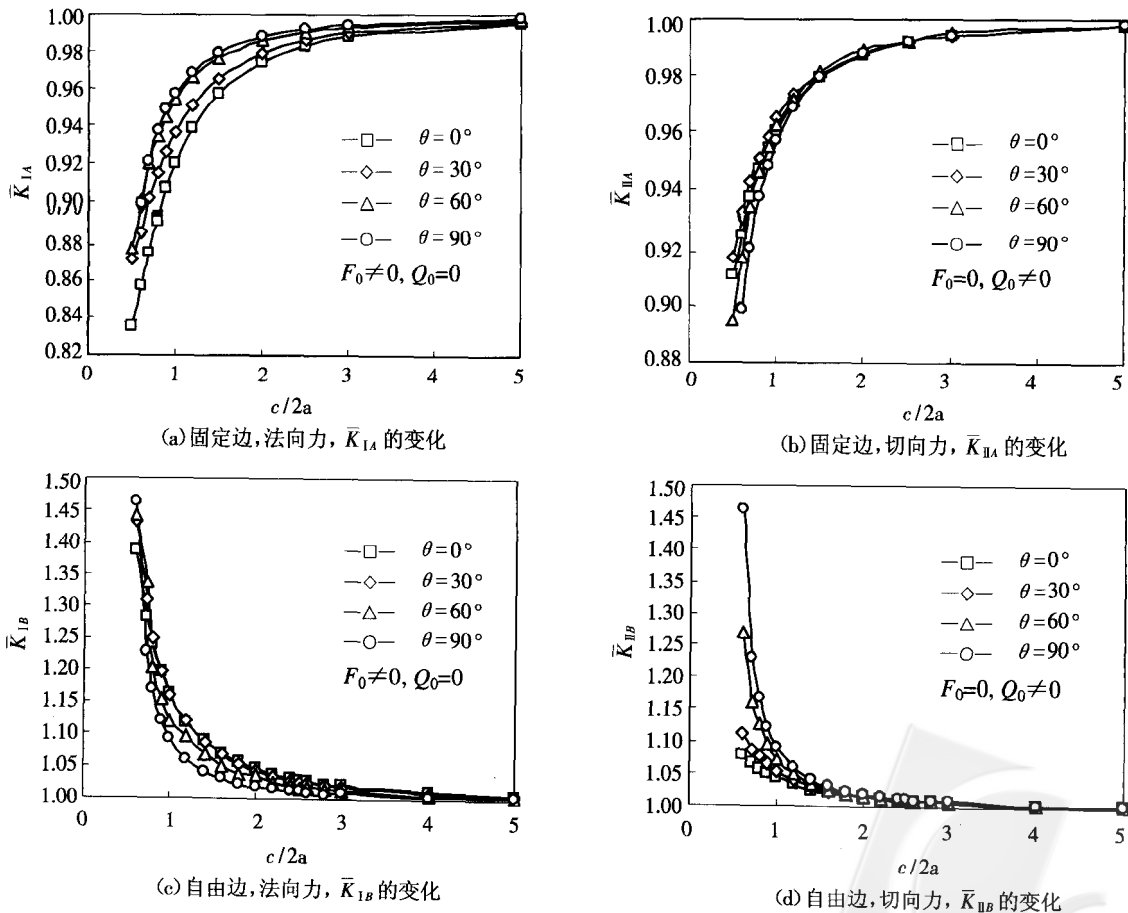


图 2 边界附近应力强度因子的变化

Fig.2 Variations of stress intensity factors closing to edge

4 结论

本文从超奇异积分方程出发,对半平面中存在的任意方向斜裂纹的问题进行了数值方法的研究,得到了求解问题的线性方程组,并用 Fortran 90 编程实现数据计算,得到不同方向斜裂纹的应力强度因子数值结果。计算表明,边界对裂纹应力强度因子有剧烈影响:在边界附近,即便在裂纹面上作用单一的法向(或切向)分布载荷,在裂纹尖端 I、II 型应力强度因子都同时存在;应力强度因子的大小与裂纹到界面的相对距离、裂纹的方向有关,表现出复杂的多因素影响关系,裂纹远离界面时(裂纹中心到界面的垂直距离超过裂纹长度的 5 倍),计算结果与均质体中的结果基本相同,裂纹面在法向载荷作用下仅存在 I 型应力强度因子,在切向载荷作用下仅存在 II 型应力强度因子。

参考文献:

- [1] 杜云海,郭同德. 自由边半平面体裂纹问题的超奇异积分方程法[J]. 郑州大学学报(工学版), 2003, 24(1): 28-31.
- [2] 杜云海,张勇明. 固定边半平面体裂纹问题的超奇异积分方程法[J]. 河南科学, 2003, 21(2): 143-146.
- [3] 杜云海,乐金朝. 双材料平面斜裂纹问题超奇异积分方程方法[J]. 机械强度, 2004, 26(3): 326-331.
- [4] CHAN Y S, Fannjiang A C, Paulino C H. Integral equations with hypersingular kernels-theory and applications to fracture mechanics[J]. International Journal of Engineering Science, 2003, 41: 683-720.

Stress Intensity Factor on Oblique Crack in Elastic Half-plane

KE Xian-hui, WU Yan-cheng, WANG Wei, ZHANG Xin, DU Yun-hai

(Department of Engineering Mechanics, Zhengzhou University, Zhengzhou 450001, China)

Abstract: Based on hyper-singular integral equations of the inclined crack in the half-plane, through appropriate variable replacements and equation collocations, establish the linear equations. This numerical calculation method is used for solving the arbitrarily inclined crack problem in a half-plane. According to the Fortran program results, the boundary of a half-plane have a great influence on the crack stress intensity factor.

Key words: half-plane; the inclined crack; hyper-singular integral equations; stress intensity factor

