正算，反算問題

- 　　學者阿達馬(Hadamard)對於定義良態問題有以下之看法，良態問題必滿足下列三個條件：

　　1.解的存在性。

　　2.解的唯一性。

　　3.解的連續性。

　　若不滿足上列之條件則會有病態問題之產生。

反算問題之種類

- 缺少控制方程之反算問題。(電路系統之辨識問題)
- 缺少內力源資訊之反算問題。(地盤反算之問題，地震波之傳遞情形。)
- 缺少材料特性之反算問題。(開挖工程之土壤性質推求)
- 缺少領域之反算問題。(設計最佳機翼形狀)

反算問題之種類

- 缺少邊界條件之反算問題。

1. 隧道開挖時，開挖面的位移及曳引力均可量測，然而前進端的資訊則一無所知
2. 如鍋爐之熱傳情形，溫度分布之情況，在可量測端，溫度與溫度梯度可掌握，另一端則全不知。
3. 人體血液之流動情形的量測。
4. 鋼筋混凝土之拉拔試驗，應力應變之情形。

給過定邊界條件之反算問題

- 正算問題：

  在已知的邊界上任何一部分之邊界條件 (含勢位與勢位導微)，兩者之一必有一個為已知條件。

- 反算問題：

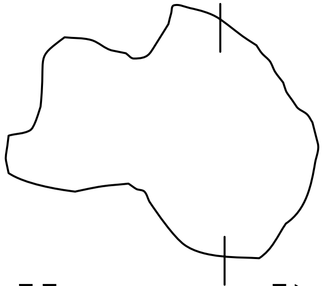
  給過定邊界條件之反算問題。這種問題是在已知的邊界上分有兩種邊界形式，第一種邊界是完全沒有任何之邊界條件，第二種邊界是給過定之邊界條件(含勢位與勢位導微) 。

MSVLAB
林盛益 2002/05/30

圖示

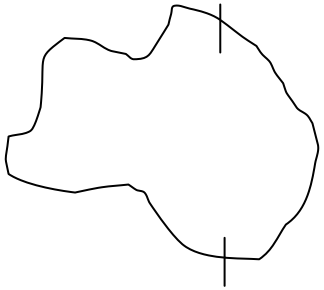
- 正算問題(well-posed)

$$u = \bar{u} \qquad\qquad u = ?$$
$$t = ? \qquad\qquad t = \bar{t}$$



- 反算問題(ill-posed)

$$u = \bar{u} \qquad\qquad u = ?$$
$$t = \bar{t} \qquad\qquad t = ?$$



矩陣操作(well-posed)

$$[U]\tilde{t} = [T]\tilde{u}$$

$$\begin{bmatrix} A_U & B_U \\ C_U & D_U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ \bar{t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_T & B_T \\ C_T & D_T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u} \\ u \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} B_T & -A_U \\ D_T & -C_U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_U & -A_T \\ D_U & -C_T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{t} \\ \bar{u} \end{bmatrix}$$

矩陣操作(ill-posed)

$$[U]\tilde{t} = [T]\tilde{u}$$

$$\begin{bmatrix} A_U & B_U \\ C_U & D_U \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{t} \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_T & B_T \\ C_T & D_T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{u} \\ u \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} B_U & -B_T \\ D_U & -D_T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_T & -A_U \\ C_T & -C_U \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{t} \end{bmatrix}$$

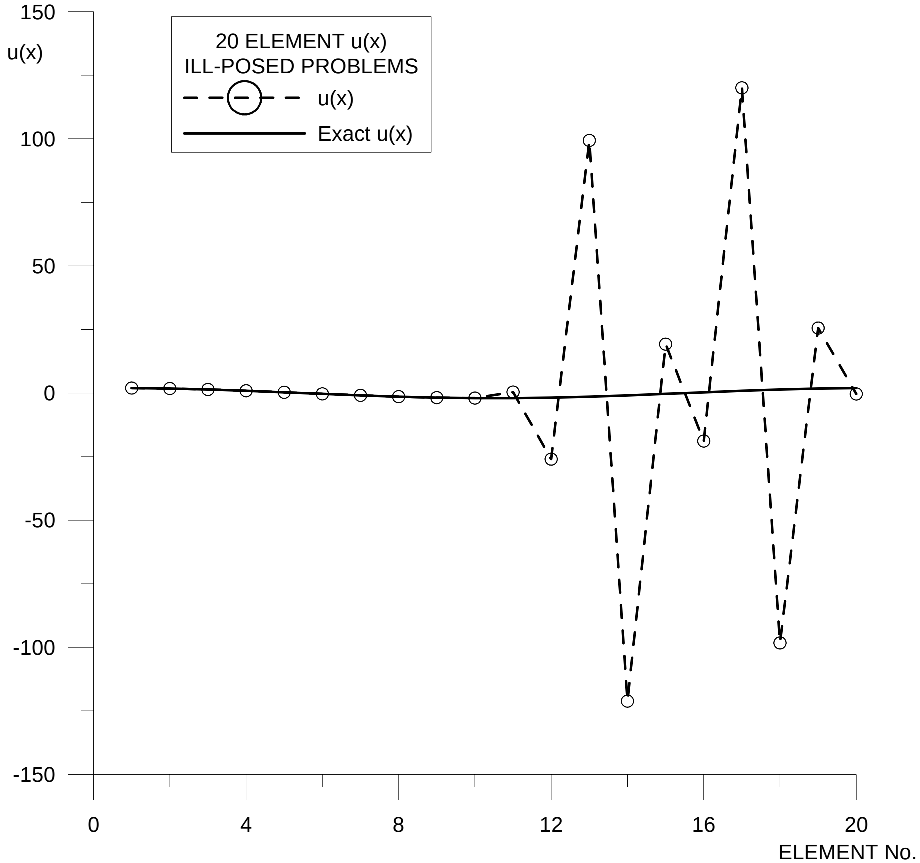
線性代數

- 化簡為

$$[A]\{x\} = \{b\}$$

- 反算問題會造成矩陣病態行為，正算則無此情形

數值不穩定



150
u(x)
100
50
0
-50
-100
-150
0
4
8
12
16
20
ELEMENT No.
20 ELEMENT u(x)
ILL-POSED PROBLEMS
u(x)
Exact u(x)

正規化技巧

$$A\tilde{x} = \tilde{b}$$

- 以一近似的良態矩陣 A' 來取代原系統的 A 矩陣，來求得近似之合理解

奇異值分解法

- 奇異值分解法
  (singular value decomposition)

$$[A]_{m\times n} = [\Phi]_{m\times m}[\Sigma]_{m\times n}[\Psi]^{T}{}_{n\times n}$$

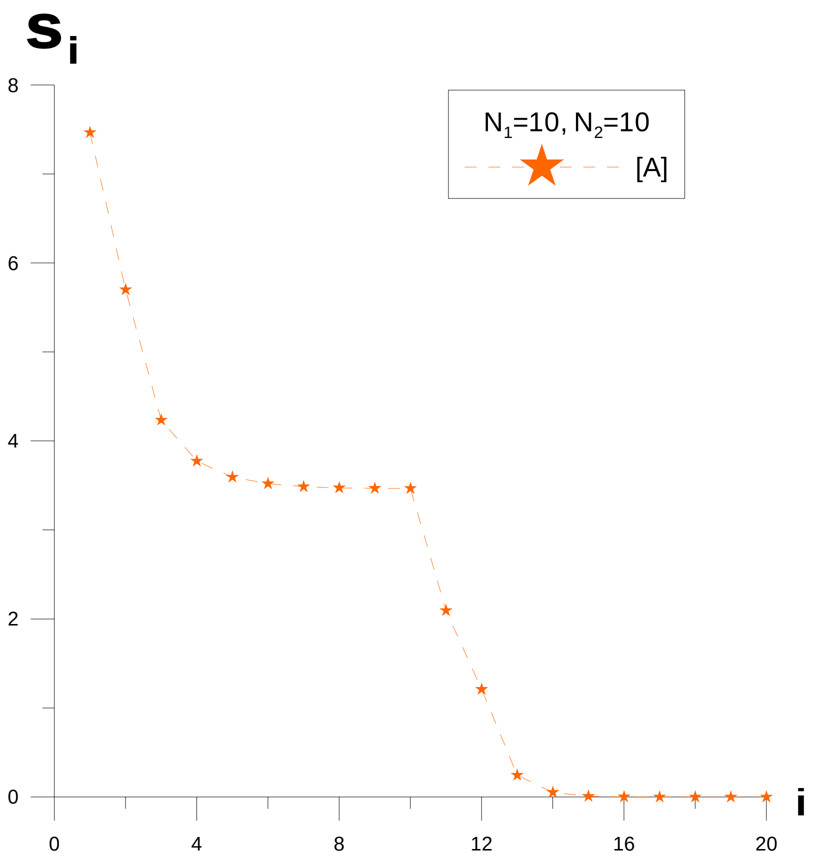
奇異值分解法

- 對角矩陣

$$[\Sigma]=\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{m\times n}$$

- 酉矩陣 $[\Phi]_{m\times m}$ ， $[\Psi]_{n\times n}$

病態矩陣



奇異值分解法

- 原系統

$$A = \Phi\Sigma\Psi^T = \sum_{i=1}^{N} \phi_i \sigma_i \psi_i^T$$

$$\tilde{x} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\phi_i^T \tilde{b}}{\sigma_i} \psi_i$$

奇異值分解法

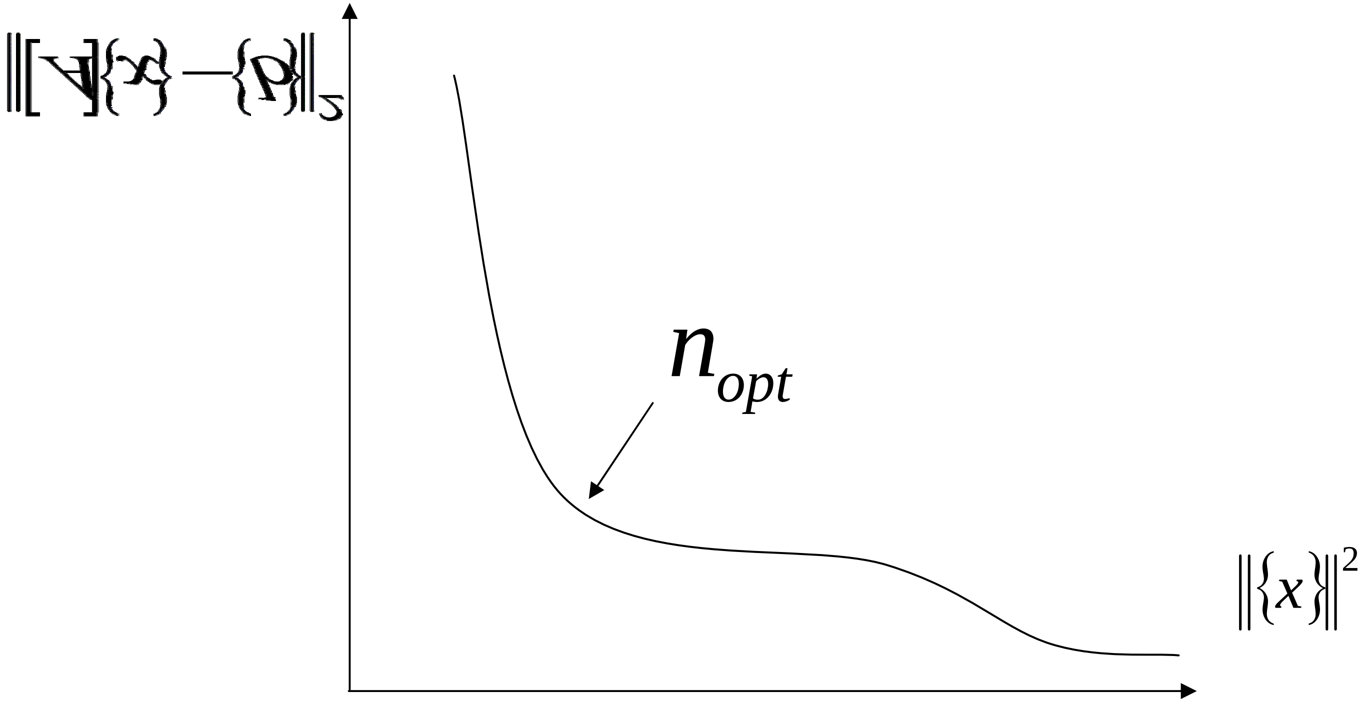
- 正規化系統

$$A' = \sum_{i=1}^{n} \phi_i \sigma_i \psi_i^{\ T}, n \le N$$

$$\tilde{x}^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\phi_i^{\ T} \tilde{b}}{\sigma_i} \psi_i, n \le N$$

L曲線

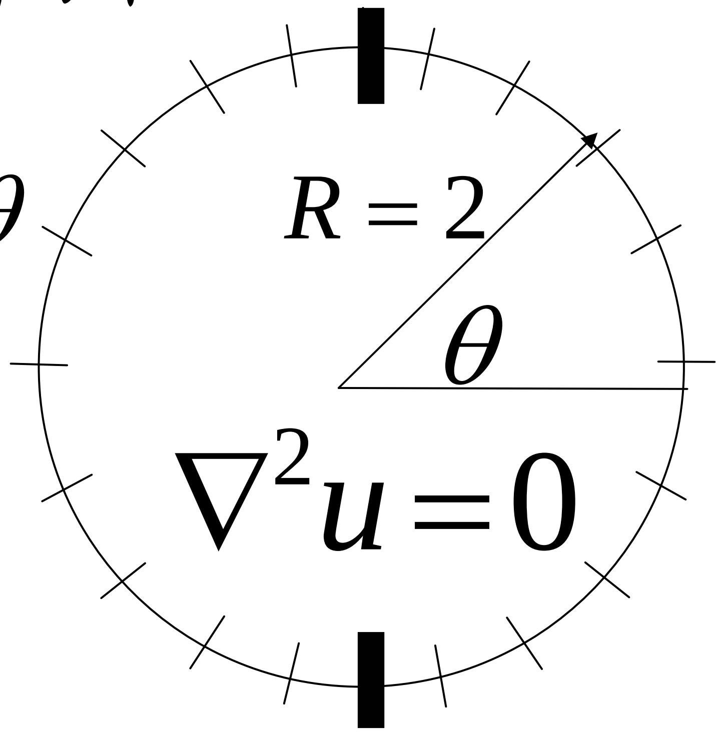
- 滿足 $\min\left\|\tilde{x}^{(n)}\right\|^2$ 及 $\left\|A\tilde{x}^{(n)}-\tilde{b}\right\|\leq\varepsilon$



數值結果

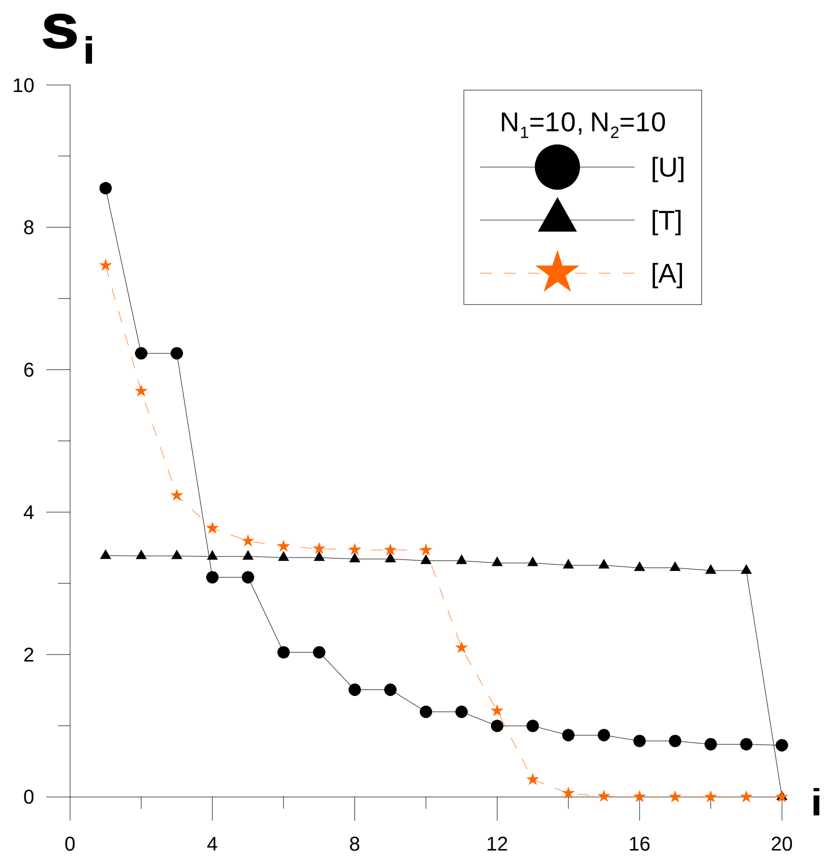
- 拉普拉斯方程

$$u = R\sin\theta$$
$$t = \sin\theta$$
$$N_1$$

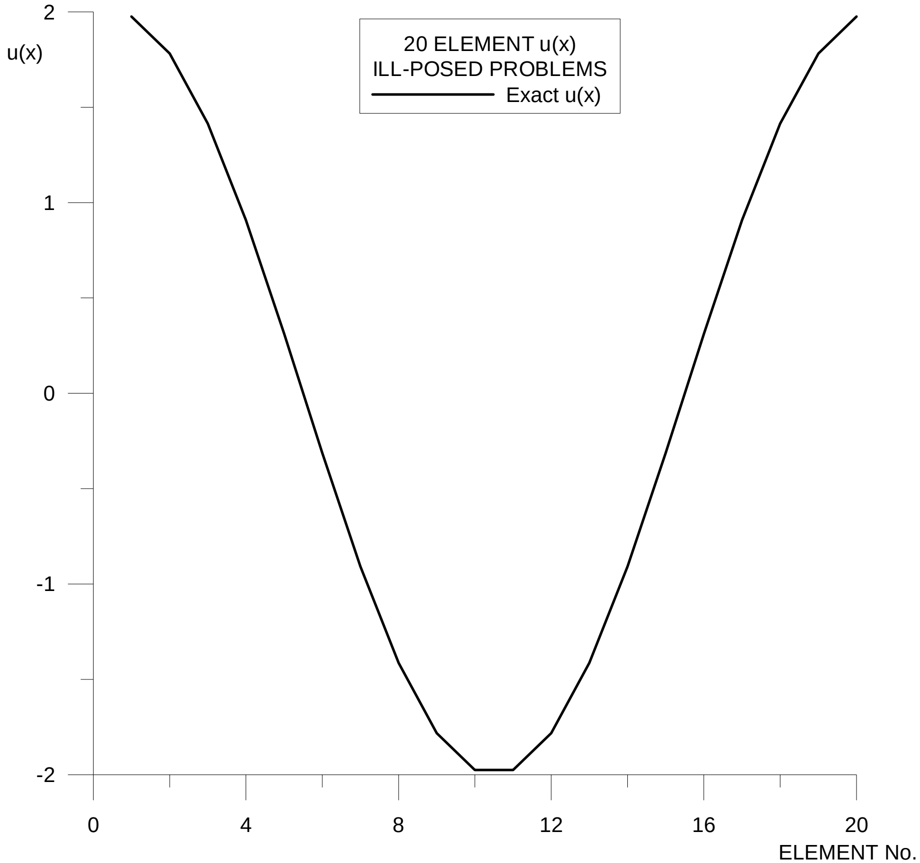


$$u = ?$$
$$t = ?$$
$$N_2$$

奇異值(N_1=10,N_2=10)

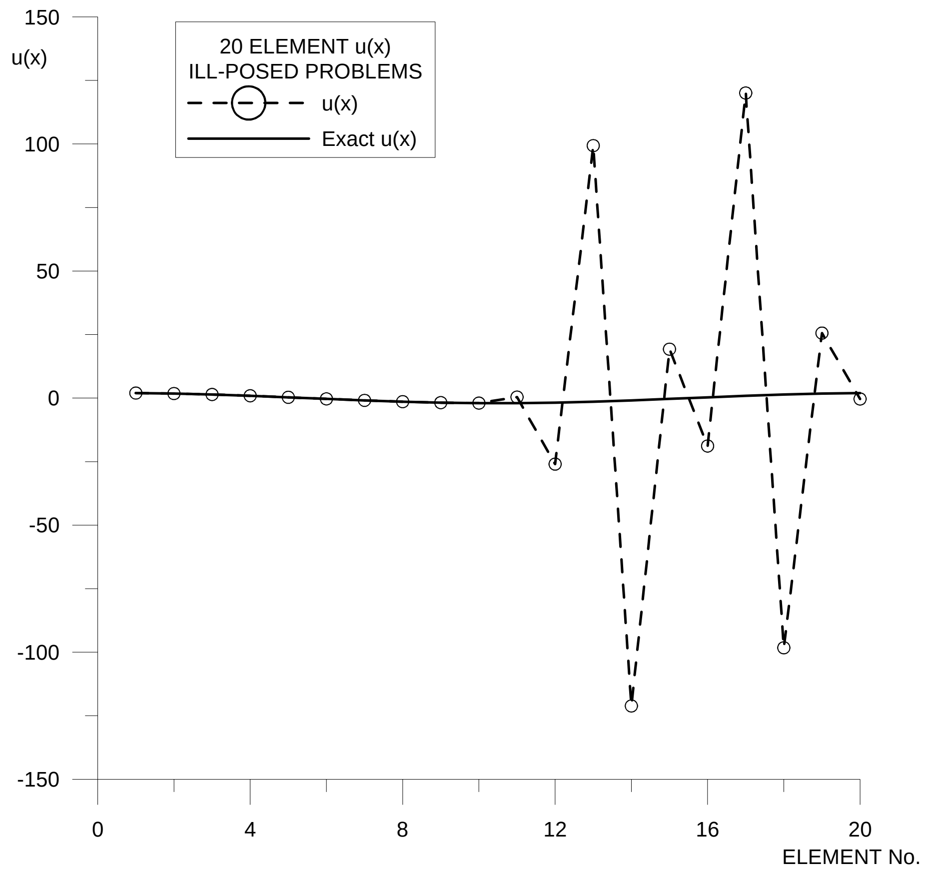


解析解



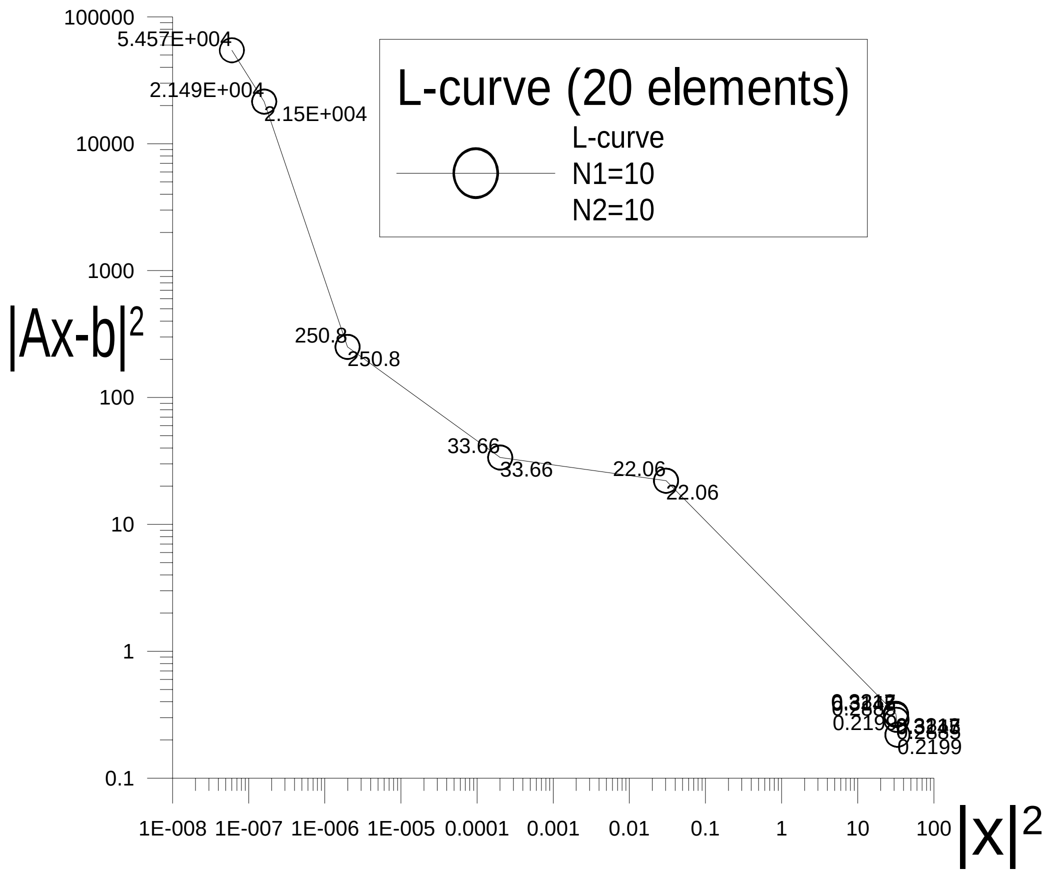
u(x)
2
1
0
-1
-2
0
4
8
12
16
20
ELEMENT No.
20 ELEMENT u(x)
ILL-POSED PROBLEMS
Exact u(x)

數值不穩定



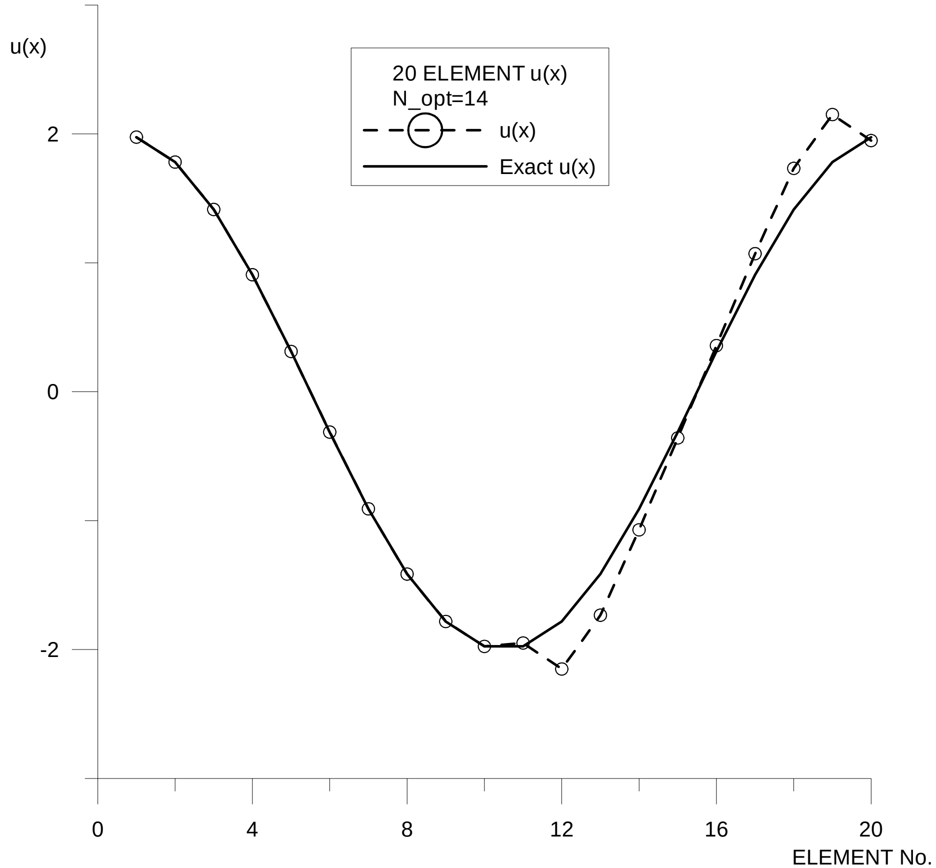
20 ELEMENT u(x)
ILL-POSED PROBLEMS
u(x)
Exact u(x)
u(x)
150
100
50
0
-50
-100
-150
0
4
8
12
16
20
ELEMENT No.

L曲線

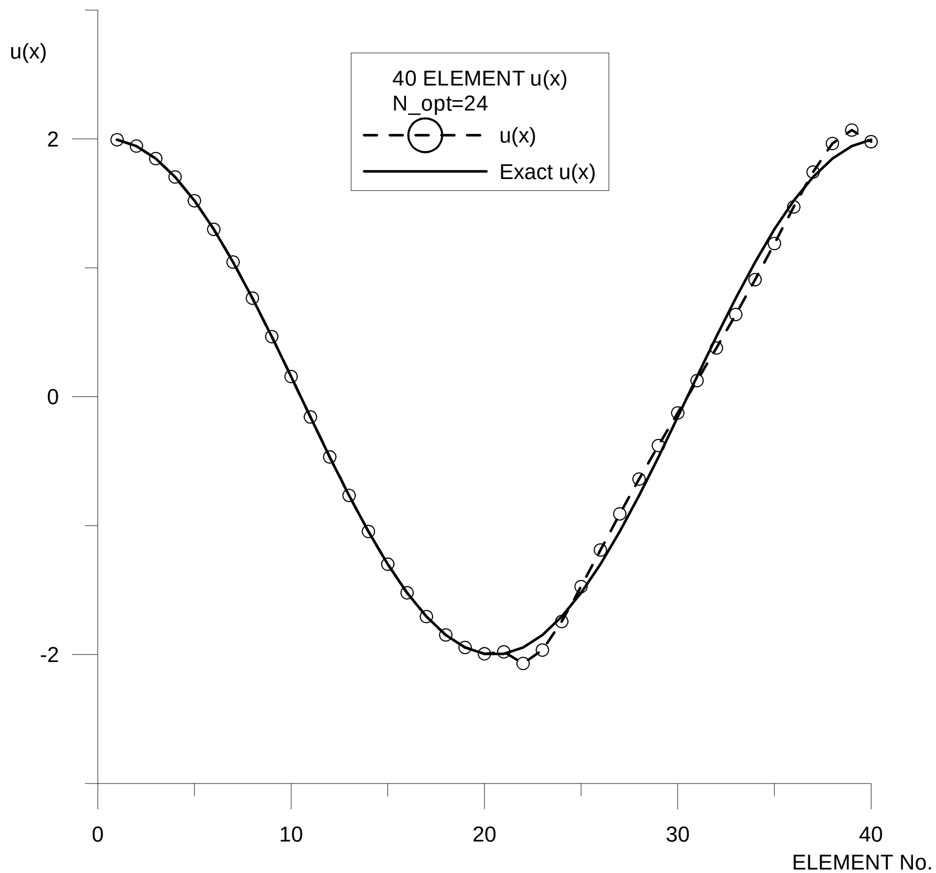


MSVLAB
林盛益 2002/05/30

N_1=10,N_2=10

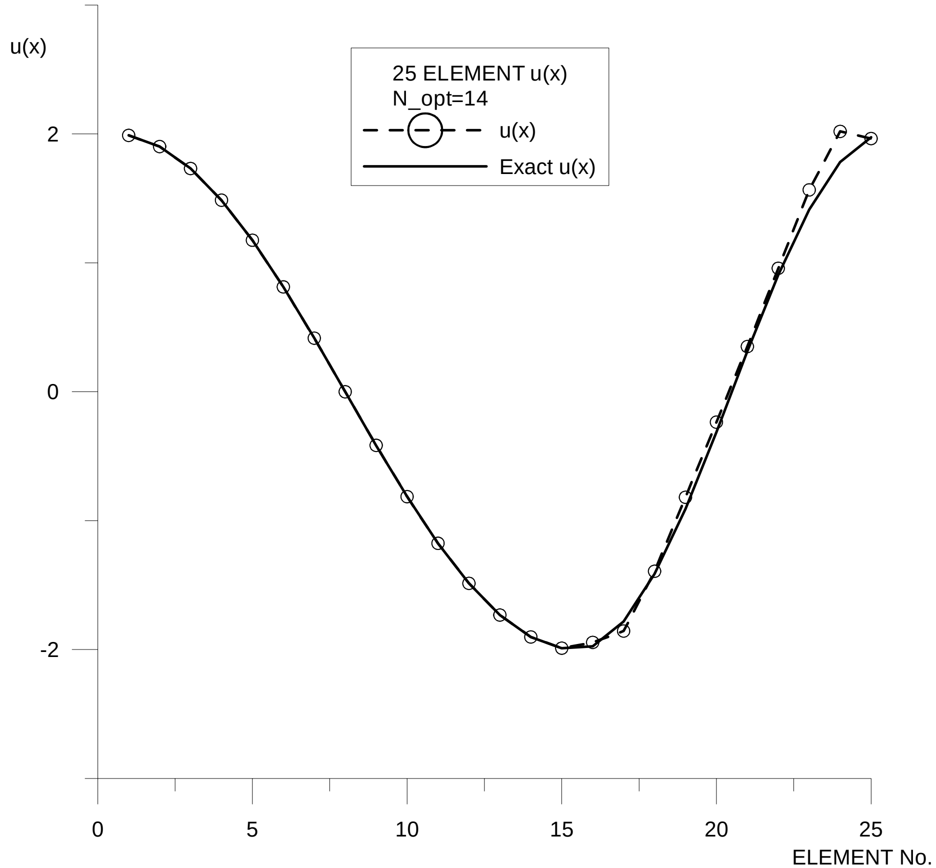


$N_1=20, N_2=20$



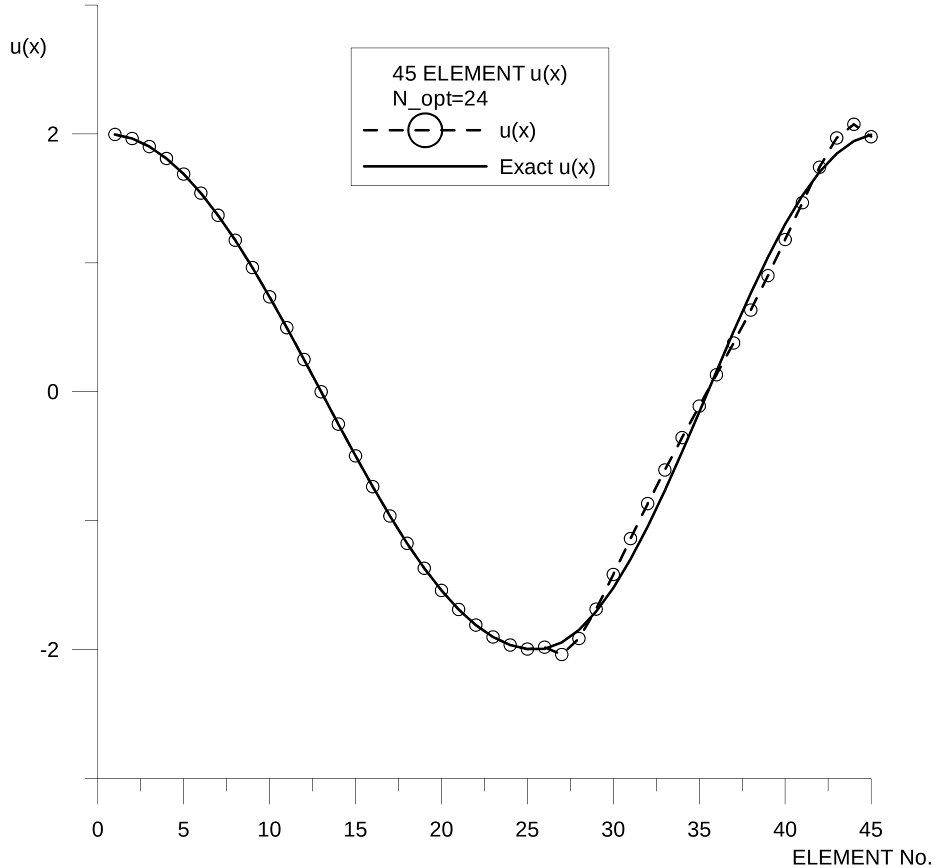
MSVLAB
林盛益 2002/05/30

$N_1=15, N_2=10$



u(x)
2
0
-2
0
5
10
15
20
25
ELEMENT No.
25 ELEMENT u(x)
N_opt=14
u(x)
Exact u(x)

$N_1=25,N_2=20$



u(x)
45 ELEMENT u(x)
N_opt=24
u(x)
Exact u(x)
2
0
-2
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
ELEMENT No.

結論

- 利用「邊界元素法」並採用「奇異值分解法」與「L-曲線」的方法及觀念來克服反算問題之病態行為，得到合理之結果。
- 以數值算例來驗證使用「奇異值分解法」與「L-曲線」的正規化方法之正確性及可行性。
- 元素個數（$N_1=N_2$）的增加對於求得合理解之效果更佳。
- 在已知邊界條件中元素（N_1）的增加對於求得合理解之逼近程度越良好。