

第 零 章

簡介

0.1 引言

自從瓦特發明蒸汽機以來，人們從可提起 10 公斤的重物，進而變成可推動重達數噸的火車。而電腦的出現，則使人們原來需要 100 年才能完成的計算，變成只需花 CRAY 超級電腦一分鐘的時間即可解決。這種勞力與腦力的延伸，提供勞力勞心者最大的便捷，編織了這多彩多姿的科幻世界，因此稱為兩次的工業革命，而邊界元素法就是後者的產物。毫無疑問地，邊界元素法是一種數值方法，也和有限元素法一樣，有其一套的理論基礎與數值邏輯，然其對某些問題的處理則優於有限元素法。

邊界元素(Boundary element)一詞最早為英國 Southampton 大學 Brebbia 博士於70 年代所提出，但又有一說是Banerjee 教授首先定名，而事實上 Hess 、Jaswon 及 Kupradze 較早也使用過類似的方法，只是未如此稱呼罷了！而有限元素法則在 60 年代為 Clough 教授所定名，比邊界元素法約早 10 年，這也是目前有限元素法應用較為廣泛的原因之一。邊界元素法的理論基礎與勢能理論(Potential theory)相互輝映，且和奇異積分息息相關；而有限元素法的理論基礎則在於泛函變分學，此與邊界元素法截然不同。本書主要介紹邊界元素法的數學觀念，數值技巧與其工程應用。最後，並針對有限元素法與邊界元素法聯用的可行性作一探討。

0.2 發展背景

當科學家或工程師面對一個問題時，常設法建立一數學模式來描述該問題特性。為簡化問題的複雜性，通常會取一個無限小的元素，考慮其力平衡或宇宙定律後，即可建立出一控制方程式，下一步驟就是如何來求解該控制方程式。然限於問題複雜的幾何形狀與初

始或邊界條件，其解析解勢必很難求得。因此，訴諸於數值分析是不可避免的。而較常用的數值方法有三種——有限差分法、有限元素法和邊界元素法。有限差分法為較早被採用的數值方法，主要係利用差分原理將控制方程式離散成一組線性聯立方程式，再進行求解。然而針對不同的邊界條件，處理上有無法自如的困難，因此在某些應用上，漸被有限元素法所取代。而有限元素法為將所處理的問題空間，離散為有限個元素，透過力學最低能量原理(Minimum Potential Energy Theorem)，或泛函極值定理(Stationary Functional) 轉成一組線性聯立方程式，整個離散過程具系統化。因此，有限元素法得以在各個領域廣泛地被應用。以上兩種方法，當處理問題時，均不失其一般性，然對整個區域作離散時，常需龐大輸入資料與計算機容量，且大型矩陣運算費時。而無限域問題，尤難以模擬。於是針對這個問題，邊界元素法隨之興起。關於以上三種方法的比較請參考第八章 § 8.3 節的說明。本書主要是介紹邊界元素法，它目前雖無前兩者普遍，但是也有其迷人的地方，當讀者看完本書後，應可了解；由於邊界元素法牽涉較深的數學，較難為初學者與工程師所接受。針對此點，本書儘量以物理意義解釋，一旦了解其奧妙處，則可應用自如。然而這三種方法孰優孰劣則見仁見智，各有千秋。筆者在此不作“以矛攻盾，以盾防矛”之傻事，亦不作“老王賣瓜，自賣自誇”之舉。就數學論點而言，邊界元素法中的積分方程是較容易論證的，如解的存在與唯一性證明，且其建立式並非局部（或微元），而是整體性的。然由最近邊界元素法與有限元素法聯用的發展趨勢來看，應可知其為互補的。

1.3 相關文獻回顧

文獻上以積分方程型式來解各種問題的方法甚多，歸納計有如下幾種：

(1) 直接法(Direct Method), (2) 間接法(Indirect Method), (3) 半直接法(Semi-direct Method), (4) 小板法(Panel method;如USAERO 或 PANAIR Program)(氣動力學常用), (5) 位移不連續法(岩石力學常用), (6) 差排模式法(破壞力學、材料力學常用), (7) Trefftz method, (8) 邊界元素法(BEM), (9) 邊界積分方程法(BIEM), (10) 積分方程連續代入逼近法, (11) 影響函數法, (12) 表面奇異源配置法(Surface Singularity Method, 包括 Surface Velocity and Doublet Method), (13) 廣義間接法, (14) 複變數邊界元素法(CVBEM), (15) 體積力法, (16) 多倒易法(Multiple reciprocity method), (17) 雙倒易法(Dual reciprocity method), (18) 對偶邊界元素法(Dual boundary element method), (19) 多重中心展開法(Multi-centers Expansion Method), (20) 零場法(Null-field Method), (21) Kupradze 法, (22)

Oliveria 法。

以上各種方法將在本書中詳細討論。為了使讀者對整個 BEM 發展歷史有個概念，特以年表型式說明於表 0.1。由以上發展可知邊界元素法，其實是舊酒裝新瓶。舊酒指的是積分方程，新瓶指的是數值分析和電腦。套句 Rizzo 教授的話說，乃是“old mathematics in new dress”，意即為舊數學添新裝。因此本書將對舊酒與新瓶同時有所介紹。由這段歷史看來，積分方程的發展就如同國家經濟發展一樣，也有旺季與淡季。自 1900 年以來，由 Fredholm, Chebyshev 與 Bernstein 等人從事這方面的理論研究之後，其實用性由於計算工具的欠缺，也沉寂一時，直到 1950 年代後，由於高科技計算機問世後，使得數值處理變得可行，又激起人們對它的注意。一直至今，尚在蓬勃發展中，進而更發展出一套數值邏輯，即所謂的邊界元素法 (Boundary Element Method) 或邊界積分方程法 (Boundary Integral Equation Method)。

0.4 積分方程與數值分析

數值分析在積分方程之應用，依逼近方法之不同，有兩方面的發展。一是使用內插函數逼近，另一則為使用有限元素觀念逼近。前者發展出邊界積分方程法 (Boundary Integral Equation Method, BIEM)，而後者則發展為邊界元素法 (Boundary Element Method, BEM)。基本上，兩者有些差別。這常被一般人誤解為相同的。在這方面發展上，對於數值解收斂程度的研究，是最迫切需要的。從數學觀點而言，也是一很迷人的研究方向。但一般均被工程師們所忽略，針對這個問題，本書第二章中將簡述數值誤差控制的度量，此方面最近在自適性網格切割 (Adaptive mesh generation) 應用甚多。

0.5 未來發展

如前所述，邊界元素法已漸趨成熟，然而更進一步的發展仍為大勢所趨，目前台灣在這方面的研究也越來越多。台灣在 1986 年台大應力所曾邀請 Rizzo, Shippy 與 Mukerjee 教授作一介紹課程研討會。另在 1998 年國家高速電腦中心曾邀請程宏達教授與國內不同領域應用的學者舉行 BEM 研討會，反應亦相當熱烈。以下將探討未來發展之方向，此或許與作者研究方向與偏好有關，僅提供四個方向供讀者參考如下：

1. 軟體程式之普遍化

Table 1: 邊界元素法之發展

年代	創見
1828	Green's identity 恆等式導出
1850	Kelvin 再度導得 Green 恆等式，並廣泛應用
1872	Betti's 導得功能互換原理
1886	Kirchoff 導得 Helmholtz 積分方程式
1905	Fredholm 證明積分方程解的存在性
1917	Trefftz 使用連續代入法解積分方程的問題
1921	von Karman 和 Pohlhause 首先以積分方程解偏微分方程
1927	Günter 與 Muskhelishvili 分別建立純量與向量勢能理論
1928	Prager 以積分方程解勢流場
1929	Kellog 建立勢論 (potential theory) 基礎
1932	Lotz(女) 以 source 源解積分方程勢流場問題
1944	Somigliana 導得彈力恆等式 (Identity)
1950	計算機問世 (BEM 發展的催化劑)
1951	Vandevy 以 source 和 vortices 源解積分方程勢流場問題
1953	Kellog "Foundation of potential theory" (書印行)
1957	Mikhlin 與 Kupradze 彈力積分方程數學基礎建立
1958	Smith 和 Pierce 使用計算機解 BEM 問題
1963	Jaswon 與 Symn 提出 Torsion 積分方程解法
1964	Hess 和 Smith 以 BEM 解三維勢流場問題 (小板法)
1965	Massonnet 間接法疊加觀念應用
1967	Jaswon and Ponter 以積分方程解 Biharmonic 問題
1968	Oliveria 廣義間接法疊加觀念應用
1969	Rizzo 彈力積分方程 BEM 解法 (直接法)
1970	Brebbia 定名邊界元素法 (BEM)
1973	Woodward 以小板法解氣動力問題
1978	Clement 與 Rizzo 解二維橢圓偏微分方程
1981~ 1982	Hartmann 解決角點 (corner) 積分問題
1982	Hromadka 開始複變數邊界元素法研究
1983	黃燦輝提出非奇異積分自動尋求積分階數技巧，可掌握誤差範圍
1985	Rizzo and Shippy 在彈性波應用成功
1986	洪宏基與陳正宗導得超強奇異積分 Hadamard 主值， 並應用它解決了退化邊界 BEM 的困難，於破壞力學 crack 上有所應用
1987	洪宏基與陳正宗導得邊界積分的統一式，並將文獻各類方法視為對偶積分式的特例
1988	陳正宗與洪宏基將對偶積分式應用在熱傳上

1989	陳正宗與洪宏基將對偶積分式應用在 Darcy 流
1990	王政盛、朱信與陳正宗將 Mangler(Hadamard) 主值應用在氣動力小板法上
1992	Aliabadi 與 Portela 根據對偶積分理論寫成對偶邊界元素法程式 並應用到裂縫成長之問題
1993	葉超雄、洪宏基與陳正宗首先應用 Cesaro sum 之正規化法，算發散級數的和
1994	陳正宗與洪宏基推廣對偶積分方程到對偶級數模式
1994	陳正宗與洪宏基建構超奇異積分與發散級數的橋梁
1996	陳正宗等推廣內域對偶積分方程到外域對偶積分方程
1996	陳正宗、洪宏基、葉超雄與全湘偉將 Stokes' transformation 引入對偶級數模式
1997	陳正宗等推廣 Laplace 對偶積分方程到 Helmholtz 對偶積分方程
1998	陳正宗與翁煥昌發現多倒易法 (MRM) 的假根問題
1998	陳正宗與陳鈺文推導複變數對偶邊界元素法
1999	陳正宗、郭世榮與黃川夏解析導得圓形問題的假根
1999	陳正宗與丘宜平建構對稱 BEM
1999	陳正宗與丘宜平導得圓形問題對偶架構的 Calderon projector 特性
1999	陳正宗與丘宜平導得圓形問題對偶架構的譜結構與仿微分算子階數
2000	陳正宗、郭世榮與林建華導得退化尺度並提出解決之道
2000	陳正宗、郭世榮與林建華針對多連通假根問題提出 Burton 與 Miller 法解決
2000	陳正宗與陳誠宗針對外域輻射與散射聲場虛擬頻率發生機制進行探討
2001	陳正宗與陳義麟等以 CHEEF 法克服假根問題
2002	陳正宗與林書睿以 SVD 解含退化邊界問題 (不需超奇異與分區法)
2002	陳正宗與劉立偉針對多連通假根問題提出 CHIEF 與 SVD updating 法解決
2003	陳正宗與林宗衛探討混合型邊界條件假根問題
2003	陳正宗與林盛益針對多連通板振動假根問題提出解決之道
2003	陳正宗與陳桂鴻應用快速多重極邊界元素法 (應用在聲波與水波)
2004	陳正宗等探討邊界元素法秩降問題
2005	陳正宗等發展零場積分方程配合分離核與 Fourier 級數處理圓邊界問題
2006	陳正宗等發展零場積分方程配合分離核與 Fourier 級數處理圓邊界夾雜問題

配合符號解析運算(Symbolic Computation)程式，如 Macsyma, Reduce, Mathematica 與 Maple 等與前、後處理程式，繪圖軟硬體設備及超級電腦之聯用，使程式更具普遍性，並成為廣泛使用的套裝軟體，有助向工業界推展。

2. 理論技術的再提升

目前尚待開發方面，簡述於下：

- (1) 仿微分算子觀點的積分運算元。
- (2) Calderon 投影運算元觀點的對偶邊界元素法。
- (3) 影響係數矩陣之譜結構分析與條件數研究。
- (4) 幾何、材料非線性問題之應用。
- (5) 非線性暫態問題之研究。
- (6) BEM/FEM 聯用之探討。
- (7) 自適性誤差分析。
- (8) 對稱化 BEM 研究。

3. 工程實務之廣泛應用

目前工程應用方面，簡述於下：

- (1) 工程開挖、大地工程問題之應用。
- (2) 土壤結構互制之應用與壩體動水壓互制分析。
- (3) 海域平台動態分析之應用。
- (4) 最佳設計之應用。
- (5) 汽車與建築聲響之應用。
- (6) 疲勞、破裂與裂縫成長。

4. 教育方面

為使更多人了解BEM，需經由各不同的管道來推廣它，比如在學校方面可多開此方面的課，辦些研討會提供這方面人才互相切磋的機會。目前在國際例行會議方面，分為兩種，一為BEM(Boundary Element Method)會議，另一為 BETECH(Boundary Element Technology)會議，前者著重理論，後者著重工程實用。筆者有幸於1989 與1995 年參加第十一 (BEM 11) 與第十七屆 (BEM17) 會議，分別在 Cambridge 與 Madison 發表含板樁滲流分析與土壤動力的研究成果，並曾受邀於1990 年 BETECH90 會議發表有關氣動力方面的論文。這兩個會議每年在世界各地不定點舉行。於1993 年，作者曾赴葡萄牙與夏威夷參加 BETECH93 與 BETECH96 會議。另外一些數值分析與計算力學的國際會議中，邊界元素法均扮演重要的角色。筆者即曾受邀以邀請講座與專題講座在保加利亞第六屆數

值分析與阿根廷第四屆計算力學的會議中，進行專題報告。將我們在台灣多年來在對偶邊界元素法 (Dual BEM) 的過去發展與未來研究方向作一回顧。而國際理論與應用力學學會 (IUTAM) 也不定期舉辦BEM 研討會，筆者即曾參加在波蘭的會議。另外地區性會議，在日本、歐洲與中國大陸均有以邊界元素法為主題的會議，這些會議對推廣邊界元素法之學術交流而言，均是功不可沒。

0.5 結語

於本章中，介紹了邊界元素法發展的背景與歷史回顧，並簡述和其他方法的比較，讀者當可了解有其存在的價值。下面幾章將描述其數學基礎，數值技巧與在各個領域的應用，說明如下：

- 第1章 數學基礎
- 第2章 數值技巧
- 第3章 Laplace 方程式
- 第4章 Laplace 方程式 — 裂縫桿扭轉分析
- 第5章 Helmholtz 方程式 (內域問題) — 實部、虛部與複數型邊界元素法
- 第6章 Helmholtz 方程式 (外域問題) — 聲波數值共振問題的探討
- 第7章 彈性力學與裂縫問題
- 第8章 彈塑性問題的探討
- 第9章 時變邊界條件問題的應用
- 第10章 結構動力的應用—連續系統
- 第11章 結構動力的應用—離散系統
- 第12章 散漫振動的應用—連續系統
- 第13章 散漫振動的應用—離散系統
- 第14章 多倒易法與對偶邊界元素法的聯用
- 第15章 反算問題的探討
- 第16章 有限元素法與邊界元素法
- 第17章 總結

海大河工研究所陳正宗 對偶邊界元素法

【存檔：c:/ntoubook/dbem0.te】 【建檔:Feb./10/'2001】