第 11 章
二維特徵值問題—複數核函數法

11.1　聲波對偶積分方程式的推導

線性化聲波方程式的控制方程式為

$$\nabla^2 u(\mathbf{x},t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(\mathbf{x},t)}{\partial t^2} + Q(\mathbf{x},t), \mathbf{x} \in D \tag{1}$$

其中，u 為聲壓， c 為聲速，$Q(\mathbf{x},t)$ 為聲源項， D 為問題的定義域。若無聲源項，在頻率域的控制方程為

$$\nabla^2 \bar{u}(\mathbf{x},\omega) + k^2 \bar{u}(\mathbf{x},\omega) = 0 \tag{2}$$

其中， $\bar{u}(\mathbf{x},\omega)$ 為 $u(\mathbf{x},t)$ 的 Fourier 轉換， k 為波數，其為角頻率除以聲速 $(k=\omega/c)$。基本解$U(\mathbf{x},\mathbf{s})$ 滿足下式，

$$\nabla^2 U(\mathbf{x},\mathbf{s}) + k^2 U(\mathbf{x},\mathbf{s}) = 2\pi\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{s}) \tag{3}$$

由式 (3-1) 與上式引入格林第二定理，可得域內點對偶積分式的第一式如下：

$$2\pi\, u(\mathbf{x}) = \int_B \{T(\mathbf{s},\mathbf{x})u(\mathbf{s}) - U(\mathbf{s},\mathbf{x})t(\mathbf{s})\}\; dB(\mathbf{s}),\;\; \mathbf{x} \in D \tag{4}$$

將上式之積分方程做法向導微，得到

$$2\pi\, t(\mathbf{x}) = \int_B \{M(\mathbf{s},\mathbf{x})u(\mathbf{s}) - L(\mathbf{s},\mathbf{x})t(\mathbf{s})\}\; dB(\mathbf{s}),\;\; \mathbf{x} \in D \tag{5}$$

其中， $t(\mathbf{s}) = \frac{\partial u(\mathbf{s})}{\partial n_s}$ 為音壓勢位法向導微 (即為速度勢位) ， n_s 為源點的法向量。當 $\mathbf{x}$ 推到平滑邊界，可得到邊界點的對偶邊界積分方程式，如下

$$\pi\, u(\mathbf{x}) = C.P.V. \int_B T(\mathbf{s},\mathbf{x})u(\mathbf{s})dB(\mathbf{s}) - \int_B U(\mathbf{s},\mathbf{x})t(\mathbf{s})\; dB(\mathbf{s}),\;\; \mathbf{x} \in B \tag{6}$$

同理，將法向微分運算子作用到上式後，可得

$$\pi\, t(\mathbf{x}) = H.P.V. \int_B M(\mathbf{s},\mathbf{x}) u(\mathbf{s}) dB(\mathbf{s}) - C.P.V. \int_B L(\mathbf{s},\mathbf{x}) t(\mathbf{s})\ dB(\mathbf{s}), \mathbf{x} \in B \tag{7}$$

其中，$C.P.V.$ 表示柯西主值，$H.P.V.$ 表示阿達馬主值，而$U(\mathbf{x},\mathbf{s}), T(\mathbf{x},\mathbf{s}), L(\mathbf{x},\mathbf{s}), M(\mathbf{x},\mathbf{s})$ 分別為對偶積分模式的四個核函數。對偶積分式的四個核函數在二維問題中分別表為

$$U(\mathbf{s},\mathbf{x}) = \frac{-i\pi H_0^1(kr)}{2} \tag{8}$$

$$T(\mathbf{s},\mathbf{x}) = \frac{-ik\pi}{2} H_1^1(kr) \frac{y_i n_i}{r} \tag{9}$$

$$L(\mathbf{s},\mathbf{x}) = \frac{ik\pi}{2} H_1^1(kr) \frac{y_i \bar{n}_i}{r} \tag{10}$$

$$M(\mathbf{s},\mathbf{x}) = \frac{-ik\pi}{2} \{k \frac{H_2^1(kr)}{r^2} y_i y_j n_i \bar{n}_j + \frac{H_1^1(kr)}{r} n_i \bar{n}_i\} \tag{11}$$

其中，$H_n^1(kr)$ 表示第一類第 n 階 Hankel 函數，r 為場點與源點之間的距離，n_i 為源點的法向量之第 i 個分量，$y_i = s_i - x_i$, $\bar{n}_i$ 為場點的法向量之第 i 個分量。式 (3-8) 至式 (3-11) 核函數間滿足對偶積分架構的對偶關係如下：

$$U(\mathbf{s},\mathbf{x}) = U(\mathbf{x},\mathbf{s}) \tag{12}$$

$$T(\mathbf{s},\mathbf{x}) = L(\mathbf{x},\mathbf{s}) \tag{13}$$

$$M(\mathbf{s},\mathbf{x}) = M(\mathbf{x},\mathbf{s}) \tag{14}$$

11.2 邊界積分方程的離散化

本文採用常數元素，將對偶邊界積分方程離散化，得到對偶邊界元素法的兩個代數方程式如下：

$$[T(\lambda) - \pi I]\ \{u\} = [U(\lambda)]\ \{t\} \tag{15}$$

$$[M(\lambda)]\ \{u\} = [L(\lambda) + \pi I]\ \{t\} \tag{16}$$

其中，I 為單位矩陣，$\lambda = k^2$, 且 $[U(\lambda)], [T(\lambda)], [L(\lambda)]$ 與 $[M(\lambda)]$ 矩陣分別由 U, T, L 與 M 核函數之邊界積分方程中求得。本論文以客觀性觀念 (objectivity point of view) 將核函數的積分純量值轉到一參考座標系統，使計算更系統化，其座標轉換請參考圖 (3-1) 。四個核函數離散化過程分別說明如下：

(1) U 核函數：

(a). 正規積分：

當逼近點不在積分元素時，即 $x_r \neq 0$ 或 $y_r \neq 0$，可得

$$U_{\mathbf{ij}} = \frac{-i\pi}{2}\int_{-0.5l}^{0.5l} H_0^1(k\sqrt{(x_r-s)^2+y_r^2})ds \ (\mathbf{i} \neq \mathbf{j}) \tag{17}$$

(b). 弱奇異積分：

當逼近點在積分元素內時，即 $x_r = 0$ 與 $y_r = 0$ 的情況，其極限過程，令 $x_r = 0,\ y_r = \epsilon$，求得

$$\begin{aligned}
U_{\mathbf{ii}} &= \frac{-i\pi}{2}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-0.5l}^{0.5l} H_0^1(k\sqrt{s^2+\epsilon^2})ds \\
&= \frac{-i\pi}{2}\lim_{\epsilon\to 0}\{\int_{-0.5l}^{-\sqrt{\epsilon}} H_0^1(k|s|)ds + \int_{-\sqrt{\epsilon}}^{\sqrt{\epsilon}} i\frac{2}{\pi}\ln(\frac{k}{2}\sqrt{s^2+\epsilon^2})ds + \int_{\sqrt{\epsilon}}^{0.5l} H_0^1(ks)ds\} \\
&= \frac{-i\pi}{2}\lim_{\epsilon\to 0}\{\int_{-0.5l}^{-\sqrt{\epsilon}} H_0^1(k|s|)ds + 0 + \int_{\sqrt{\epsilon}}^{0.5l} H_0^1(ks)ds\} \\
&= \frac{-i\pi}{2}\{H_0^1(\frac{kl}{2})l + k\int_{-0.5l}^{0.5l}\{H_1^1(k|s|)\,|s|\,ds\} \ (\mathbf{i}\ no\ sum)
\end{aligned} \tag{18}$$

上式已成功地將弱奇異積分轉換成正規積分，使用高斯積分法處理即可。

(2) T 核函數：

(a). 正規積分：

當逼近點不在積分元素時，即 $x_r \neq 0$ 或 $y_r \neq 0$，可得

$$T_{\mathbf{ij}} = \frac{i\pi k}{2}\int_{-0.5l}^{0.5l} H_1^1(k\sqrt{(x_r-s)^2+y_r^2})\frac{y_r}{\sqrt{(x_r-s)^2+y_r^2}}ds \ (\mathbf{i} \neq \mathbf{j}) \tag{19}$$

(b). 強奇異積分：

當逼近點在積分元素內時，即 $x_r = 0$ 與 $y_r = 0$ 的情況，其極限過程，令 $x_r = 0,\ y_r = \epsilon$，求得

$$\begin{aligned}
T_{\mathbf{ii}} &= \frac{i\pi k}{2}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-0.5l}^{0.5l} H_1^1(k\sqrt{s^2+\epsilon^2})\frac{\epsilon}{\sqrt{s^2+\epsilon^2}}ds \\
&= \frac{i\pi k}{2}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\sqrt[4]{\epsilon}}^{\sqrt[4]{\epsilon}} \frac{i(-2)}{\pi k\sqrt{s^2+\epsilon^2}}\frac{\epsilon}{\sqrt{s^2+\epsilon^2}}ds \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\arctan\frac{s}{\epsilon}|_{-\sqrt[4]{\epsilon}}^{\sqrt[4]{\epsilon}} \\
&= \pi \ (\mathbf{i}\ no\ sum)
\end{aligned} \tag{20}$$

上式為將強奇異積分算出積分值為 π。

(3) L 核函數：

(a). 正規積分：

當逼近點不在積分元素時，即 $x_r \neq 0$ 或 $y_r \neq 0$，可得

$$L_{\mathbf{ij}} = \frac{i\pi k}{2}\int_{-0.5l}^{0.5l} H_1^1(k\sqrt{(x_r-s)^2+y_r^2})\frac{(x_r-s)\sin(\phi-\theta)-y_r\cos(\phi-\theta)}{\sqrt{(x_r-s)^2+y_r^2}}ds\ (\mathbf{i}\neq\mathbf{j}) \tag{21}$$

(b). 強奇異積分：

當逼近點在積分元素內時，即 $x_r = 0$ 與 $y_r = 0$ 的情況，其極限過程，令 $x_r = 0,\ y_r = \epsilon$，求得

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{ii}} &= \frac{i\pi k}{2}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-0.5l}^{0.5l} H_1^1(k\sqrt{s^2+\epsilon^2})\frac{-\epsilon}{\sqrt{s^2+\epsilon^2}}ds \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{-i\pi k}{2}\int_{-\sqrt[4]{\epsilon}}^{\sqrt[4]{\epsilon}}\frac{i(-2)}{\pi k\sqrt{s^2+\epsilon^2}}\frac{\epsilon}{\sqrt{s^2+\epsilon^2}}ds \\ &= -\pi\ (\mathbf{i}\ no\ sum) \end{aligned} \tag{22}$$

上式為將強奇異積分算出積分值 $-\pi$。

(4) M 核函數：

(a). 正規積分：

當逼近點不在積分元素時，即 $x_r \neq 0$ 或 $y_r \neq 0$，可得

$$\begin{aligned} M_{\mathbf{ij}} = \frac{-i\pi k}{2}\int_{-0.5l}^{0.5l} -k\frac{H_2^1(k\sqrt{(x_r-s)^2+y_r^2})}{(x_r-s)^2+y_r^2}(-y_r)\{(x_r-s)\sin(\phi-\theta) \\ -y_r\cos(\phi-\theta)\} + \frac{H_1^1(k\sqrt{(x_r-s)^2+y_r^2})}{\sqrt{(x_r-s)^2+y_r^2}}\cos(\phi-\theta)ds\ (\mathbf{i}\neq\mathbf{j}) \end{aligned} \tag{23}$$

(b). 超強奇異積分：

當逼近點在積分元素內時，即 $x_r = 0$ 與 $y_r = 0$ 的情況，其極限過程，令 $x_r = 0,\ y_r = \epsilon$，求得

$$\begin{aligned} M_{\mathbf{ii}} &= \frac{-i\pi k}{2}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-0.5l}^{0.5l} -k\frac{H_2^1(k\sqrt{s^2+\epsilon^2})}{s^2+\epsilon^2}(-\epsilon)(-\epsilon) + \frac{H_1^1(k\sqrt{-s^2+\epsilon^2})}{\sqrt{s^2+\epsilon^2}}ds \\ &= \frac{-i\pi k}{2}\{-2H_1^1(\frac{kl}{2}) + k[H_0^1(\frac{kl}{2}) + k\int_{-0.5l}^{0.5l} H_1^1(k|s|)\ |s|\ ds\ ]\}\ (\mathbf{i}\ no\ sum) \end{aligned} \tag{24}$$

上式即為將超強奇異積分轉換成正規積分，再使用高斯積分法處理即可。

11.3 各種邊界條件的特徵方程

在代入齊次邊界條件後，可得以下三種不同邊界條件的超越函數的特徵值問題，如下

(a). Dirichlet 邊界條件：具有開窗的邊界或邊界材料為完全軟的物質如吸音板，即作用在

邊界上的聲壓為零 ($u = 0$)，將邊界條件代入對偶邊界積分方程後，可得以下二式，

$$[U(k)]\ \{t\} = 0 \tag{25}$$

$$\{[L(k)] - \pi[I]\}\ \{t\} = 0 \tag{26}$$

(b). Neumann 邊界條件：邊界材料為完全硬的物質如混凝土板、鋼板與壓克立板等，即作用在邊界上之音壓的法向導微為零 ($t = \frac{\partial u}{\partial n} = 0$)，將邊界條件代入對偶邊界積分方程後，可得以下二式，

$$\{[T(k)] - \pi[I]\}\ \{u\} = 0 \tag{27}$$

$$[M(k)]\ \{u\} = 0 \tag{28}$$

(c). Robin 邊界條件：邊界材料為未完全硬的物質，即作用在邊界上之壓力一部分為邊界表面所吸收，一部分被反射 ($u + t = 0$)，將邊界條件代入對偶邊界積分方程後，可得以下二式，

$$\{[T(k)] - \pi[I] + [U(k)]\}\ \{u\} = 0 \tag{29}$$

$$\{[M(k)] + [L(k)] - \pi[I]\}\ \{u\} = 0 \tag{30}$$

最後，再以行列式直接搜尋法來求得其特徵頻率，國內洪與劉[?]、洪與李[?]等均使用過此法。這個方法是在每一個頻率求出其相對應的影響係數矩陣的行列式值，予以作圖。然後，由此圖找出行列式值為零的頻率，即為特徵頻率；但是因邊界積分離散化的過程中所導致的誤差，故其行列式值在數值運算下並不為零，因此一般採用圖中的局部極小值，即認定為特徵頻率。

11.4　對偶邊界積分方程第二式所扮演的角色

對於不含退化邊界問題，對偶邊界積分式中任一式均可求得自然聲頻與聲模，但當定義域含不完全隔間時，造成奇異的影響係數矩陣，會使解產生不唯一的情況，即病態的行為，因而無法決定自然聲頻。此時需合成第一式與第二式，這就是陳與洪[?]在此研究領域所提出的對偶積分方程架構的精神所在。以圖 (3-2) 的例子而言，第五個與第六個元素為其退化邊界，使得對偶積分式第一式及第二式的第五與第六個方程式相依；一組完全一樣，一組相差負號，因此造成兩組方程組相依，此時只要將第一式之第五個方程式與第二式之第五個方程式交換，則兩個方程組都會變成獨立，因而聲場之自然聲頻與聲模即可決定。

11.5 簡化計算方法

在第二章中已充分討論過多倒易法與本法之關係，所以若只取核函數的實部或虛部即可用來解自然聲頻與聲模特徵值問題，這可用來避免在複數域的運算，然而將伴隨增根的出現，有關增根出現的機制已在第二章探討過。而增根的去除將可使用以下三個方法來辨別：

1. 將對偶積分之第一式及第二式所求到的根相互比較，若兩式的值相差很大時，即為增根，若很相近時，則可能為真正的特徵根。
2. 將對偶積分之第一式及第二式所求到的根，畫出其對應的模態，再比較兩式所求出的模態，最後若兩模態是相同時，即是此空間的自然聲模，其根則為自然聲頻。
3. 將對偶積分的第一式所求到的根代回第二式或第一式所求到的根代回第二式，以 Neumman 邊界條件為例：

$$\{[T_R(k)] - \pi[I]\}\ \{u_T\} = 0 \tag{31}$$

或

$$[M_R(k)]\ \{u_M\} = 0 \tag{32}$$

所求得其對應的邊界聲模資料 (u_T 或 u_M) , 再代入對偶積分的另一式，可求得一誤差指標，ϵ_T 與 ϵ_M, 分述如下：

$$[M_R(k)]\ \{u_T\} = \epsilon_T \tag{33}$$

或

$$[T_R(k) - \pi I]\ \{u_M\} = \epsilon_M \tag{34}$$

上式中 ϵ_T 與 ϵ_M 分別表示由 UT 式與 LM 式算出的誤差量。最後，可畫出 k 對誤差量 ϵ_T 與 ϵ_M 的圖，理論上誤差量為零時，其所對應的根為其自然聲頻，但因邊界積分的離散化導致的誤差，所以我們需取一門檻值來決定是否為其自然聲頻，再配合前述兩種檢驗方法，即可成功過濾增根與增模。

11.6 實例測試

為了驗證本法的可行性及程式之正確無誤，本節將以三個算例來進行數值分析。使用本章所提出的兩個分析方法進行，其一為使用本法之複數影響係數矩陣來做分析，求二維

空間的自然聲頻與自然聲模，第二個方法是取本法之複數影響係數矩陣的實部來進行分析 (等效於傳統的 MRM)，亦即 3.5 節所提出的簡化方法。

算例一：

圖 (3-3(a)) 為算例一所要分析之聲場空間，尺寸大小分別為 $a = 1\,m$, $b = 1\,m$, 其中 a 為長度， b 為寬度。若考慮 Neumann 邊界條件，可求得解析聲頻、 MRM、與方法一及方法二所求得的根，如表 (3-1) 所示，從表 (3-1) 可知只有 MRM 與方法二會有增根；圖 (3-4(a)) 與 (3-4(b)) 為解析聲模的等音壓線圖與三維示意圖，圖 (3-5(a)) 與 (3-5(b)) 為方法一用對偶積分方程之第一式與第二式所得到的模態之等音壓線圖與三維示意圖。由解析解所得的圖與方法一所得的圖比較可知方法一確實可用。圖 (3-6(a)) 至 (3-6(d)) 為方法二用對偶積分方程之第一式與第二式所得到的模態之等音壓線圖與三維示意圖，圖 (3-7(a)) 與 (3-7(b)) 為 k 對誤差量 (ϵ_T, ϵ_M) 的圖。由 3.5 節所提出的三個去除增根的方法，可知那幾個模態是增根所對應的模態，而那幾個模態是真正的聲模，再與解析解的圖比較後，可知方法二確實可行。若以 Dirichlet 邊界條件，可求得解析聲頻、方法一及方法二所求得的根，如表 (3-2) 所示，從表 (3-2) 可知只有方法二會有增根；圖 (3-8(a)) 與 (3-8(b)) 為解析聲模的等音壓線圖與三維示意圖，圖 (3-9(a1))、 (3-9(a2))、 (3-9(b1)) 與 (3-9(b2)) 為方法一用對偶積分方程之第一式與第二式所得到的模態之等音壓線圖與三維示意圖，與解析解的圖比較後可知方法一確實可用。圖 (3-10(a)) 至 (3-10(d)) 為方法二用對偶積分方程之第一式與第二式所得到的模態之等音壓線圖與三維示意圖，圖 (3-11(a)) 與 (3-11(b)) 為 k 對誤差量 (ϵ_T, ϵ_M) 的圖。由三個去除增根的方法，可知那幾個模態是增根所對應的模態，而那幾個模態真正的聲模，再與解析解的圖比較後，可知方法二確實可行。

算例二：

圖 (3-3(b)) 為聲場空間，其中尺寸大小分別為 $a = 0.236\,m$, $b = 0.112\,m$, $c = 0\,m$, 其中 c 為隔間的長度。考慮 Neumann 邊界條件，可求得解析聲頻、 MRM、 ABAQUS 程式、實驗結果、方法一及方法二所求得的根，如表 (3-3) 所示，從表 (3-3) 可知只有 MRM 與方法二會有增根；圖 (3-12(a)) 與 (3-12(b)) 為解析聲模的等音壓線圖與三維示意圖，圖 (3-13(a)) 與 (3-13(b)) 為方法一用對偶積分方程之第一式與第二式所得到的模態之等音壓線圖與三維示意圖。經與解析解的圖比較後，可知方法一所得的結果正確。圖 (3-14(a)) 至 (3-14(d)) 為方法二用對偶積分方程之第一式與第二式所得到的模態之等音壓線圖與三維示意圖，圖 (3-15(a)) 與 (3-15(b)) 為 k 對誤差量 (ϵ_T, ϵ_M) 的圖。由三個去除增根的方法，可分辨出增根模態與真正的模態，再與解析解的圖比較後，可知方法二所得的結果正確。

算例三：

考慮含不完全有限厚度隔間之內域聲場空間，其中尺寸大小分別為 $a = 0.236\,m,\ b = 0.112\,m,\ c = 0.056\,m,\ e = 0.01\,m,$ 其中 e 為隔間的厚度。考慮 Neumann 邊界條件，可得 MRM、 ABAQUS 程式、實驗結果、方法一及方法二所求得的根，如表 (3-4) 所示，從表 (3-4) 可知只有 MRM 與方法二會有增根；圖 (3-16(a)) 與 (3-16(b)) 為方法一用對偶積分方程之第一式與第二式所得到的模態之等音壓線圖與三維示意圖。圖 (3-17(a)) 至 (3-17(d)) 為方法二用對偶積分方程之第一式與第二式所得到的模態之等音壓線圖與三維示意圖，圖 (3-18(a)) 與圖 (3-18(b)) 為 k 對誤差量 $(\epsilon_T,\ \epsilon_M)$ 的圖。由三個去除增根方法可分辨出增根的模態與真正的模態。

算例四 (退化邊界)：

考慮含不完全極薄隔間之內域聲場空間，其中尺寸大小分別為 $a = 0.236\,m,\ b = 0.112\,m,\ c = 0.056\,m,\ e = 0.\,m$。考慮 Neumann 邊界條件，可求得 MRM、 ABAQUS 程式、實驗結果、方法一及方法二的根，如表 (3-5) 所示，從表 (3- 5) 可知只有 MRM 與方法二會有增根；圖 (3-19(a))) 與 (3-19(d)) 為方法一用對偶積分方程之第一式 (合成第二式) 與第二式 (合成第一式) 所得到的模態之等音壓線圖與三維示意圖。圖 (3-20(a)) 至 (3-20(d)) 圖 (3-21(a)) 與 (3-21(b)) 為 k 對誤差量 $(\epsilon_T,\ \epsilon_M)$ 的圖。由三個去除增根的方法可分辨出增根的模態與真正的模態。

11.7 核函數的勢能行為

為了瞭解各種核函數在不同聲頻下的勢能行為，特將繪成等高線圖與三維示意圖。圖 (3-22(a), (c)) 至 (3-24(a), (c)) 為 $k = 0.01,\ k = 1$ 與 $k = 2$ 的各種核函數之實部與虛部的三維示意圖，圖 (3-22(b), (d)) 至 (3-24(b), (d)) 為 $k = 0.01,\ k = 1$ 與 $k = 2$ 的各種核函數之實部與虛部的等高線圖。由圖可驗證各種核函數的連續特性，並可知當 k 很小時，其核函數實部的圖與由拉普拉斯方程的核函數所得到的圖非常類似。

11.8 重根

聲場的長寬比為有理數時，則有些特徵頻率下的聲模將會有很多種組合。在求此聲頻下的模態時，若將已知的邊界資料放在不同邊界位置上，將得到不一樣的模態。

1. $a = 1,\ b = 1,$ Neumann 邊界條件：

圖 (3-25) 至 (3-27) 為第一聲頻下的解析聲模、對偶積分方程的第一式與第二式所求到的聲模。圖 (3-28) 至 (3-30) 為第三聲頻下的解析聲模、對偶積分方程的第一式與第二式所求到的聲模。

2. $a = 1, b = 1$, Dirichlet 邊界條件：

圖 (3-31) 至 (3-33) 為第二聲頻下的解析聲模、對偶積分方程的第一式與第二式所求到的聲模。圖 (3-34) 至 (3-36) 為第四聲頻下的解析聲模、對偶積分方程的第一式與第二式所求到的聲模。

11.9　影響係數矩陣的奇異性

圖 (3-37(a)) 與 (3-37(b)) 為對偶積分方程第一式與第對偶積分方程第二式的影響係數矩陣在不同隔間厚度下的條件數 (condition number)，圖 (3-37(c)) 為對偶積分方程的第一式與第對偶積分方程的第二式在切不同元素個數下的條件數 (condition number)。

海大河工研究所陳正宗　對偶邊界元素法

【存檔：c:/bemprimer/complex.te】【建檔:Aug./01/’2006】