

# 第壹章

## 數學基礎

---

### 1.1 引言

對於任何物理問題或工程問題而言，我們會嘗試以一數學模式來描述該問題的行為，則將對應有一控制方程式與邊界條件、及或初始條件，接著即可以數學解析的方法來求解。然限於一般實際工程問題之定義域的幾何形狀均很複雜，解析解不易求得，乃需訴諸於數值方法（如有限差分法、有限元素法與邊界元素法）。當然，依照採用數值方法的不同，就有其自成一套的數學基礎與解題的邏輯，邊界元素法當然也不例外。本章主要闡明其相關的數學基礎，且為增進讀者之了解，將配合一些簡單例子來說明邊界元素法之應用。

---

### 1.2 數值方法求解範例說明

為使讀者對數值模式先有個概念，本節擬以 Laplace 方程式為例，說明於下：

問題描述：

控制方程式：

$$\nabla^2 u(x) = 0, \quad x \in D \quad (1.1)$$

式中， $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ 。

邊界條件：

$$u = 0, \quad \text{at } x = 0, \quad \text{or } y = 0 \quad (1.2)$$

$$u = y, \quad \text{at } x = 1 \quad (1.3)$$

$$u = x, \quad \text{at } y = 1 \quad (1.4)$$

參考下圖

## 1.9 勢能

### 1.9.1 何謂勢論?

於物理範疇中，在重力場與電位場問題的應用中，吾人均曾定義過重力位能或電位能，而位能之定義則和所需作的功有著密切的關係，以重力場為例，設地球質量為  $M$ ，以離地球無限遠處一質量為  $m$  之重力位能設為 0，則可定義如下勢能：

將質量  $m$  的物體自離地球無限遠處移至距地球  $r$  處所需作的功，即為其重力位能，列式如下：

$$U(\infty) - U(r) = - \int_r^{\infty} \frac{-GMm}{r^2} dr$$

$$U(r) = - \frac{GMm}{r}$$

其中， $U(r)$  表示質量  $m$  在  $r$  處的重力位能， $G$  為萬有引力係數。重力位能具有勢能的性質，故為勢能之一種，說明如下：

(1) 除  $r = 0$  處外，均滿足 Laplace 方程式。

$$\nabla^2 U(r) = 4\pi GMm \delta(r), \text{ for } r \neq 0$$

(2)  $m$  質點所受之力為  $F = -\nabla U = -\frac{GMm}{r^2} \hat{e}_r$

以上所述為重力場勢能，現在文獻有關 Laplace 方程之積分理論均稱為勢論 (Potential theory)，亦可稱為牛頓勢能 (Newtonian potential)，即為此故。

若從勢能的數學意義而言，所謂勢能乃是經由核函數  $k(x, y)$  與密度函數  $\phi(y)$  積分後的函數。列式如下：

$$\int k(x, y) \phi(y) dy = p(x)$$

其中， $p(x)$  表示勢能， $k(x, y)$  表示核函數， $\phi(y)$  表示密度函數。

### 1.9.2 勢能的分類

勢能的分類，可從密度函數或核函數兩方面來分，說明於下

(1) 若以密度函數分佈的維度來分的話，有如下三種：

(a). 線勢能 (Line potential) :  $\int_l k(x, y)\phi(y)dy$

其中， $\phi(y)$  表示分佈於  $l$  線上之密度函數。

(b). 表面勢能 (Surface potential) :  $\int_S k(x, y)\phi(y)dy$

其中， $\phi(y)$  表示分佈於  $S$  面上之密度函數。

(c). 體積勢能 (Volume potential) :  $\int_V k(x, y)\phi(y)dy$

其中， $\phi(y)$  表示分佈於  $V$  體積上之密度函數。

(2) 若以核函數特性來分的話，有如下四種：

(a). 單層勢能  $V$  :

$$V(x) = \int U(s, x)\phi(s)ds$$

其中， $\nabla^2(U(s, x)) = -4\pi\delta(x - s)$ ， $V(x)$  為單層勢能， $\phi(s)$  為單層密度函數， $U(s, x)$  為單層核函數 ( $U(s, x) = U(x, s)$ )。

單層勢能  $V$  的特性：

1. 單層勢能  $V$  為連續函數，且除在奇異源  $\phi(s)$  的分佈邊界外，到處可微分且可微到任意階數。
2.  $V(x)$  場滿足 Laplace's 方程式 (for any  $x$ ,  $x \neq s$ )。
3. 單層勢能  $V$ ，於橫越邊界時為連續。列式如下：

$$V(x_i) = \lim_{x \rightarrow x_i} V(x)$$

$$V(x_e) = \lim_{x \rightarrow x_e} V(x)$$

亦即  $V(x_i) = V(x_e) = V(x)$ 。其中， $x_i$ ， $x_e$  分別代表域內點與域外點。上式說明，於橫越邊界時， $V(x)$  為連續函數。

4.  $V$  沿邊界切線方向為可微且連續。
5.  $V$  沿邊界法線方向微分之勢能為不連續。列式如下

$$V'_i(x) = \int U'_i(s, x)\phi(s)ds + 2\pi\phi(x)$$

$$V'_e(x) = \int U'_e(s, x)\phi(s)ds - 2\pi\phi(x)$$

其中， $'$  表示  $\frac{\partial}{\partial n(x)}$ ，在此為  $\frac{\partial}{\partial r}$   $x$  在邊界上。

6. 物理意義：在勢流場時是表示由源 (source) 或匯 (sink) 所造成的勢能，在彈力時則表示集中力所產生的勢能。

範例: 如下圖示, 若球面上分佈均勻單層源, 求其所造成的單層勢能場與其法向微分場。

球面上分佈均勻單層源  $\phi(s) = 1$

由球對稱特性可假設  $x, s$  坐標分別如下:

$$\mathbf{x} = (0, 0, r) \quad , \quad \mathbf{s} = (a \sin(\theta) \cos(\phi), a \sin(\theta) \sin(\phi), a \cos(\theta))$$

二維核函數為

$$U(s, x) = \frac{1}{r} = \frac{1}{|x - s|}$$

在  $r = a$  的圓球表面上分佈均勻單層源  $\phi(s) = 1$  , 則核函數代入  $x, s$  坐標後可計算得

$$U(s, x) = (a^2 + r^2 - 2a r \cos(\theta))^{-1/2}$$

當  $r = a$  時,  $U(s, x) = (2 a \sin(\theta/2))^{-1}$

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (a^2 + r^2 - 2 a r \cos(\theta))^{-1/2} a^2 \sin(\theta) d\theta d\phi \\ &= - \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (a^2 + r^2 - 2 a r \cos(\theta))^{-1/2} a^2 d\cos(\theta) d\phi \\ &= -2\pi \int_0^{2\pi} \int_1^{-1} (a^2 + r^2 - 2arp)^{-1/2} a^2 dp d\phi \\ &= \frac{2a\pi}{r} [(a^2 + r^2 + 2ar)^{1/2} - (a^2 + r^2 - 2ar)^{1/2}] \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\text{當 } r > a \text{ 時, 則 } V(r) = \frac{4\pi a^2}{r}$$

$$\text{當 } r < a \text{ 時, 則 } V(r) = 4\pi a$$

$$\text{當 } r = a \text{ 時, 則 } V(r) = 4\pi a$$

所以,  $V(r)$  為連續函數。此單層勢能的法向微分如下:

$$\text{當 } r > a \text{ 時, 則 } V'(r) = \frac{-4\pi a^2}{r^2}$$

$$\text{當 } r < a \text{ 時, 則 } V'(r) = 0$$

$$\text{當 } r = a \text{ 時, 則 } V'(r) = -2\pi$$

所以,  $V'(r)$  為不連續函數。其中', 表對  $r$  微分, 亦即  $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{d}{dr}$  。

綜整以上計算結果，繪圖如下：

單層勢能及其法向微分場示意圖

(b). 雙層勢能  $W$  :

$$W(x) = \int T(s, x)\psi(s)ds$$

其中， $W(x)$  表示雙層勢能， $\psi(s)$  表示雙層密度函數， $T(s, x)$  表示雙層核函數。

雙層勢能  $W$  的特性：

1. 雙層勢能  $W$  除在奇異源  $\psi(s)$  分佈的邊界外為連續函數，且除在邊界外到處可微分到任意階數。列式如下：

$$\frac{\partial^i W(x)}{\partial x^i} = \int \frac{\partial^i}{\partial x^i}(T(s, x))\psi(s)ds$$

其中，只要  $x$  不在邊界上，而  $i$  可為任意自然數。

2.  $W(x)$  滿足 Laplace's 方程式 ( for any  $x$  ,  $x \neq s$  ) 。
3. 雙層勢能  $W$  於橫越邊界時為不連續函數。列式如下：

$$\lim_{x \rightarrow x_i} W(x) = W(x_b) - 2\pi \psi(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_e} W(x) = W(x_b) + 2\pi \psi(x)$$

其中， $x$  在邊界上，上式於橫越邊界時， $W(x)$  為不連續函數。

4.  $W$  沿邊界切線方向  $t$  為可微但橫越邊界時不連續，列式如下：

$$\frac{\partial W^i(x)}{\partial t} = \frac{\partial W(x_b)}{\partial t} - 2\pi \frac{\partial \psi(x)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial W^e(x)}{\partial t} = \frac{\partial W(x_b)}{\partial t} + 2\pi \frac{\partial \psi(x)}{\partial t}$$

5.  $W$  沿邊界法線方向  $n$  微分於橫越邊界時為假連續 (Pseudo continuous) 列式說明如下：

$$\frac{\partial W^i(x)}{\partial n_x} = \frac{\partial W^e(x)}{\partial n_x}$$

其中  $i$  與  $e$  分別表示由內域或外域逼近。上式於極限行為方才成立， $x$  很接近  $x_b$ ，但  $x \neq x_b$ ，亦即  $\partial W/\partial n(x)$  在  $x = x_b$  時沒定義，因此可稱假連續，不像  $V(x)$  在  $x_b$  處即為內外域逼近值。值得一提的是，文獻上在氣動力領域把這極限值稱為 Mangler 主值，在固體力學領域則稱 Hadamard 主值。而 Mangler 稱此極限值才有物理意義。若從邊界元素法的觀點而言，取極限值才可得到有效的邊界未知量間的相容或稱束制方程式，才有數值意義。

6. 物理意義：在勢流場中表示由偶極所造成的勢能，在彈力場則表示由差排 (dislocation) 所產生的勢能。見下圖示

#### 偶極所造成的勢能示意圖

如上圖示，可知雙層密度函數  $\psi$  乃是將源 (source) 與匯 (sink) 放得很近時，所產生的勢能。故雙層勢能 (二維) 可列式如下

$$\begin{aligned} W &= -m \ln(r) + m \ln(r') = -m \ln(r/r') \\ &= -0.5m \ln(r/r')^2 = -0.5m \ln \left| 1 - \frac{2 \delta s \cos(\theta)}{r} \right| \quad \text{by cosine theorem} \\ &= \frac{m \delta \mathbf{s} \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{r}} = \frac{\psi \cos(\theta)}{r} \quad (\text{set } \psi = m \delta s) \end{aligned} \quad (1.2)$$

其中， $m$  表示源強度， $\theta$  表示  $r$  向量與偶極源向量  $n(s)$  的夾角，如上圖示。

此雙層勢能影響函數亦可由單層勢能核函數針對源點  $s$  作法向微分運算求得如下

$$\begin{aligned} U^*(x, s) &= -T(s, x) = -\frac{\partial}{\partial n_s}(\ln(r)) = -\frac{\partial U(s, x)}{\partial n_s} = -\frac{\partial U(x, s)}{\partial n_s} \\ &= y_i n_i / r^2 = \cos(\theta) / r \end{aligned} \quad (1.3)$$

其中， $U^*(x, s)$  為於  $s$  處  $n(s)$  方向之偶極所造成在  $x$  處的勢能影響函數，且此時之  $n_s = n(s) = (1, 0)$ 。

由以上兩者可看出結果相同，說明了雙層勢能核函數是由偶極奇異源所造成（以上核函數可參閱 § 1.9.4）。

同理可應用到三維問題，雙層勢能可列式如下：

$$\begin{aligned} W &= m/r - m/r' = -m(r - r')/rr' \\ &= \frac{-m(r^2 - r'^2)}{rr'(r + r')} = -0.5m \ln \left| 1 - \frac{2 \delta s \cos(\theta)}{r} \right| \quad (\text{by cosine theorem}) \\ &= \frac{-m \delta \mathbf{s} \cdot \mathbf{u}}{r r'} = -\frac{\psi \cos(\theta)}{r r'} \quad (\text{set } \psi = m \delta s) \\ &= -\frac{\psi \cos(\theta)}{r^2} \quad (\text{set } r' = r \text{ as } \delta s \rightarrow 0) \end{aligned} \quad (1.4)$$

其中， $m$  表示源強度， $\theta$  表示  $r$  向量與偶極源向量  $n(s)$  的夾角。此雙層勢能核函數亦可由單層勢能核函數的法向微分運算求得如下

$$U^*(x, s) = -T(s, x) = -\frac{\partial}{\partial n_s}(1/r) = -y_i n_i / r^3 = -\cos(\theta) / r^2 \quad (1.5)$$

其中， $U^*(x, s)$  為於  $s$  處偶極所造成在  $x$  處的勢能影響函數，且此時之  $n_s = n(s) = (1, 0)$ 。

兩者導得結果相同。說明了雙層勢能核函數是由偶極奇異源所造成（以上核函數可參閱 § 1.9.4）。

範例：如下圖示，若球面上分佈均勻雙層源，求其所造成的雙層勢能場與其法向微分場。

球面上分佈均勻雙層源  $\psi(s) = 1$

由球對稱特性可假設  $x, s$  坐標如下:

$$x = (0, 0, z) \quad , \quad s = (r \sin(\theta) \cos(\phi), r \sin(\theta) \sin(\phi), r \cos(\theta))$$

二維核函數為

$$T(s, x) = \frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{1}{r^2}$$

代入以上  $x, s$  坐標，可得

$$T(s, x) = -(z^2 + r^2 - 2zr \cos(\theta))^{-3/2} (r - z \cos(\theta))$$

其中， $\psi(s) = 1$  為在  $r = a$  的圓球面上的雙層密度分佈。

因為面積分為  $ds = a^2 \sin(\theta) d\theta$ ，雙層勢能可導得

$$\begin{aligned} & - \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (z^2 + r^2 - 2zr \cos(\theta))^{-3/2} (r - z \cos(\theta)) a^2 \sin(\theta) d\theta d\phi \\ &= - \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (z^2 + r^2 - 2zr \cos(\theta))^{-3/2} (r - z \cos(\theta)) a^2 d\cos(\theta) d\phi \\ &= 2\pi a^2 \int_{-1}^1 \int_0^\pi (z^2 + r^2 - 2zrp)^{-3/2} (r - zp) a^2 dp d\phi \end{aligned}$$

取  $r = 1 = a$ ，並不失其一般性。因此

$$W(z) = \int_{-1}^1 \frac{(1 - zp)}{(z^2 + 1 - 2zp)^{3/2}} dp \cdot 2\pi$$

積分式可以經由部分積分分解，經計算可得

$$\text{當 } r > 1 \text{ 時，則 } W(r) = 0$$

$$\text{當 } r < 1 \text{ 時，則 } W(r) = -4\pi$$

$$\text{當 } r = 1 \text{ 時，則 } W(r) = -2\pi$$

所以， $W(z)$  為不連續函數。而此雙層勢能的法向微分如下:

$$\text{當 } r > 1 \text{ 時，則 } \frac{\partial W(r)}{\partial z} = 0$$

$$\text{當 } r < 1 \text{ 時，則 } \frac{\partial W(r)}{\partial z} = 0$$

$$\text{當 } r = 1 \text{ 時，則 } \frac{\partial W(r)}{\partial z} = 4\pi\delta(r - a)$$

綜整計算結果，繪圖如下:



## 雙層勢能與其法向微分場示意圖

(c). 單層勢能  $V$  的法向微分: 於 (a) 已說明。

(d). 雙層勢能  $W$  的法向微分: 於 (b) 已說明。

由以上結果，讀者可看出各種勢能之不連續性與跳躍行為。值得一提的是，針對相同密度函數而言，單層勢能的法向微分場與雙層勢能場的和，於橫越邊界時會變成連續而無跳躍（參見 § 3.7 節與 § 4.4 節）。更值得一提的是，單層勢能沿奇異源分佈邊界之切向微分場與雙層勢能橫越邊界之法向微分場於橫過邊界時其場量均為連續（後者為假連續），而單層勢能橫越邊界法向微分場與雙層勢能沿邊界切向微分場於橫越邊界時均分別為不連續。這種成雙對偶關係，也是本書定義對偶積分式的動機，此種物理數學現象，不管在 Laplace 或彈力勢能均可看得到，讀者可參閱第三章 § 3.9 節之  $U, T, L^n, M^n, L^t, M^t$  等核函數於線段分佈常數源之勢能圖，當有更深刻的印象。

### 1.9.3 勢能的實例

為說明勢能，首先以二維、三維 Laplace 方程為例，將其核函數列表如下

#### 勢流場核函數

##### 1. 單層勢能 (Single Layer Potential)

若  $\phi(s)$  為分佈於  $S$  面上的單層密度函數，而  $U(s, x)$  為弱奇異核函數 (Weakly Singular)。則單層勢能  $V(x)$  可列式如下

$$V(x) = \int_S U(s, x) \phi(s) ds$$

範例: 單層勢能核

$U(s, x) = \ln(r)$ ，二維勢流場核函數，

$U(s, x) = 1/r$ ，三維勢流場核函數，

$U(s, x) = U_{ki}(s, x)$ ，彈力 Kelvin 核函數。

##### 2. 雙層勢能 (Double Layer Potential)

若  $\psi(s)$  為分佈於  $S$  面上的雙層密度函數，而  $T(s, x)$  為強奇異核函數 (Strongly Singular)。則雙層勢能  $W(x)$  列式如下

$$W(x) = \int_S T(s, x) \psi(s) ds$$

範例：雙層勢能核

$T(s, x) = -y_i n_i / r^2$ ，二維勢流場核函數，

$T(s, x) = y_i n_i / r^3$ ，三維勢流場核函數，

$T(s, x) = T_{ki}(s, x)$ ，彈力 Kelvin 核函數之曳引力場。

---

### 3. 體積勢能 (Volume Potential)

若  $\phi(s)$  為分佈於  $V$  上的單層密度函數，而  $U(s, x)$  為弱奇異核函數。則體積勢能  $V(x)$  可列式如下：

$$V(x) = \int_V U(s, x) \phi(s) dV(s)$$

---

範例：體積勢能核

$U(s, x) = \ln(r)$ ，二維勢流場核函數，

$U(s, x) = 1/r$ ，三維勢流場核函數，

$U(s, x) = U_{ki}(s, x)$ ，彈力 Kelvin 核函數。

---

### 4. 單層勢能的法向微分運算

若  $\phi(s)$  為分佈於  $S$  面上的單層密度函數，而  $L(s, x)$  為強奇異核函數。則單層勢能的法向微分運算場，可列式如下

$$\mathcal{F}U(x) = \int_S L(s, x) \phi(s) ds$$

其中， $\mathcal{F} = \frac{\partial}{\partial n(x)}$  表示法向微分運算元。

---

範例：單層勢能的法向微分運算核

$L(s, x) = y_i \bar{n}_i / r^2$ ，二維勢流場核函數，

$L(s, x) = -y_i \bar{n}_i / r^3$ ，三維勢流場核函數，

$L(s, x) = L_{ki}(s, x)$ ，彈力 Kelvin 核函數之曳引力運算。

---

### 5. 雙層勢能的法向微分運算

若  $\psi(s)$  為分佈於  $S$  面上的雙層密度函數，若  $M(s, x)$  為超強奇異核函數 (Hypersingular)，則雙層勢能  $W(x)$  的法向微分運算場，可列式如下

$$\mathcal{F}W(x) = \int_S M(s, x)\psi(s)ds$$

範例：雙層勢能的法向微分運算核

$M(s, x) =$  參見勢流場核函數表之二維勢流場核函數

$M(s, x) =$  參見勢流場核函數表之三維勢流場核函數

$M(s, x) = M_{ki}(s, x)$ ，見第四章彈力核函數。

在實際物理問題中，各類勢能對應的實際物理意義如下表

勢能種類說明表

## 1.9.4 勢能的應用

勢能應用在求解橢圓 (Elliptic) 型的微分方程時，針對不同的邊界條件，有各種不同的解法如下表說明

勢能應用說明表：

	單層勢能	雙層勢能
解	Neumann 問題	Dirichlet 問題
積分 運算元	$\mathcal{L}$	$\mathcal{T}$
Cauchy data	$\frac{\partial u}{\partial n} = \phi(x)$	$u = \phi(x)$
解數目	不唯一	唯一
邊界 積分法	$(\mathcal{L} - 0.5 I)\mu = \phi(x)$	$(\mathcal{T} + 0.5 I)\mu = \phi(x)$
待定 虛擬 函數	$\mu(s)$	$\mu(s)$
特徵值	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
非 特徵值	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{2}$
可逆性	不可	可
解型態	$u(x) = \int_B U(s, x)\mu(s) dB(s)$	$u(x) = \int_B \frac{\partial U(s, x)}{\partial n(s)}\mu(s) dB(s)$

註:

$$\mathcal{L}(\mu(x)) = CPV \int \frac{\partial U(s, x)}{\partial n_x} \mu(s) dB(s)$$

$$\mathcal{T}(\mu(x)) = CPV \int \frac{\partial U(s, x)}{\partial n_s} \mu(s) dB(s)$$

勢能在內外域問題的應用綜整如下表

內域外域積分式解法

	Neumann 問題		Dirichlet 問題	
DOMAIN	$\Omega$	$\Omega^c$	$\Omega$	$\Omega^c$
定義域	內域	外域	內域	外域
有解的條件	$\int \frac{\partial \phi}{\partial n} dB(s) = 0$	無	無	$\int \phi \mu dB(s) = 0$
運算元	$\mathcal{L} - 1/2$	$\mathcal{L} + 1/2$	$\mathcal{T} + 1/2$	$\mathcal{T} - 1/2$
可逆性	無	有	有	無
奇異性	有	無	無	有
解的數目	$\infty$	唯一	唯一	$\infty$
[備註]1 是 $\mathcal{T}$ 積分運算的特徵解. $\mu$ 是 $\mathcal{L}$ 積分運算的特徵解. $\mu$ 叫 Robin 勢能 (potential)				

值得一提的是以上應用之原則，若以數值技巧的觀點而言，主要是希望造成對角線較大 (Diagonal Dominant) 的矩陣，亦即對角線產生較大係數，如此可減少惡化 (ill conditioned) 的情況發生而增加準確度 (詳見 § 1.2 節之討論)。

## 1.10 主值的觀念

在前面已述及積分方程式中核函數有三類: 弱奇異、強奇異、超強奇異，其分別所產生的勢能亦有不相同，而需以某一種特定的觀念 (sense) 加以定義，這就是主值觀念的由來。參見下表:

主值與核函數的關係

其中， $R.P.V$  表示黎曼主值 (Riemann Principal Value)， $C.P.V.$  表示科西主值 (Cauchy

Principal Value) ，而  $H.P.V.$  表示阿達馬主值 (Hadamard Principal Value) ，對氣動力學者而言，稱為馬格拉主值 (Mangler Principal Value) 或阿達馬有限部份 (Hadamard Finite part) 。

---

## 1.10.1 黎曼主值 (Riemann Principal Value, R.P.V.)

所謂黎曼主值乃是弱奇異或正規核函數所造成的勢能，其積分值係依據黎曼和的離散和觀念而得，如下弱奇異核函數所造成勢能即為一例：

$$R.P.V. \int U(s, x)\phi(s)dB(s)$$

範例：以 Laplace 方程為例

$U(s, x) = \ln(r)$  ，  $dB(s)$  為一維積分，

$U(s, x) = 1/r$  ，  $dB(s)$  為二維積分。

此積分可經由極坐標轉換而將弱奇異性予以正規化。說明如下：

$$\int_A \frac{\phi(r, \theta)}{r} dA = \int \int \frac{\phi(r, \theta)}{r} r dr d\theta = \int \int \phi(r, \theta) dr d\theta \quad (1.6)$$

其中，  $\phi(r, \theta)$  為正規密度函數。

---

## 1.10.2 柯西主值 (Cauchy Principal Value, C.P.V.)

柯西主值的表示式有以下三種：

1. 柯西主值表示式：

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r e^{-i\alpha x} \int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{i\alpha s} ds d\alpha \quad (1.7)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \{C.P.V. \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} \int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{i\alpha s} ds d\alpha\} \quad (1.8)$$

範例：

$$\int_{-\infty}^{\infty} x dx = \infty$$

不存在。但

$$C.P.V. \int_{-\infty}^{\infty} x dx = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-r}^r x dx = 0$$

存在。

2. 複數型式表示式 (Complex Form):

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\mu(\tau)}{\tau - z} d\tau = W(x, y) + i V(x, y)$$

其中， $\tau, z$  為複數， $z = x + y i$ ，而  $V, W$  分別代表單層與雙層勢能如下

$$W(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_l \frac{\cos(\theta)}{r} \mu(s) ds$$

$$V(x, y) = \frac{-1}{2\pi} \int_l \ln(r) \frac{d\mu(s)}{ds} ds$$

3. 實數型式表示式:

$$C.P.V. \int_a^b k(x, s) \phi(s) ds = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \int_a^{x-\epsilon} + \int_{x+\epsilon}^b \right] k(x, s) \phi(s) ds \quad (1.9)$$

邊界元素法所使用的柯西主值通常為第三種，但複變數邊界元素法 (CVBEM) 則使用第二種，參閱賴經都 (C. Lai) 教授之著作” The Complex Boundary Element Method in Engineering Analysis ” 一書。

### 1.10.3 阿達馬主值 (Hadamard Principal Value, H.P.V.)

對含退化邊界問題而言，若欲以邊界元素法僅對邊界作離散，則將遭遇到超強奇異核的阿達馬主值的數學問題。所謂 Hadamard 主值乃是由超強奇異核函數所造成的勢能，此積分值即使以科西主值觀念解釋也不存在。為配合數值分析的應用，勢必定義出此有限值。現今文獻上定義有以下三種如下:

$$H.P.V. \int M(s, x) \phi(s) dB(s)$$

(1). 部份積分法

$$\begin{aligned} H.P.V. \int_a^c \frac{\phi(t)}{(x-t)^2} dt, \quad a < x < c \\ = H.P.V. \int_a^c \lim_{y \rightarrow 0} k(x, y, t) \phi(t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{y \rightarrow 0} \int_a^c k(x, y, t) \phi(t) dt \\
 &= \lim_{y \rightarrow 0} [\bar{k}(x, y, t) \phi(t) \Big|_a^c - \int_a^c \bar{k}(x, y, t) \phi'(t) dt] \\
 &= \frac{\phi(c)}{(x-c)} - \frac{\phi(a)}{(x-a)} - C.P.V. \int_a^c \lim_{y \rightarrow 0} \bar{k}(x, y, t) \phi'(t) dt \\
 &= \frac{\phi(c)}{(x-c)} - \frac{\phi(a)}{(x-a)} - C.P.V. \int_a^c \frac{\phi'(t)}{x-t} dt
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

其中

$$\begin{aligned}
 k(x, y, t) &= 1/[(x-t)^2 + y^2] \\
 k &= \frac{\partial \bar{k}}{\partial t}
 \end{aligned}$$

因為

$$C.P.V. \int_a^c \frac{\phi'(t)}{x-t} dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{\phi(t)}{(x-t)} \Big|_a^{x-\epsilon} + \frac{\phi(t)}{(x-t)} \Big|_{x+\epsilon}^c - \left( \int_a^{x-\epsilon} + \int_{x+\epsilon}^c \right) \frac{\phi(t)}{(x-t)^2} dt \right]$$

所以

$$H.P.V. \int_a^c \frac{\phi(t)}{(x-t)^2} dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{-2\phi(x)}{\epsilon} + \left( \int_a^{x-\epsilon} + \int_{x+\epsilon}^c \right) \frac{\phi(t)}{(x-t)^2} dt \right]$$

## (2). 廣義函數法

定義分佈函數

$$\langle f, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) f(x) dx$$

其中， $\phi(x)$  為測試函數 (Test function)。若選取

$$f(x) = H(x)/x + H(-x)/x$$

$$f_1(x) = H(x)/x$$

$$f_2(x) = H(-x)/x$$

其中， $H(x)$  為 Heaviside 函數 (Step function)。由部份積分式知

$$\begin{aligned}
 \langle f'_1, \phi \rangle &= - \langle f_1, \phi' \rangle = - \int_0^{\infty} \phi'(x)/x dx \\
 &= - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \phi(x)/x \Big|_{\epsilon}^{\infty} + \int_{\epsilon}^{\infty} \phi(x)/x^2 dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\epsilon}^{\infty} -\phi(x)/x^2 dx + \phi(\epsilon)/\epsilon \right\} \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\epsilon}^{\infty} -\phi(x)/x^2 dx + \phi(0)/\epsilon \right\}
 \end{aligned} \tag{1.11}$$



同理，

$$\begin{aligned} \langle f'_2, \phi \rangle &= - \langle f_2, \phi' \rangle = - \int_{-\infty}^0 \phi'(x)/x \, dx \\ &= - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \phi(x)/x \Big|_{-\infty}^{-\epsilon} + \int_{-\infty}^{-\epsilon} \phi(x)/x^2 \, dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{-\epsilon} -\phi(x)/x^2 \, dx + \phi(-\epsilon)/\epsilon \right\} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{-\epsilon} -\phi(x)/x^2 \, dx + \phi(0)/\epsilon \right\} \end{aligned} \quad (1.12)$$

將兩邊合成如下

$$\begin{aligned} \langle f', \phi \rangle &= \langle f_1, \phi \rangle + \langle f_2, \phi \rangle \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{2\phi(0)}{\epsilon} - \left( \int_{-\infty}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{\infty} \right) \phi(x)/x^2 \, dx \right] \end{aligned} \quad (1.13)$$

定義

$$\begin{aligned} \langle pf(-1/x^2), \phi \rangle &= H.P.V. \int_{-\infty}^{\infty} -\phi(x)/x^2 \, dx \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{2\phi(0)}{\epsilon} - \left( \int_{-\infty}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{\infty} \right) \phi(x)/x^2 \, dx \right] \end{aligned} \quad (1.14)$$

其中， $pf$  表示“假的”(pseudo) 函數。因此

$$H.P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)/x^2 \, dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ -2\phi(0)/\epsilon + \left( \int_{-\infty}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{\infty} \right) \phi(x)/x^2 \, dx \right] \quad (1.15)$$

(3). Hadamard 法

阿達馬主值可定義如下

$$H.P.V. \int_a^c \phi(t)/(b-t)^2 \, dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} -\frac{d}{db} \left\{ \left( \int_a^{b-\epsilon} + \int_{b+\epsilon}^c \right) \phi(t)/(b-t) \, dt \right\}$$

此積分由  $a$  積到  $b - \epsilon$  再對  $b$  微分時，套用 Leibnitz' 公式，可得

$$\begin{aligned} &\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \frac{d}{db} \int_a^{b-\epsilon} \phi(t)/(b-t) \, dt \right) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \int_a^{b-\epsilon} -\phi(t)/(b-t)^2 \, dt + \phi(t)/(b-t) \Big|_{b-\epsilon} \right) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( -\phi(t)/(b-t) \Big|_a^{b-\epsilon} + \int_a^{b-\epsilon} \phi'(t)/(b-t) \, dt + \phi(t)/(b-t) \Big|_{b-\epsilon} \right) \end{aligned}$$

當  $\epsilon \rightarrow 0$  時，此積分可能不存在。

同理，此積分由  $b + \epsilon$  積到  $c$ ，可得

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \frac{d}{db} \int_{b+\epsilon}^c \phi(t)/(b-t) \, dt \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \int_{b+\epsilon}^c -\phi(t)/(b-t)^2 dt - \phi(t)/(b-t) \Big|_{b+\epsilon} \right) \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( -\phi(t)/(b-t) \Big|_{b+\epsilon}^c + \int_{b+\epsilon}^c \phi'(t)/(b-t) dt + \phi(t)/(b-t) \Big|_{b-\epsilon} \right) \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{b+\epsilon}^c \phi'(t)/(b-t) dt - \phi(c)/(b-c) \tag{1.16}
 \end{aligned}$$

當  $\epsilon \rightarrow 0$  時，此積分可能不存在。

然而以下積分在  $\phi'(t)$  於  $t = b$  連續的情況下是存在的。

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \int_a^{b-\epsilon} + \int_{b+\epsilon}^c \right) \phi'(t)/(b-t) dt = C.P.V. \int_a^c \phi'(t)/(b-t) dt$$

## 1.10.4 主值與過奇異點積分技巧

主值的產生，可以由繞奇異點之半圓（二維問題）或半球面（三維問題）路徑的極限積分來解釋，以二維勢流場核函數說明如下：

範例：(a). 二維勢流場  $U(s, x)$

$U(s, x)$  積分路徑示意圖（反時針）

因為

$$U(s, x) = \ln(r)$$

不失一般性，在局部行為，

$$x = (0, 0), \quad s = (\epsilon \cos \theta, \epsilon \sin \theta)$$

$$\begin{aligned}
 \int U(s, x) t(s) dB(s) &= \int_0^\pi \ln \epsilon \left( \frac{\partial u}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \theta \right) \epsilon d\theta \\
 &= \int_0^\pi \epsilon \ln \epsilon \frac{\partial u}{\partial x} \cos \theta d\theta + \int_0^\pi \epsilon \ln \epsilon \frac{\partial u}{\partial y} \sin \theta d\theta \\
 &= -\epsilon \ln \epsilon \frac{\partial u}{\partial y} \cos \theta \Big|_0^\pi = 2\epsilon \ln \epsilon \frac{\partial u}{\partial y}
 \end{aligned}$$

當  $\epsilon \rightarrow 0$  時， $\epsilon \ln \epsilon \rightarrow 0$ ，亦即繞奇異點之半圓路徑積分為 0。故弱奇異核函數所產生之勢能是連續的。

範例: (b). 二維勢流場  $T(s, x)$  (強奇異)

$T(s, x)$  積分路徑示意圖 (反時針)

其中

$$x = (0, 0), \quad s = (\epsilon \cos \theta, \epsilon \sin \theta), \quad n(s) = (\cos \theta, \sin \theta), \quad y_1 = -\epsilon \cos \theta, \quad y_2 = -\epsilon \sin \theta$$

$u(s)$  可在上半圓展開

$$\begin{aligned} u(s) &= u(x) + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \\ &= u(x) + \frac{\partial u}{\partial x} \epsilon \cos \theta + \frac{\partial u}{\partial y} \epsilon \sin \theta \end{aligned}$$

因為

$$\begin{aligned} T(s, x) &= -y_i n_i / r^2 = \frac{\epsilon(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))}{r^2} = \frac{1}{\epsilon} \\ \int \frac{-y_1 n_1 - y_2 n_2}{r^2} [u(x) + \frac{\partial u}{\partial x} \epsilon \cos \theta + \frac{\partial u}{\partial y} \epsilon \sin \theta] \epsilon d\theta &= \pi u \end{aligned}$$

上式，上半圓之路徑積分值為  $\pi u$  (up contour)，下半圓之路徑積分值為  $-\pi u$  (down contour)，表明了橫越邊界時跳躍  $2\pi u$ 。故強奇異核函數所產生之勢能為跳躍函數。

範例: (c). 二維勢流場  $L(s, x)$ , (強奇異)

$L(s, x)$  積分路徑示意圖 (反時針)

因為  $L(s, x) = y_i \bar{n}_i / r^2$  , 同理, 可得

$$\begin{aligned} x &= (0, 0) \\ s &= (\epsilon \cos \theta, \epsilon \sin \theta) \\ n(x) &= (0, 1) \\ t(s) &= \frac{\partial u}{\partial x} n_1 + \frac{\partial u}{\partial y} n_2 \quad \text{其中 } s \text{ 係延著上半圓路徑積分} \\ y_1 &= -\epsilon \cos \theta, \\ y_2 &= -\epsilon \sin \theta \\ L(s, x) &= \frac{-\epsilon \sin(\theta)}{\epsilon^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\int L(s, x) t(s) dB(s) \\ &= \int_0^\pi \frac{-\epsilon \sin \theta}{\epsilon^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \theta \right) \epsilon d\theta - \int_0^\pi \frac{\partial u}{\partial y} \sin^2 \theta \epsilon d\theta \\ &= -\frac{\pi}{2} \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\pi}{2} t \end{aligned}$$

上式, 上半圓之路徑積分值為  $-\pi t/2$  (up contour), 下半圓之路徑積分值為  $\pi t/2$  (down contour), 表明了橫越邊界時跳躍  $-\pi t$ 。故強奇異核函數所產生之勢能為跳躍函數。值得一提的是, 針對相同的密度函數而言, 單層勢能之法向微分場與雙層勢能場之和是連續的, 列式如下:

$\int \{T(s, x) + L(s, x)\} \mu(s) ds$  為連續。

範例: (d). 二維勢流場  $M(s, x)$  (超強奇異核函數)

$M(s, x)$  積分路徑示意圖 (反時針)

因為

$$M(s, x) = 2y_i y_j n_i \bar{n}_j / r^4 - n_i \bar{n}_i / r^2$$

$$(4) \int M(s, x) u(s) dB(s)$$

$$x = (0, 0), \quad s = (\epsilon \cos \theta, \epsilon \sin \theta)$$

$$n(x) = (0, 1), \quad n(s) = (\cos \theta, \sin \theta)$$

$$y_1 = -\epsilon \cos \theta, \quad y_2 = -\epsilon \sin \theta$$

$$u(s) = u(x) + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \epsilon \cos \theta + \frac{\partial u}{\partial y} \epsilon \sin \theta \right)$$

$$\begin{aligned} & \int M(s, x) u(s) dB(s) \\ = & \int \left( \frac{2y_i y_j n_i \bar{n}_j}{r^4} - \frac{n_i \bar{n}_i}{r^2} \right) \left[ u(x) + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \epsilon \cos \theta + \frac{\partial u}{\partial y} \epsilon \sin \theta \right) \right] dB \\ = & \int_0^\pi \left( \frac{2\epsilon^2 \sin \theta}{\epsilon^4} - \frac{\sin \theta}{\epsilon^2} \right) \left[ u(x) + \epsilon \left( \frac{\partial u}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \theta \right) \right] \epsilon d\theta \\ = & \int_0^\pi \left( \frac{\sin \theta}{\epsilon^2} \right) \left[ u(x) + \epsilon \left( \frac{\partial u}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \theta \right) \right] \epsilon d\theta \\ & = \frac{\cos \theta}{\epsilon} \Big|_0^\pi + \frac{\partial u}{\partial y} \left( \frac{1}{2} \right) \Big|_0^\pi \\ & = \frac{-2}{\epsilon} + \frac{\pi}{2} t \end{aligned}$$

上式，繞上半圓之積分值等於  $\frac{-2}{\epsilon} + \frac{\pi}{2} t$ ，繞下半圓之積分值等於  $\frac{-2}{\epsilon} - \frac{\pi}{2} t$ 。此無限值  $2/\epsilon$  和 H.P.V. 定義之  $-2/\epsilon$  恰可消掉，而求出有限值  $\pi t/2$ ，故超強奇異核函數所產生之勢能為假連續函數 (Pseudo continuous function)，亦即橫越奇異源的分佈邊界兩邊的勢能相同，但在邊界上無定義，故亦稱阿達馬有限部份 (Hadamard Finite Part)，對氣動學者而言則被稱為馬格拉 (Mangler's) 主值。

## 1.10.5 主值與正交函數的關係

所謂正交函數族  $y_m(x)$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots$  為在某區間內，有如下特性

$$\int_a^b y_m(x) y_n(x) r(x) dx = \delta_{mn}$$

其中， $a, b$  為定義之區間， $r(x)$  為權函數。

如果  $m, n$  不等， $\delta_{mn} = 0$  ； 如果  $m, n$  相等， $\delta_{mn} = 1$  。

此函數係可由 Sturm-Liouville 微分方程而來，列式如下：

特徵值函數控制方程： $(py')' + (\lambda r - q)y = 0$

邊界條件： $\alpha y(a) + \beta y'(a) = 0$  ,  $\delta y(b) + \gamma y'(b) = 0$

其中， $\alpha, \beta, \delta, \gamma$  為常數， $p(x), q(x), r(x)$  為連續實函數， $r(x)$  為權函數。而  $\lambda$  為特徵值， $y$  為特徵函數。

為說明正交函數與 Sturm-Liouville 微分方程的關係，請參見下表

正交函數與 Sturm-Liouville 微分方程的關係

上表所列為較常用的正交函數，這些函數可用來作主值解析計算的橋樑，說明如下幾例：

$$C.P.V. \int_{-1}^1 \frac{P_n(s)}{(s-x)} ds = -2Q_n(x)$$

其中， $P_n(x), Q_n(x)$  分別表示 Legendre 第一、二類多項式。

$$H.P.V. \int_{-1}^1 \frac{P_n(s)}{(s-x)^2} ds = \frac{d}{dx} \left\{ C.P.V. \int_{-1}^1 \frac{P_n(s)}{(s-x)} ds \right\}$$

$$C.P.V. \int_{-1}^1 \frac{U_n(s)}{(s-x)} \sqrt{1-s^2} ds = -\pi T_{n+1}(x)$$

$$\begin{aligned} H.P.V. \int_{-1}^1 \frac{U_n(s)}{(s-x)^2} \sqrt{1-s^2} ds &= \frac{d}{dx} \left\{ C.P.V. \int_{-1}^1 \frac{U_n(s)}{(s-x)} \sqrt{1-s^2} ds \right\} \\ &= -\pi(n+1)U_n(x) \end{aligned}$$

其中， $T_n(x)$ ,  $U_n(x)$  分別代表 Chebyshev 多項式的第一類與第二類。以上四個恆等式之推導，請讀者嘗試解之。

## 1.11 權殘餘法

權殘餘法為一數值方法的技巧，其原理如下：

問題描述：

控制方程式：  $L(u(x)) = p(x)$  ,  $x \in V$

邊界條件：  $G(u) = \bar{u}$ ,  $x$  on  $S_1$  ,  $S(u) = \bar{t}$ ,  $x$  on  $S_2$

吾人可分別定義三個權餘值與權函數如下：

權餘值	權函數
$\epsilon = L(u) - p$	$W_1(x)$
$\epsilon = G(u) - \bar{u}$	$W_2(x)$
$\epsilon = S(u) - \bar{t}$	$W_3(x)$

欲解之函數為  $u$ ，可將其表為由內插函數  $\phi(x)$  與未定係數  $c_i$  之組合如下：

$$u(x) = \sum_i^n c_i \phi_i(x)$$

討論：

(1) 若  $W_2 = W_3 = 0$  且  $\phi(x)$  滿足  $G(u) = \bar{u}$  的允許條件 (Admissible condition)，則最小權餘值如下式：

$$\int_V \epsilon_1 W_1(x) dV(x) = \int_V (L(u) - p) W_1(x) dx = 0$$

由於有  $n$  個未定係數  $c_i$ ，因此  $W(x)$  需對應取  $n$  個，如此才可得一  $c_i$  的線性方程式  $\rightarrow$  可解  $c_i \rightarrow$  可解  $u(x)$ 。  $W(x)$  的選擇有很多，不同的權函數即對應不同的方法，參見下表：

不同權函數所對應的方法

(2) 若  $W_1, W_2, W_3$  均不為 0，則最小權餘值如下式

$$\int_V \epsilon_1 W_1(x) dV(x) + \int_{S_1} \epsilon_2 W_2(x) dB(x) + \int_{S_2} \epsilon_3 W_3(x) dB(x) = 0$$

(3) 若取

$$W_1 = W_3 = U(s, x)$$

$$W_2 = T(s, x)$$

則可導得邊界積分方程式。

(4) 若取

$$W_1 = \psi_1(x)$$

$$W_2 = \psi_2(x)$$

$$W_3 = \psi_3(x)$$

則可導得有限元素弱式化推導 (Weak formulation)。

---

## 1.12 邊界元素法與邊界積分法的異同

邊界元素法與邊界積分法常被認為是完全一樣的，其實應可分別如下：



(1) 前者強調對幾何邊界作離散元素後，再以常數或線性元素等來內插物理量，其自由度為結點量，其和有限元素法的觀念是密切相關的。

(2) 後者強調對幾何邊界整個區域以一連續性較好 (good) 的內插函數 (interpolation function) 來內插物理量，其自由度為廣義坐標。

舉一簡單說明例如下：

$$\int_0^1 K(s, t)f(t)dt = g(s)$$

(1).  $f(t)$  在  $0 \sim 1$  之間之離散如下圖：

邊界元素法

$$\int_0^1 K(s, t)f(t)dt = g(s)$$

(2).  $f(t)$  在  $0 \sim 1$  之間之離散如下圖：

邊界積分法

---

## 1.13 直接法與間接法

在邊界元素法的領域中，根據解法邏輯的不同，可分為兩種—直接法與間接法，分述如下：

(1). 直接法

此推導主要由格林恆等式或 Somigliana 恆等式出發，由於其欲解未知量均為實際的邊界物理量，在影響係數矩陣求得後，即可直接求得邊界未知量，故稱為直接法，強調此“直接”為由數學觀點直接推導而來，可說成邊界未知量直接為未定係數的表示法，亦即以邊界  $u, t$  為基本變量 (state variable) 來描述整個場的行為。

## (2). 間接法

此推導主要由物理意義的疊加觀念出發，由於其未定係數均是人為的虛擬未知量，在影響係數矩陣求得後，是先求得虛擬物理量後，再求實際的物理量，故稱為間接法，強調此“間接”是指求解邊界未知物理量的步驟而言。此種間接法若從物理意義想，其實是“較直接”的線性疊加觀念，其在力學上之應用則含有取自由體圖 (Take free body) 之意味在，亦即以虛擬未知量  $\phi, \psi$  為基本變量 (state variable) 來描述整個場的行為。

概括而言，間接法最主要精神，乃在於求解偏微分程式時，只要我們找到滿足

(1) 控制方程式 (在定義域內)

(2) 邊界條件或初始條件

兩個條件的積分表示式即為其解。

根據這個道理，我們可考慮將問題的定義域予以擴大，設法找到同時滿足 (1) 和 (2) 之解即是其解。以下舉二例說明：

範例：考慮一半無限域波傳問題如下

波動控制方程式：

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < t < \infty$$

初始條件：  $u(x, 0) = p(x), \quad \dot{u}(x, 0) = 0$

邊界條件：  $u(0, t) = 0$

其中  $p(x)$  為初始位移。

解：

1. 首先將定義域變為  $-\infty < x < \infty$ ，才可配合無限域之 D'Alembert 解析解。
2. 由於任意  $t > 0, u(0, t) = 0$ ，為了配合此邊界條件，故需予虛擬定義域內加一振幅相反而波速相同的鏡射波 (image wave)，如此一來才可配合無限域 D'Alembert 解如下

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(p(x+ct) + p(x-ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x+ct}^{x-ct} q(t) dt = \frac{1}{2}(p(x+ct) + p(x-ct))$$

而求得半無限域波傳問題之正解如下

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(p(x + ct) + p(x - ct)) - \frac{1}{2}(p(-x + ct) + p(-x - ct))$$

其中，初始波形  $p(x)$  定義如下圖示。

---

### 半無限域波傳問題之間接法應用

將  $u(x, t)$  取出  $0 < x < \infty$  之定義域，則此域內解即為半無限域之解。

驗證：

(1). 在定義域內，滿足控制方程式

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < t < \infty$$

(2). 滿足初始條件

$$u(x, 0) = p(x), \quad 0 < x < \infty$$

$$\dot{u}(x, 0) = 0, \quad 0 < x < \infty$$

(3). 滿足邊界條件  $u(0, t) = 0$

滿足 (1),(2),(3) 條件故為其解。本問題此解法即為最早の間接法觀念。

範例：彈力問題的應用，考慮一彈力問題如下：

彈力控制方程式：

$$L(u) = (\lambda + G)\nabla^2 u(x) + G\nabla \cdot \nabla(x) = 0, \quad x \text{ in } D$$

邊界條件

$$t(x) = \bar{t}(x), \quad x \text{ on } B_2$$

$$u(x) = \bar{u}(x), \quad x \text{ on } B_1$$

參考下圖

#### 彈力問題的廣義間接法應用

首先將此問題擴大到  $D'$  之定義域時，於此定義域之邊界  $B'$  分佈一假想力  $\phi$  或差排  $\psi$  (Dislocation) 函數，再利用無限域格林函數經由疊加原理可知

(1) 取單層勢能時，變位場與曳引力場可分別表成

$$\text{變位場} \quad u_i(x) = \int_{B'} U_{ij}(x, s)\phi_j(s)dB(s)$$

$$\text{曳引力場} \quad t_i(x) = \int_{B'} T_{ij}(x, s)\phi_j(s)dB(s)$$

(2) 取雙層勢能時，變位場與曳引力場可分別表成

$$\text{變位場} \quad u_i(x) = \int_{B'} U_{ij}^*(x, s)\phi_j(s)dB(s)$$

$$\text{曳引力場} \quad t_i(x) = \int_{B'} T_{ij}^*(x, s)\phi_j(s)dB(s)$$

而邊界條件之吻合，係說明於  $B'$  外力作用下，在  $B$  處切下的自由體圖之內力或位移，需滿足邊界條件。據此，吾人可求得沿邊界  $B'$  分佈之  $\phi_j$  或  $\psi_j$  之未定係數值，再代回變位場與曳引力場的積分式，即可求得定義域  $D$  內任一點的  $u_i$  或  $t_i$  值。

驗證：

1.  $u_i(x)$  在定義域  $D$  內，均滿足控制方程式。

$$\text{因為} \quad L(U_{ij}(x, s)) = \delta_{ij}(x - s)$$

所以  $L(u_i(x)) = 0$ ，當  $x$  在定義域  $D$  內。

2.  $u_i(x)$  滿足邊界條件，因為  $\phi_j, \psi_j$  中的待定係數是根據此邊界條件求出的，故自動滿足。

討論：

當  $D' = D, B' = B$  時，

- (1). 若基本變數僅取  $\phi(s)$  奇異源，則為間接法第一類（單層勢能法）。
- (2). 若基本變數僅取  $\psi(s)$  奇異源，則為間接法第二類（雙層勢能法）。
- (3). 若基本變數同時取  $\phi(s), \psi(s)$  奇異源，則恰為直接法。

由以上結果，吾人可發現彈力間接法的精神類似於取自由體的力學觀念 (Take free body)，意即在  $D'$  中取  $D$ ，而  $B$  上的邊界條件即為內力或位移。讀者可和前面波動的例子相互比較，來了解間接法的解題邏輯與物理觀念。

\*\*\*\*\*

習題：一有限域波傳問題如下

波動控制方程式：

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < \infty, 0 < t < \infty$$

初始條件： $u(x, 0) = p(x)$ ， $\dot{u}(x, 0) = 0$

邊界條件： $u(0, t) = u(l, t) = 0$

求解  $u(x, t)$ ，參考下圖

半無限域波傳問題之間接法應用

\*\*\*\*\*

### 1.13.1 間接法在映像法的應用

由前節間接法的例子，可看出映像法 (image method)，常有助於對問題的解析，一般此種方法是先配合某種邊界條件而在域外找些虛源，可調整虛奇異源的強度或方向，使其滿足邊界條件。值得注意的是，座落於  $s'$  之虛擬源  $\phi(s')$  或  $\psi(s')$  奇異源強度大小和偶極方向不能是場點  $x$  的函數，而僅能為  $s'$  的函數，唯有如此，才能在符合邊界條件的同時，也不破壞其在問題的定義域內控制方程僅含  $\delta$  函數的特性。舉 Poisson 積分公式為例，說明如下

範例：試以映像法，推導 Poisson 積分公式。

控制方程  $\nabla^2 \phi(r, \theta) = 0, 0 < r < R, 0 < \theta < 2\pi$

邊界條件  $\phi(r, \theta) |_{r=R} = f(\theta)$ .

滿足上式的解可以寫成

$$2\pi\phi(s) = \int_B U(x; s, s')t(x)dB(x) - \int_B T(x; s, s')u(x)dB(x)$$

若取

$$U(x; s, s') = U(x, s) + U(x, s') + U(s')$$

其中

$$U(x, s) = -\ln |x - s|$$

$$U(x, s') = \ln |x - s'|$$

$$U(s') = -\ln\left(\frac{R}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}}\right)$$

Poisson 核對應的映像奇異系統

由上圖幾何關係可知

$$x_1 = \bar{\rho} \cos(\bar{\theta}), \quad x_2 = \bar{\rho} \sin(\bar{\theta})$$

$$s_1 = \rho \cos(\theta), \quad s_2 = \rho \sin(\theta)$$

$$\theta_1 = \bar{\theta} - \theta$$

$$r^2 = \rho^2 + \bar{\rho}^2 - 2\rho\bar{\rho}\cos(\theta_1)$$

$$r'^2 = \bar{\rho}^2 + \left(\frac{R^2}{\rho}\right)^2 - 2R^2\frac{\bar{\rho}}{\rho}\cos(\theta_1)$$

因此

$$U(x; s, s') = -\ln(r) + \ln(r') - \ln(\rho/R)$$

當  $\bar{\rho} = R$  時，意即  $x$  在  $R = 1$  的圓上，所以

$$U(x; s, s') = 0$$

解的積分表示式，更可精簡的寫成

$$2\pi\phi(s) = - \int_B T(x; s, s')u(x)dB(x)$$

而若  $x$  在圓周上，則

$$T(x; s, s') = \frac{-1}{2\pi R} \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos(\theta_1)}$$

解為

$$u(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos(\theta)} f(\theta) d\theta$$

上式即為很有名的 Poisson 積分公式。而

$$k(s, x) = \frac{1}{2\pi} \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos(\theta)}$$

其中， $k(s, x)$  即為 Poisson 核函數。

\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*

習題：將上式的內域 Poisson 積分公式改成外域 Poisson 積分公式，則將有何改變？

二維

$$u(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 - R^2}{R^2 - \rho^2 - 2R\rho \cos(\theta - \theta')} f(\theta') d\theta'$$

三維

$$u(\rho, \psi, \theta) = \frac{R(R^2 - \rho^2)}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos(\gamma)} f(\psi', \theta') \sin(\psi') d\psi' d\theta'$$

其中， $\cos(\gamma) = \cos(\bar{\psi})\cos(\psi) + \sin(\bar{\psi})\sin(\psi)\cos(\theta' - \theta)$ 。

\*\*\*\*\*

## 1.13.2 映像法在半平面問題的應用

映像法主要是用來求得滿足某種特殊邊界條件的格林解，透過格林恆等式後可導得免除某些路徑積分的邊界積分方程式，前節導得的 Poisson 積分公式即為一例。本節將基於對偶積分式的架構來探討映像法在半平面問題的應用，傳統的映像法為在映像域內製造一個虛擬映像源，其強度可取正或負來滿足邊界條件。這裡將拓廣到虛擬偶極源，且虛擬偶極源可彈性地改變其方向以便產生所需要的邊界條件。這種可調式的虛擬偶極方向可機動性地建立很多基本解，這比傳統只可調整奇異源強度的正負來滿足邊界條件是方便許多。但值得一提的是，此可調方向不能是場點  $x$  的函數，而僅能與源點  $s$  有關，否則將破壞其在原定義域內滿足基本解的型式。

首先將以對偶積分式為基礎，探討直接法與間接法所得的核函數關係，再推廣到含映像源的核函數關係，亦即前者是單源與單場點，後者則是雙源與單場點。根據以上的統合關係，引入了虛擬邊界，可將本書發展的 BEPO2D 程式輕易地應用到半平面問題上，茲說明如下

控制方程  $\nabla^2 \phi = 0, x \in D$

其中， $\nabla^2$  表示 Laplacian 運算元， $\phi$  為勢位，而  $D$  為所考慮的區域。

邊界條件  $\phi(x) = f(x), x \text{ on } B_1 \quad \frac{\partial \phi(x)}{\partial n_x} = g(x), x \text{ on } B_2$

其中， $f(x)$  和  $g(x)$  表示已知的邊界條件， $B_1$  和  $B_2$  為邊界， $n_x$  為  $x$  的法向量。



功能互換的兩個系統

參考上圖的兩個力系，以二維問題為例，取  $s$  處的奇異源基本解，使用格林恆等式，則域內點的對偶積分方程式第一式如下

$$2\pi\phi(s) = \int_B U(x, s) \frac{\partial\phi(x)}{\partial n_x} dB(x) - \int_B T(x, s)\phi(x)dB(x) \quad (1.17)$$

其中， $U(x, s)$  表示在  $s$  處的奇異源所構成的  $x$  處的勢位，而  $T(x, s)$  表示在  $s$  處的奇異源所構成的  $x$  處的勢位導微。對上式  $s$  的場取導微，且定義

$$L(x, s) = \frac{\partial U(x, s)}{\partial n_s} \quad (1.18)$$

$$M(x, s) = \frac{\partial T(x, s)}{\partial n_s} \quad (1.19)$$

因此可得

$$2\pi \frac{\partial\phi(s)}{\partial n_s} = \int_B L(x, s) \frac{\partial\phi(x)}{\partial n_x} dB(x) - \int_B M(x, s)\phi(x)dB(x) \quad (1.20)$$

如上圖示，若所取的基本解為在  $s$  的  $n(s)$  方向偶極奇異源，則功能互換原理告訴我們

$$-2\pi \frac{\partial\phi(s)}{\partial n_s} = \int_B U^*(x, s) \frac{\partial\phi(x)}{\partial n_x} dB(x) - \int_B T^*(x, s)\phi(x)dB(x) \quad (1.21)$$

其中， $U^*(x, s)$  表示在  $s$  處的奇異偶極源所構成的  $x$  處的勢位，而  $T^*(x, s)$  表示在  $s$  處的奇異偶極源所構成的  $x$  處的勢位導微，其中偶極的方向  $n(s)$  係由正源指向負源。

比較以上兩式 (1.218),(1.219) 後，核函數有如下關係

$$L(x, s) = -U^*(x, s) \quad (1.22)$$

$$M(x, s) = -T^*(x, s) \quad (1.23)$$

使用對稱關係

$$U(x, s) = U(s, x) = -\ln(r) \quad (1.24)$$

根據式 (1.218), (1.219)  $L, M$  核函數之定義，可導得如下關係

$$L(x, s) = \frac{\partial U(x, s)}{\partial n_s} = \frac{\partial U(s, x)}{\partial n_s} = T(s, x) = -U^*(x, s) \quad (1.25)$$

$$M(x, s) = \frac{\partial T(x, s)}{\partial n_s} = -\frac{\partial U^*(s, x)}{\partial n_s} = -T^*(s, x) \quad (1.26)$$

為了比較方便，將  $x, s$  調換，可得域內點對偶邊界積分式

$$2\pi\phi(x) = \int_B U(s, x) \frac{\partial\phi(s)}{\partial n_s} dB(s) - \int_B T(s, x)\phi(s)dB(s) \quad (1.27)$$

$$2\pi \frac{\partial\phi(x)}{\partial n_x} = \int_B L(s, x) \frac{\partial\phi(s)}{\partial n_s} dB(s) - \int_B M(s, x)\phi(s)dB(s) \quad (1.28)$$

其中

$$U(s, x) = -\ln(r) \quad (1.29)$$

$$T(s, x) = \frac{\partial U(s, x)}{\partial n_s} \quad (1.30)$$

$$L(s, x) = \frac{\partial U(s, x)}{\partial n_x} \quad (1.31)$$

$$M(s, x) = \frac{\partial^2 U(s, x)}{\partial n_x \partial n_s} \quad (1.32)$$

值得一提的是，此處二維基本解為  $-\ln(r)$ ，和第三章的定義差個負號，請參閱下表。

綜整以上結果後，核函數有如下關係

$$U(s, x) = U(x, s) \quad (1.33)$$

$$T(s, x) = -U^*(x, s) = L(x, s) \quad (1.34)$$

$$L(s, x) = T(x, s) = -U^*(s, x) \quad (1.35)$$

$$M(s, x) = -T^*(x, s) = M(x, s) = -T^*(s, x) \quad (1.36)$$

其中， $U(s, x)$  式表示在  $s$  處的奇異源所構成的  $x$  處的勢位，等於在  $x$  處的奇異源所構成的  $s$  處的勢位。 $M(s, x)$  式表示在  $s$  處的奇異偶極  $n(s)$  方向源所構成的  $x$  處的勢位  $n(x)$  方向導微，等於在  $x$  處的奇異偶極  $n(x)$  方向源所構成的  $s$  處的勢位  $n(s)$  方向導微。

由於以上八個核函數之間有關係，真正不同的有三個，即間接法的  $U(x, s), U^*(x, s)$  和  $T^*(x, s)$  及直接法的  $U(s, x), T(s, x)$  和  $M(s, x)$ 。這三個核函數為勢論中最主要的三個。這種對稱與轉置對稱的現象在 Stroh 的推導式中亦有此架構，可參閱吳光鐘教授之論文。可惜的是 Stroh 無法應用在三維問題，但本書的對偶積分式的三維核函數仍有此對稱與轉置對稱的現象存在。

參考上述核函數表，將直接法的核函數換成間接法的核函數，則域內點對偶邊界積分式可寫成

$$2\pi\phi(x) = \int_B U(x, s) \frac{\partial\phi(s)}{\partial n_s} dB(s) + \int_B U^*(x, s)\phi(s)dB(s) \quad (1.37)$$

$$2\pi \frac{\partial \phi(x)}{\partial n_x} = \int_B T(x, s) \frac{\partial \phi(s)}{\partial n_s} dB(s) + \int_B T^*(x, s) \phi(s) dB(s) \quad (1.38)$$

上式可解釋成所有的單層與雙層奇異源對場量的全部疊加影響。以上均是利用無限域的基本解所導得的有限域問題的積分方程式。以下擬推廣到半平面問題的應用。以下奇異源將有兩套，一為原來奇異源、另一為映像奇異源。

#### 含映像奇異源的兩個系統

參考上圖，若選取含映像奇異源為基本奇異系統，由格林第三定理可得

$$2\pi \phi(s) = \int_B U(x; s, s') \frac{\partial \phi(x)}{\partial n_x} dB(x) - \int_B T(x; s, s') \phi(x) dB(x) \quad (1.39)$$

對上式  $\phi(s)$  場作法向導微，可得

$$2\pi \frac{\partial \phi(s)}{\partial n_s} = \int_B L(x; s, s') \frac{\partial \phi(x)}{\partial n_x} dB(x) - \int_B M(x; s, s') \phi(x) dB(x) \quad (1.40)$$

#### 含映像偶極奇異源的配置系統

參考上圖，若選取含奇異偶極源為基本奇異系統，且含原奇異偶極源方向  $\mathbf{n}(s)$  和映像奇異偶極源方向  $\mathbf{n}(s')$  時，考慮上圖之半平面問題，則積分方程可列出如下

$$-2\pi \frac{\partial \phi(s)}{\partial n_s} = \int_B U^*(x; s, s') \frac{\partial \phi(x)}{\partial n_x} dB(x) - \int_B T^*(x; s, s') \phi(x) dB(x) \quad (1.41)$$

比較以上兩式 (1.238), (1.239) , 可得如下推論

$$L(x; s, s') = -U^*(x; s, s') \quad (1.42)$$

$$M(x; s, s') = -T^*(x; s, s') \quad (1.43)$$

從式 (1.238) 可看出  $L(x; s, s')$  核函數是由式 (1.237) 作  $n(s)$  的法向微分而來, 是與  $\mathbf{n}(s)$  有關。而  $U^*(x; s, s')$  則和  $\mathbf{n}(s)$  和  $\mathbf{n}(s')$  有關, 但為何會相等呢? 原因是  $s'$  也是  $s$  的函數。從這個觀點來看,  $U^*(x; s, s')$  核函數具有較大的彈性。因此在  $U^*(x; s, s')$  中必存在  $\mathbf{n}(s')$  使得此兩核函數相同。

為驗證此說法, 今參考前圖之映像奇異源配置方式, 吾人可得勢位場為

$$U(x; s, s') = -\ln(r) + \ln(R) \quad (1.44)$$

此時, 在  $x_2 = 0$  的勢位為 0 , 亦即

$$U(x; s, s') = 0 \quad (1.45)$$

根據  $L(x; s, s')$  的定義, 可得

$$L(x; s, s') = \frac{\partial U(x; s, s')}{\partial n_s} = \frac{y_i n_i}{r^2} - \frac{y'_1 n_1}{R^2} + \frac{y'_2 n_2}{R^2} \quad (1.46)$$

參考上圖, 若取映像奇異源配置方向為

$$n'_1 = -n_1, \quad n'_2 = n_2 \quad (1.47)$$

因此

$$U^*(x; s, s') = \frac{-y_i n_i}{r^2} + \frac{-y'_i n'_i}{R^2} = \frac{-y_i n_i}{r^2} + \frac{y_1 n_1}{R^2} + \frac{y_2 n_2}{R^2} = -L(x; s, s') \quad (1.48)$$

其中,  $\mathbf{n}(s) = (n_1, n_2)$ ,  $\mathbf{n}(s') = (n'_1, n'_2)$ ,  $y_i = x_i - s_i$ ,  $y'_i = x_i - s'_i$ 。以上結果滿足上述的推論, 亦即適當的  $n(s')$  已找到了。上式激發了  $n(s')$  的選法有很大的彈性, 以便滿足邊界條件。以下以此看法來探討傳統的兩種映像法。

取具如下邊界條件, 在  $x_2 = 0$  處,  $U^*(x; s, s') = 0$ , 則  $n(s')$  有兩種選擇可滿足邊界條件, 如下兩式

$$\phi_1 = \pi - \theta, \quad \phi_2 = 2 \tan^{-1}(y_1/y_2) + \theta \quad (1.49)$$

---

### 映像偶極方向的選擇

---

另取具如下邊界條件，在  $x_2 = 0$  處， $T^*(x; s, s') = 0$ ，其中  $n(s')$  有兩種選擇可滿足邊界條件，如下式

$$\phi_1 = -\theta, \quad \phi_2 = -2 \tan^{-1}(y_2/y_1) + \theta \quad (1.50)$$

---

### 映像偶極方向的選擇

---

映像偶極奇異系統的第一種選法取  $\phi_1$  即為 Greenberg 或 Stakgold 書中的方法，這種

邊界積分就可省去半無限平面上的線積分。映像系統的第二種選法取  $\phi_2$  為為改變偶極的方向，其為  $x_1$  和  $x_2$  的函數。此表示此奇異系統並不固定，而是隨  $x_1$  和  $x_2$  而變，以滿足場在  $(x_1, x_2)$  的邊界條件，因此不可拿此當成功能互換的固定奇異系統。若從數學的角度而言，第二種選法在 Laplace 運算元作用上去時會使得原先定義域內僅含點源的場變成全場具有微體源，則將多出體積分。因此在滿足邊界條件的同時，也不能導致體積分的額外產生。因此第一個選法可省去半平面上的線積分，第二個選法除非偶極方向非  $x$  的函數，否則無法導得有效的邊界積分式。因此於拼湊奇異源求基本解時，除了靠物理意義的想像來湊合外，亦需通過數學嚴謹的驗證。

為配合全域基本解的 BEPO2D 程式對照，對偶積分式改寫成

$$2\pi\phi(x) = \int_B U(s; x, x') \frac{\partial\phi(s)}{\partial n_s} dB(s) - \int_B T(s; x, x') \phi(s) dB(s) \quad (1.51)$$

$$2\pi \frac{\partial\phi(x)}{\partial n_x} = \int_B L(s; x, x') \frac{\partial\phi(s)}{\partial n_s} dB(s) - \int_B M(s; x, x') \phi(s) dB(s) \quad (1.52)$$

以便在 BEPO2D 程式的修改。說明如下

引入虛擬邊界  $B'$  後，可得

$$\begin{bmatrix} U_{nn} & U_{nn'} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_n \\ t_{n'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{T}_{nn} & T_{nn'} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_n \\ u_{n'} \end{Bmatrix} \quad (1.53)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{L}_{nn} & L_{nn'} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_n \\ t_{n'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{nn} & M_{nn'} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_n \\ u_{n'} \end{Bmatrix} \quad (1.54)$$

其中，' 表示定義在映像邊界上的量。

因為

$$u_n = u_{n'}, \quad t_n = t_{n'} \quad (1.55)$$

使用濃縮技巧，可得

$$(U_{nn} + U_{nn'})\{t_n\} = (\bar{T}_{nn} + T_{nn'})\{u_n\} \quad (1.56)$$

$$(\bar{L}_{nn} + L_{nn'})\{t_n\} = (M_{nn} + M_{nn'})\{u_n\} \quad (1.57)$$

需注意的是半平面之自由面邊界條件改變時，映像邊界法向量需配合改變，以便  $T_{nn'}$  和  $M_{nn'}$  之計算。

\*\*\*\*\*

習題: 試修改本書所附 BEPO2D 程式, 使其能解半平面問題?

\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*

習題: 參考下圖, 試解析如下半平面問題?

控制方程

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad x \text{ in half plane} \tag{1.58}$$

邊界條件

$$\frac{\partial \phi(x)}{\partial n_x} = 0, \quad \text{for } x_2 = 0 \tag{1.59}$$

$$\frac{\partial \phi(x)}{\partial n_x} = 0, \quad \text{for } x \text{ on } C^+, C^- \tag{1.60}$$

在無限遠處流速為  $v = (V_\infty, 0)$ 。

\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*

習題: 試證明如下兩個半平面問題解的積分表示式

控制方程  $\nabla^2 \phi(x) = 0, \quad x \text{ in half plane}$

邊界條件  $\phi(x) = f(x), \quad x \text{ on half line}$

解的積分表示式為

$$\phi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2y}{(s-x)^2 + y^2} f(s) ds$$

邊界條件  $\nabla^2 \phi(x) = 0, \quad x \text{ in half plane}$

控制方程  $\frac{\partial \phi(x)}{\partial n(x)} = h(x), \quad x \text{ on half line}$

解的積分表示式為

$$\phi(x, y) = \frac{-1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln[(s-x)^2 + y^2] h(s) ds$$

\*\*\*\*\*

## 1.14 本書與Günter 書符號比較

有關勢論的書很多，詳見後面文獻，這裡，特別介紹蘇俄 *Günter* 所著一書，並將其符號做一對照，以利讀者參考。

---

本書 → *Günter* 書

$$x \rightarrow x, y, z$$

$$s \rightarrow \xi, \eta, \zeta$$

$$r \rightarrow r_{20}$$

$$\phi \rightarrow \mu$$

$$\psi \rightarrow \mu$$

$$n(s) \rightarrow N_2$$

$$n(x) = \bar{n} \rightarrow N_0$$

$$y_i \rightarrow -r_{20}$$

$$-y_i n_i / r \rightarrow \cos(r_{20}, N_2)$$

$$T(s, x) \rightarrow \frac{\cos(r_{20}, N_2)}{r_{20}^2}$$

$$L(s, x) \rightarrow \frac{\cos(r_{20}, N_0)}{r_{20}^2}$$


---

---

## 1.15 結語

以上已就邊界元素法相關數學理論進行闡釋，然欲將此套應用在工程上，則需將積分方程數值處理，並轉化成代數方程，再求解邊界未知量與所需域內物理量。這些將在下一章說明，由於本章是以邊界元素法相關數學理論為基礎，加以陳述，讀者在看以下 § 3 與 § 4 應用章節時，可對照參考之。

————— 海大河工研究所陳正宗 對偶邊界元素法 —————

【存檔：e:/dualbem/dbem1-2.te】【建檔：Sep./2/'2006】



Table 1: The explicit form of kernel functions

Kernel function Direct method	$U(s, x)$ symmetric	$T(s, x)$ $T(s, x) = L(x, s)$	$L(s, x)$ $L(s, x) = T(x, s)$	$M(s, x)$ symmetric
Kernel function Indirect Method	$U(x, s)$ symmetric	$-U^*(x, s)$	$T(x, s)$	$-T^*(x, s)$ symmetric
Order of Singularity	weak	strong	strong	hypersingular
Two dimensional case	$-\ln(r)$	$y_i n_i / r^2$	$-y_i \bar{n}_i / r^2$	$-2y_i y_j n_i \bar{n}_j / r^4$ $+n_i \bar{n}_i / r^2$
Three dimensional case	$1/r$	$y_i n_i / r^3$	$-y_i \bar{n}_i / r^3$	$-3y_i y_j n_i \bar{n}_j / r^5$ $+n_i \bar{n}_i / r^3$
Remark	$r^2 = y_i y_i$	$n_i = n_i(s)$	$\bar{n}_i = n_i(x)$	$y_i = x_i - s_i$

圖 1.1 Laplace 方程式問題示意圖

本題解析解如下：

$$u = xy \quad (1.5)$$

以下擬以三種數值法（有限差分法、有限元素法與邊界元素法）來求解，分別說明如下：

解法 1：有限差分法

吾人可將微分式以差分關係表成下式：

$$\frac{\partial u^+}{\partial x} \Big|_{(x,y)} = \frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h} \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial u^-}{\partial x} \Big|_{(x,y)} = \frac{u(x, y) - u(x-h, y)}{h} \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial u^+}{\partial y} \Big|_{(x,y)} = \frac{u(x, y+h) - u(x, y)}{h} \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial u^-}{\partial y} \Big|_{(x,y)} = \frac{u(x, y) - u(x, y-h)}{h} \quad (1.9)$$

上式中， $h$  表示  $x$  及  $y$  方向之增量。

同理可推廣到二次偏微時，可得

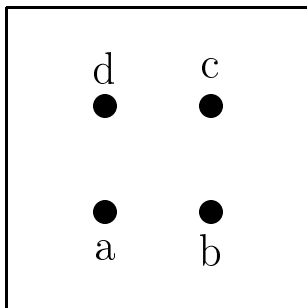
$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{-2u(x, y) + u(x+h, y) + u(x-h, y)}{h^2} \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{-2u(x, y) + u(x, y+h) + u(x, y-h)}{h^2} \quad (1.11)$$

因此原控制方程式 (1.1)，可以差分形式表示如下：

$$\frac{u(x+h, y) + u(x-h, y) + u(x, y+h) + u(x, y-h) - 4u(x, y)}{h^2} = 0 \quad (1.12)$$

將上式差分式應用到下圖所示之  $a, b, c$  與  $d$  四點可得



$$4u_1 - u_2 - u_4 = v_1 + v_8 = w_1, \text{ for a point}$$

$$-u_1 + 4u_2 - u_3 = v_2 + v_3 = w_2, \text{ for a point}$$

$$-u_2 + 4u_3 - u_4 = v_4 + v_5 = w_3, \text{ for a point}$$

$$-u_1 - u_3 + 4u_4 = v_6 + v_7 = w_4, \text{ for a point}$$

其中， $v_i, i = 1, 8$  為邊界已知量。而未知量： $u_1, u_2, u_3$  與  $u_4$  為定義在  $a, b, c$  與  $d$  點的  $u$  值。

已知量：由邊界條件可知

$$w_1 = 0, \quad w_2 = 1/3, \quad w_3 = 4/3, \quad w_4 = 1/3 \quad (1.13)$$

因此可寫成如下矩陣形式

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix}$$

可解得

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = 1/24 \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix}$$

代入  $w_1, w_2, w_3$  與  $w_4$  後，可求得

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{4}{9} \\ \frac{2}{9} \end{bmatrix}$$

恰為正解。

解法 2. 有限元素法

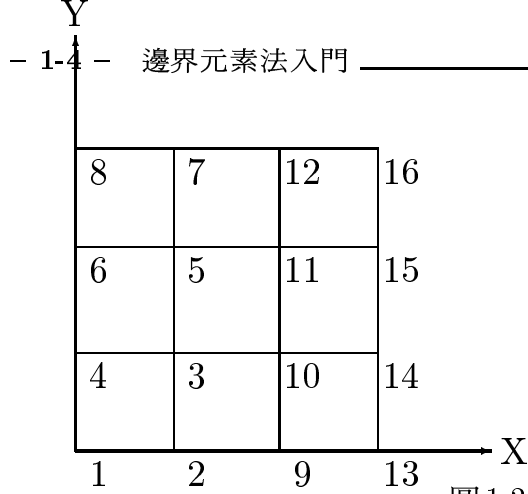


圖 1.2 有限元素法網目圖

如上圖 1.2 所示，本題採用之元素為線性四邊形元素，則其元素勁度矩陣  $K^e$  (Element Stiffness Matrix) 可由變分原理推導得，推導過程如下

$$\delta \int \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\} dA = 0 \quad (1.14)$$

其中， $\delta$  為變分符號。再將  $u$  表示成

$$u = \sum_{i=1}^4 N_i(x, y) u_i \quad (1.15)$$

其中， $u_i$  為節點物理量， $N_i(x, y)$  為內插函數，可表示如下

$$N_1(x, y) = (a - x)(b - y)/ab$$

$$N_2(x, y) = (x)(b - y)/ab$$

$$N_3(x, y) = (x)(y)/ab$$

$$N_4(x, y) = (a - x)(y)/ab$$

其中， $a$  與  $b$  分別表示元素的長與寬。

將 (1.15) 式代入 (1.14) 式，並對  $u_i$  作變分，可得

$$\frac{\partial}{\partial u_i} \left\{ \int_A \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \sum_{i=1}^4 N_i(x, y) u_i \right) \right)^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left( \sum_{i=1}^4 N_i(x, y) u_i \right) \right\} dx dy = 0 \quad (1.16)$$

可整理得

$$K_{pq}^e u_q = 0 \quad (1.17)$$

其中

$$K_{pq}^e = \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial N_p}{\partial x} \frac{\partial N_q}{\partial x} + \frac{\partial N_p}{\partial y} \frac{\partial N_q}{\partial y} \right) dx dy \quad (1.18)$$

將  $a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{3}$  代入，則可積分得  $K_{pq}^e$  如下

$$[K_{pq}^e] = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

求得以上元素勁度矩陣後，大域勁度矩陣  $K^g$  (Global Stiffness Matrix) 可由九個元素勁度矩陣組合如下:

$$\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 8 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & & & & & \\ -2 & -2 & 16 & -2 & -2 & -2 & 0 & 0 & -2 & -2 & -2 & & & & \\ -1 & -2 & -2 & 8 & -2 & -1 & & & & & & & & & \\ & & -2 & -2 & 16 & -2 & -2 & -2 & 0 & -2 & -2 & -2 & & & \\ & & -2 & -1 & -2 & 8 & -2 & -1 & & & & & & & \\ & & & -2 & -2 & 8 & -1 & 0 & 0 & -2 & -1 & & & & \\ & & & -2 & -1 & -1 & 4 & & & & & & & & \\ -1 & -2 & & & & & & & 8 & -2 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & & -2 & & & & & -2 & 16 & -2 & 0 & -2 & -2 & -2 & \\ & -2 & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2 & 16 & -2 & 0 & -2 & -2 & -2 & \\ & & & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 8 & 0 & 0 & -2 & -1 & \\ & & & & & & & & -1 & -2 & 0 & 0 & 4 & -1 & & \\ & & & & & & & & -2 & -2 & -2 & 0 & -1 & 8 & -1 & \\ & & & & & & & & & -2 & -2 & -2 & 0 & -1 & 8 & -1 \\ & & & & & & & & & & -2 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

代入邊界條件後，可得

$$\begin{aligned} 16p - 2q - 2r - 2s &= 0 \\ -2p + 16q - 2/3 - 2r - 2s - 4/3 &= 0 \\ -2p - 2q + 16r - 2s - 2 &= 0 \\ -2p - 2q - 2r + 16s &= 6 \end{aligned}$$

寫成矩陣形式如下

$$\begin{bmatrix} 8 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

可解得

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{4}{9} \end{bmatrix}$$

恰為正解。

以上兩種解法較為讀者熟悉，接著將以兩種邊界元素法解之。若讀者對邊界元素法尚未有初步概念時，可先行流覽本例題，待全書閱過後，再回來品嚐一番!

解法 3. ~~邊界元素法~~ <sup>第三段</sup>直接法第一類， $U, T$  核函數法)

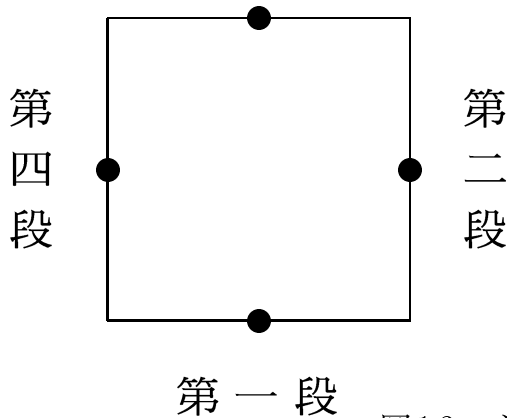


圖 1.3 邊界元素網目圖 ( $U, T$  核函數法)

由邊界元素法的直接法第一類，可導得如下域內積分方程式：

$$2\pi u(x) = \int_B T(s, x)u(s)dB(s) - \int_B U(s, x)\frac{\partial u(s)}{\partial n_s}dB(s), \quad x \in D \quad (1.19)$$

$$2\pi \frac{\partial u(x)}{\partial n_x} = \int_B M(s, x)u(s)dB(s) - \int_B L(s, x)\frac{\partial u(s)}{\partial n_s}dB(s), \quad x \in D \quad (1.20)$$

其中， $x$  在問題之定義域域  $D$  內，而  $s$  表邊界積分變數。而  $U, T, L$  與  $M$  四個二維核函數分別為：

$$U(s, x) = \ln(r) \quad (1.21)$$

$$T(s, x) = \frac{\partial U(s, x)}{\partial n_s} \quad (1.22)$$

$$L(s, x) = \frac{\partial U(s, x)}{\partial n_x} \quad (1.23)$$

$$M(s, x) = \frac{\partial^2 U(s, x)}{\partial n_x \partial n_s} \quad (1.24)$$

其中， $r = |x - s|$ ， $n(s)$  與  $n(x)$  分別表示在  $s$  與  $x$  的邊界法向量。若將  $x$  逼近邊界後，可得邊界積分方程式：

$$\alpha u(x) = C.P.V. \int_B T(s, x)u(s)dB(s) - R.P.V. \int_B U(s, x)\frac{\partial u(s)}{\partial n_s}dB(s), \quad x \in B$$

$$\alpha \frac{\partial u(x)}{\partial n_x} = H.P.V. \int_B M(s, x)u(s)dB(s) - C.P.V. \int_B L(s, x)\frac{\partial u(s)}{\partial n_s}dB(s), \quad x \in B$$

其中， $x$  在邊界， $\alpha$  為邊界體角 (Solid Angle)， $H.P.V.$ 、 $C.P.V.$ 、 $R.P.V.$  分別表示阿達馬主值、柯西主值與黎曼主值。(請參考 § 1.10 節)。上式表明了邊界物理量  $u(s)$  與  $\frac{\partial u(s)}{\partial n_s}$  的束制關係。

本小節之解法 3 即使用  $U(s, x)$  與  $T(s, x)$  核函數來求解，而下一小節之解法 4，則以  $L(s, x)$  與  $M(s, x)$  核函數來解。

於本問題，若取四個常數元素，則  $\alpha = \pi$ ， $u_1 = u_4 = 0$ ， $u_2 = u_3 = 0.5$ ，邊界積分式可寫成邊界物理量之代數方程式如下

$$[\bar{T}]\{u\} = [U]\{t\} \tag{1.25}$$

其中， $u$  為已知邊界量如下

$$\{u\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

未知邊界量  $t$  為

$$\{t\} = \left\{ \frac{\partial u}{\partial n} \right\} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{bmatrix}$$

上式中

$$U_{ij} = R.P.V. \int_{B_j} U(s_j, x_i)dB(s_j) \tag{1.26}$$

$$\bar{T}_{ij} = -\pi\delta_{ij} + C.P.V. \int_{B_j} T(s_j, x_i)dB(s_j) = -\pi\delta_{ij} + T_{ij} \tag{1.27}$$

其中， $\delta_{ij}$  為 Kronecker delta，列式如下

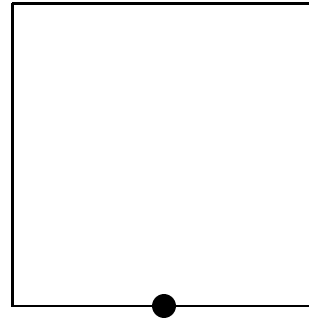
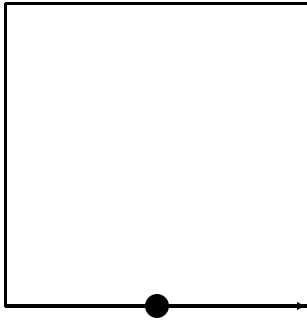
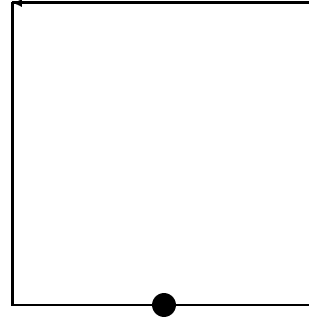
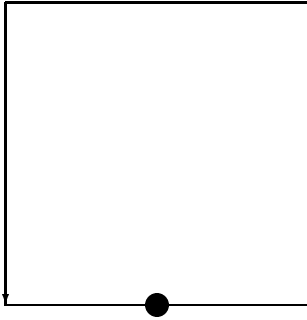
$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } i = j, \\ 0, & \text{if } i \neq j, \end{cases}$$

求  $[U]$  與  $[\bar{T}]$  矩陣步驟如下：

若使用常數元素，則可計算  $\bar{T}_{ij}$  如下：

● 配置點

↑ 積分元素



I. 求  $[\bar{T}]$  矩陣

當  $x$  在 \*1 點時， $dB(s)$  在第一段時，

$$\bar{T}_{11} = \int T(s, x)dB(s) - \pi = \int \frac{1}{r} \nabla r \cdot n_s ds - \pi = -\pi \quad (1.28)$$

於此情形，因為  $\nabla r \perp n_s$ ，所以  $\nabla r \cdot n_s = 0$ ，故原式  $\bar{T}_{11} = -\pi$

當  $x$  在 \*1 點時， $dB(s)$  在第二段時，則  $(x_1, x_2) = (0.5, 0)$ ， $(s_1, s_2) = (1.0, s_2)$



其中， $s_2$  為積分變數。

$$y_1 = x_1 - s_1 = -0.5$$

$$y_2 = x_2 - s_2 = -s_2$$

$$n(s) = (n_1, n_2) = (1.0, 0)$$

$$\bar{T}_{12} = \int T(s, x)dB(s) = \int_0^1 \frac{-y_1}{0.5^2 + s_2^2} ds_2 = \tan^{-1}(2) \quad (1.29)$$

當  $x$  在 \*1 點時， $dB(s)$  在第三段時，則  $(x_1, x_2) = (0.5, 0)$ ， $(s_1, s_2) = (s_1, 1)$

$$y_1 = x_1 - s_1 = 0.5 - s_1$$

$$y_2 = x_2 - s_2 = -1.0$$

$$n(s) = (n_1, n_2) = (0, 1.0)$$

$$\bar{T}_{13} = \int T(s, x)dB(s) = \int_0^1 \frac{-y_2}{1^2 + (0.5 - s_1)^2} ds_1 = 2 \tan^{-1}(1/2) \quad (1.30)$$

當  $x$  在 \*1 點時， $dB(s)$  在第四段時，則  $(x_1, x_2) = (0.5, 0)$ ， $(s_1, s_2) = (0, s_2)$

$$y_1 = x_1 - s_1 = 0.5$$

$$y_2 = x_2 - s_2 = -s_2$$

$$n(s) = (n_1, n_2) = (-1.0, 0.)$$

$$\bar{T}_{14} = \int T(s, x)dB(s) = \int_0^1 \frac{y_1}{0.5^2 + s_2^2} ds_2 = \tan^{-1}(2) \quad (1.31)$$

再利用同樣道理，把  $x$  擺在 \*2, \*3, \*4 點上，可求得  $\bar{T}_{ij}$  如下：

$$[\bar{T}] = \begin{bmatrix} -\pi & \tan^{-1}(2) & 2\tan^{-1}(0.5) & \tan^{-1}(2) \\ \tan^{-1}(2) & -\pi & \tan^{-1}(2) & 2\tan^{-1}(0.5) \\ 2\tan^{-1}(0.5) & \tan^{-1}(2) & -\pi & \tan^{-1}(2) \\ \tan^{-1}(2) & 2\tan^{-1}(0.5) & \tan^{-1}(2) & -\pi \end{bmatrix}$$

巧合  $[\bar{T}]$  矩陣為循環對稱（註：一般邊界元素法導得之矩陣並不對稱），可由積分式看出（於此例中，只要求出第一列（row），其他即可由積分式看出）。

II. 求  $[U]$  矩陣：

當  $x$  在 \*1 點時， $dB(s)$  在第一段時，則  $(x_1, x_2) = (0.5, 0)$ ， $(s_1, s_2) = (s_1, 0)$

$$y_1 = x_1 - s_1 = 0.5 - s_1$$

$$y_2 = x_2 - s_2 = 0$$

$$U_{11} = \int U(s, x)dB(s) = \int_0^1 0.5 \ln((s_1 - 0.5)^2 + 0^2) ds_1 = -\ln(2) - 1.0 = -1.693 \quad (1.32)$$

當  $x$  在 \*1 點時， $dB(s)$  在第二段時， $(x_1, x_2) = (0.5, 0)$ ， $(s_1, s_2) = (1.0, s_2)$

$$y_1 = x_1 - s_1 = -0.5$$

$$y_2 = x_2 - s_2 = -s_2$$

$$\begin{aligned} U_{12} &= \int U(s, x)dB(s) = \int_0^1 0.5\ln((s_2)^2 + 0.5^2)ds_2 \\ &= 0.5(\ln(5/4) - 2.0 + \tan^{-1}(2)) = -0.335 \end{aligned} \quad (1.33)$$

當  $x$  在 \*1 點時， $dB(s)$  在第三段時，則  $(x_1, x_2) = (0.5, 0)$ ， $(s_1, s_2) = (s_1, 1)$

$$y_1 = x_1 - s_1 = 0.5 - s_1$$

$$y_2 = x_2 - s_2 = -1.0$$

$$\begin{aligned} U_{13} &= \int U(s, x)dB(s) = \int_0^1 0.5\ln((s_1 - 0.5)^2 + 1^2)ds_1 \\ &= 0.5(\ln(5/4) - 2.0 + 4 \tan^{-1}(0.5)) = 0.039 \end{aligned} \quad (1.34)$$

當  $x$  在 \*1 點時， $dB(s)$  在第四段時，則  $(x_1, x_2) = (0.5, 0)$ ， $(s_1, s_2) = (0, s_2)$

$$y_1 = x_1 - s_1 = 0.5$$

$$y_2 = x_2 - s_2 = -s_2$$

$$\begin{aligned} U_{14} &= \int U(s, x)dB(s) = \int_0^1 0.5\ln(s_2^2 + 0.5^2)ds_2 \\ &= 0.5(\ln(5/4) - 2.0 + \tan^{-1}(2)) = -0.335 \end{aligned} \quad (1.35)$$

再利用同樣道理，把  $x$  擺在 \*2, \*3, \*4 點上，可求得其他的  $U_{ij}$  如下：

$$[U] = \begin{bmatrix} -1.693 & -0.335 & 0.039 & -0.335 \\ -0.335 & -1.693 & -0.335 & 0.039 \\ 0.039 & -0.335 & -1.693 & -0.335 \\ -0.335 & 0.039 & -0.335 & -1.693 \end{bmatrix}$$

巧合  $[U]$  矩陣為循環對稱（註：一般邊界元素法導得之矩陣不對稱！），可由積分式看出（於此例中，只要求出第一列（row），其他即可由積分式看出）。

將已知之邊界條件

$$\{u\} = \begin{bmatrix} 0. \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0. \end{bmatrix} \quad (1.36)$$

代入

$$[\bar{T}]\{u\} = [U]\{t\}$$

可解未知量如下:

$$\{t\} = \left\{ \frac{\partial u}{\partial n} \right\} = \begin{bmatrix} -0.58 \\ 0.58 \\ 0.58 \\ -0.58 \end{bmatrix} \quad (1.37)$$

而正解如下

$$\{t\} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix} \quad (1.38)$$

誤差 16 % ( 此誤差是由於邊界未知量以常數元素逼近雙線性元素  $u = xy$  所造成 )

解法 4. 邊界元素法 ( 直接法第二類  $L, M$  核函數法 )

此法係由邊界元素直接法第二類  $L, M$  核函數法而來，可導得如下域內積分方程式:

$$2\pi \frac{\partial u(x)}{\partial n_x} = \int_B M(s, x) u(s) dB(s) - \int_B L(s, x) \frac{\partial u(s)}{\partial n_s} dB(s), \quad x \in D \quad (1.39)$$

將  $x$  逼到邊界時，其邊界積分方程式如下:

$$\alpha \frac{\partial u(x)}{\partial n_x} = H.P.V. \int_B M(s, x) u(s) dB(s) - C.P.V. \int_B L(s, x) \frac{\partial u(s)}{\partial n_s} dB(s), \quad x \in B \quad (1.40)$$

其中  $\alpha$  為邊界體角 (Solid angle)，平滑曲線時  $\alpha = \pi$ ， $C.P.V.$ ,  $H.P.V.$  分別代表柯西主值與阿達馬主值 ( 請參考 § 1.10 節 )。於本問題，取四個常數邊界元素時，可將積分式轉為邊界未知量的代數方程式如下

$$[\bar{L}]\{t\} = [M]\{u\} \quad (1.41)$$

其中，已知邊界量如下

$$\{u\} = \begin{bmatrix} 0. \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0. \end{bmatrix} \quad (1.42)$$

未知邊界量如下

$$\{t\} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{bmatrix} \quad (1.43)$$

$[\bar{L}]$  與  $[M]$  矩陣之計算如下

$$\bar{L}_{ij} = \pi\delta_{ij} + C.P.V. \int L(s_j, x_i)dB(s_j) \quad (1.44)$$

$$M_{ij} = H.P.V. \int M(s_j, x_i)dB(s_j) \quad (1.45)$$

求解  $[\bar{L}]$  與  $[M]$  矩陣步驟如下:

I.  $[\bar{L}]$  矩陣

當  $x$  在 \*1 點時， $dB(s)$  在第一段時，

$$\bar{L}_{11} = \int L(s, x)dB(s) + \pi = \int \frac{1}{r} \nabla r \cdot n_x ds + \pi = \pi \quad (1.46)$$

於此情形，因為  $\nabla r \perp n_x$ ，所以  $\nabla r \cdot n_x = 0$ ，故原式  $D_{11} = \pi$ 。

當  $x$  在 \*1 點時， $dB(s)$  在第二段時，則  $(x_1, x_2) = (0.5, 0)$ ， $(s_1, s_2) = (1.0, s_2)$

$$y_1 = x_1 - s_1 = -0.5$$

$$y_2 = x_2 - s_2 = -s_2$$

$$n(x) = (\bar{n}_1, \bar{n}_2) = (0., -1.)$$

$$\bar{L}_{12} = \int L(s, x)dB(s) = \int_0^1 \frac{-y_2}{0.5^2 + s_2^2} ds_2 = 0.5 \ln(5) \quad (1.47)$$

當  $x$  在 \*1 點時， $dB(s)$  在第三段時，則  $(x_1, x_2) = (0.5, 0)$ ， $(s_1, s_2) = (s_1, 1.0)$

$$y_1 = x_1 - s_1 = 0.5 - s_1$$

$$y_2 = x_2 - s_2 = -1.0$$

$$n(x) = (\bar{n}_1, \bar{n}_2) = (0., -1.)$$

$$\bar{L}_{13} = \int L(s, x)dB(s) = \int_0^1 \frac{-y_2}{1^2 + (0.5 - s_1)^2} ds_1 = 2 \tan^{-1}(1/2) \quad (1.48)$$

當  $x$  在 \*1 點時， $dB(s)$  在第四段時，則  $(x_1, x_2) = (0.5, 0)$ ， $(s_1, s_2) = (0, s_2)$

$$y_1 = x_1 - s_1 = 0.5$$

$$y_2 = x_2 - s_2 = -s_2$$

$$n(x) = (\bar{n}_1, \bar{n}_2) = (0., -1.)$$

$$D_{14} = \int L(s, x)dB(s) = \int_0^1 \frac{-y_2}{0.5^2 + s_2^2} ds_2 = 0.5 \ln(5) \quad (1.49)$$

再利用同樣道理，把  $x$  擺在 \*2, \*3, \*4 點上，可得其他的  $\bar{L}_{ij}$  如下:

$$[\bar{L}] = \begin{bmatrix} \pi & 0.5\ln(5) & 2\tan^{-1}(0.5) & 0.5\ln(5) \\ 0.5\ln(5) & \pi & 0.5\ln(5) & 2\tan^{-1}(0.5) \\ 2\tan^{-1}(0.5) & 0.5\ln(5) & \pi & 0.5\ln(5) \\ 0.5\ln(5) & 2\tan^{-1}(0.5) & 0.5\ln(5) & \pi \end{bmatrix}$$

於此例中，只要求出第一列 (row)，其他即可由一些特性知，此循環對稱性僅為特例而已。

II.  $[M]$  矩陣

當  $x$  在 \*1 點時， $dB(s)$  在第一段時，則  $(x_1, x_2) = (0.5, 0)$ ,  $(s_1, s_2) = (s_1, 0.)$

$$y_1 = x_1 - s_1 = 0.5 - s_1$$

$$y_2 = x_2 - s_2 = 0.$$

$$n(s) = (n_1, n_2) = (0., -1.)$$

$$n(x) = (\bar{n}_1, \bar{n}_2) = (0., -1.)$$

$$M_{11} = \int M(s, x)dB(s) = \int \frac{1}{r^2}ds = 4.0 \tag{1.50}$$

當  $x$  在 \*1 點時， $dB(s)$  在第二段時，則  $(x_1, x_2) = (0.5, 0)$ ,  $(s_1, s_2) = (1.0, s_2)$

$$y_1 = x_1 - s_1 = -0.5$$

$$y_2 = x_2 - s_2 = -s_2$$

$$n(s) = (n_1, n_2) = (1, 0)$$

$$n(x) = (\bar{n}_1, \bar{n}_2) = (0., -1.)$$

$$M_{12} = \int M(s, x)dB(s) = -1.6 \tag{1.51}$$

當  $x$  在 \*1 點時， $dB(s)$  在第三段時，則  $(x_1, x_2) = (0.5, 0)$ ,  $(s_1, s_2) = (s_1, 1)$

$$y_1 = x_1 - s_1 = 0.5 - s_1$$

$$y_2 = x_2 - s_2 = -1$$

$$n(s) = (n_1, n_2) = (0, 1)$$

$$n(x) = (\bar{n}_1, \bar{n}_2) = (0., -1.)$$

$$M_{13} = \int M(s, x)dB(s) = -0.80 \tag{1.52}$$

當  $x$  在 \*1 點時， $dB(s)$  在第四段時，則  $(x_1, x_2) = (0.5, 0)$ ,  $(s_1, s_2) = (0, s_2)$

$$y_1 = x_1 - s_1 = 0.5$$

$$y_2 = x_2 - s_2 = -s_2$$

$$n(s) = (n_1, n_2) = (-1.0, 0.)$$

$$n(x) = (\bar{n}_1, \bar{n}_2) = (0., -1.)$$

$$M_{14} = \int M(s, x)dB(s) = -1.6 \tag{1.53}$$

再利用同樣道理，把  $x$  弄在 \*2, \*3, \* 4 點上，可得其他  $M_{ij}$  如下：

$$[M] = \begin{bmatrix} 4.00 & -1.60 & -0.80 & -1.60 \\ -1.60 & 4.00 & -1.60 & -0.80 \\ -0.80 & -1.60 & 4.00 & -1.60 \\ -1.60 & -0.80 & -1.60 & 4.00 \end{bmatrix}$$

巧合  $[M]$  矩陣為循環對稱，可由積分式看出，於此例中，只要求出第一列 (row)，其他即可由一些特性知，此對稱性僅為特例。

將已知

$$\{u\} = \begin{bmatrix} 0. \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0. \end{bmatrix} \quad (1.54)$$

代入

$$[M]\{u\} = [\bar{L}]\{t\}$$

可解未知量如下：

$$\{t\} = \left\{ \frac{\partial u}{\partial n} \right\} = \begin{bmatrix} -0.54 \\ 0.54 \\ 0.54 \\ -0.54 \end{bmatrix} \quad (1.55)$$

正解如下

$$\{t\} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix} \quad (1.56)$$

誤差 8 % ( 此誤差是由於邊界未知量以常數元素逼近雙線性元素  $u = xy$  所造成 )

為驗證以上之手算結果，特以執行 BEPO2D 程式 ( 在第三章會說明，原始程式在附錄 ) 比較之，得數值結果和手算結果相同如下，

$$[\bar{T}] = \begin{bmatrix} -3.14159 & 1.10715 & 0.92730 & 1.10715 \\ 1.10715 & -3.14159 & 1.10715 & 0.92730 \\ 0.92730 & 1.10715 & -3.14159 & 1.10715 \\ 1.10715 & 0.92730 & 1.10715 & -3.14159 \end{bmatrix}$$

$$[U] = \begin{bmatrix} -1.693 & -0.335 & 0.039 & -0.335 \\ -0.335 & -1.693 & -0.335 & 0.039 \\ 0.039 & -0.335 & -1.693 & -0.335 \\ -0.335 & 0.039 & -0.335 & -1.693 \end{bmatrix}$$

$$[\bar{L}] = \begin{bmatrix} 3.14159 & 0.80472 & 0.9273 & 0.80472 \\ 0.80472 & 3.14159 & 0.80472 & 0.92730 \\ 0.92730 & 0.80472 & 3.14159 & 0.80472 \\ 0.80472 & 0.92730 & 0.80472 & 3.14159 \end{bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} 4.00 & -1.60 & -0.80 & -1.60 \\ -1.60 & 4.00 & -1.60 & -0.80 \\ -0.80 & -1.60 & 4.00 & -1.60 \\ -1.60 & -0.80 & -1.60 & 4.00 \end{bmatrix}$$

以上之手算例，乃是配合程式驗證所設計的。

討論:

(1). 在有限元與邊界元所導得之  $[U], [\bar{T}], [\bar{L}], [M]$  與  $[K^g]$  矩陣均滿足所謂剛體運動測試或稱補解測試，亦即

$$\{u\} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1.57}$$

$$\{t\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.58}$$

必為其解，因此可稱  $[U], [\bar{T}], [\bar{L}], [M]$  與  $[K^g]$  矩陣為特性矩陣。所以  $[\bar{T}], [M]$  與  $[K^g]$  矩陣，同一列 (row) 的和需為 0，讀者可驗證之。由以上四種方法之結果可看出，似乎邊界元素法的精度最為差勁，誤差最大。而有限元素法與有限差分法均很準確，且恰為正解。這是個不幸的巧合？因為此問題解析解為  $u = xy$ ，是雙線性函數，而有限元素法以線性元素內插，當然可得正解；但邊界元素法只在邊界上用常數元素模擬當然會有較大的誤差。由此可知數值方法的優劣比較是含蓋多方面的，如誤差大小、元素型態、內插函數的種類、元素個數的多少、輸入出資料的便捷性、CPU 時間、... 等。讀者可嘗試以四個線性邊界元素解之，當可得到正解。

(2). 解法 3 與解法 4 之比較 — 為說明此點，考慮以矩陣  $[U], [\bar{T}], [\bar{L}]$  與  $[M]$  矩條件數 (condition number) 隨元素增多成長的情形來了解，如下表

不同元素個數下  $[U], [\bar{T}], [\bar{L}]$  與  $[M]$  矩陣之條件數比較表

表一：不同核函數矩陣之條件數

矩陣	B	A	D	C
核函數	U	T	L	M
假微分算子階數	1	0	0	-1
元素個數 4	2.36	1.10	2.56	1.33
元素個數 8	4.25	1.91	3.24	2.91
元素個數 16	8.02	2.31	3.90	5.54
元素個數 32	15.8	2.63	4.44	10.9
元素個數 64	31.8	2.90	4.88	21.8

不同元素個數下  $[U]$ ,  $[\bar{T}]$ ,  $[\bar{L}]$  與  $[M]$  矩陣之條件數比較圖

由上表可看出，隨著元素增加， $[U]$  與  $[M]$  矩陣隨著元素數目增加會惡化 (ill conditioned)，因其仿微分算子的階數分別為  $-1$  與  $1$ ，其條件數 (Condition number) 隨著元素數目增加而變很大。此結果更可說明為何 Dirichlet 問題常用間接法的雙層勢能  $T(s, x)$  核函數來求解；而 Neumann 問題常用間接法的單層勢能  $L(s, x)$  的微分之核函數來求解。主要原因乃在於“希望要求反矩陣之矩陣有較好的條件數，使其數值較穩定”。因為  $T$  與  $L$  核函數之仿微分算子的階數均為  $0$ ，數值較穩定。

本節已就 Laplace 方程式為例，並以三種不同的數值方法解之，主要是闡明每種數值方法均有其不同的解題邏輯與理論基礎，而由邊界元素法解法 3,4 所牽涉的數學理論不外乎積分方程、勢論 (Potential Theory)、格林函數、基本解、奇異積分、線性代數、權殘餘法、廣義函數、物理數學、線性代數... 等，將在以下詳述之。



## 1.3 積分方程式

由前節可知，各種數值方法除了有其固定的解題邏輯外，其背後亦存在著對應的數學理論，前者將在下一章數值技巧章中討論，後者則在本章中說明。針對邊界元素法而言，我們應有的體認就是“邊界積分方程的數值方法”，而積分方程最早應用於工程上，應屬勢流場 (Potential Flow)，小板法 (Panel Method) 即是一例，只是未取此名而已，所以邊界元素法與積分方程其實是息息相關的，以下將介紹積分方程式。

### 1.3.1 積分方程式的定義

線性積分方程式 (Linear integral equation) 的基本概念如下

積分方程的定義：

積分方程乃是於積分符號內含有未知函數的方程式，而該未知函數即為吾人所欲求之函數。

考慮積分方程式的標準式如下

$$\int_a^b k(x, y)\phi(y)dy + f(x) = \phi(x) \quad (1.59)$$

其中， $\phi(y)$  為未知函數， $k(x, y)$  為已知系統核函數， $f(x)$  為已知函數， $a$  與  $b$  可為有限值或無限值，上式中，當

- (1)  $f(x) = 0$ ，稱該積分方程式為齊次 (Homogeneous)。
- (2)  $f(x) \neq 0$ ，稱該積分方程式為非齊次 (Nonhomogeneous)。

而稱為齊次的原因如下

若  $f(x) = 0$ ，則積分方程有以下性質

$$\int_a^b k(px, y)\phi(y)dy + f(x) = \phi(px) \quad (1.60)$$

若  $f(x) \neq 0$ ，則上式積分方程不一定成立。這個道理是和齊次微分方程相同的。

### 1.3.2 積分方程式的分類

數學家將積分方程一般分為以下幾種：

- (1) Fredholm 方程式 (Fredholm Equation)：

第一類  $\int_a^b k(x, y)\phi(y)dy = f(x)$

第二類  $\int_a^b k(x, y)\phi(y)dy + \phi(x) = f(x)$

(2) Volterra 方程式 (Volterra Equation) :

第一類  $\int_a^x k(x, y)\phi(y)dy = f(x)$

第二類  $\int_a^x k(x, y)\phi(y)dy + \phi(x) = f(x)$

以上 (1),(2) 二者之差異在於積分的上限，一為常數，另一為變數。而第一類與第二類則差一個自由項  $\phi(x)$ 。

(3) Abel 方程式

$$\int_a^x \frac{\phi(y)}{(x-y)^\alpha} dy = f(x), \quad 0 < \alpha < 1 \quad (1.61)$$

若以核函數的奇異強度來分的話，以一維路徑積分為例，則有以下幾種：

(1) 正規積分方程 (Regular integral equation)

$$\int_a^b k(y, x)\phi(y)dy = f(x) \quad (1.62)$$

其中，當  $x \rightarrow y$  時， $k(y, x)$  為有界。

(2) 弱奇異積分方程 (Weakly singular integral equation)

$$\int_a^b U(y, x)\phi(y)dy = f(x) \quad (1.63)$$

其中，當  $x \rightarrow y$  時， $U(y, x) = O(\ln(r))$ 。

(3) 強奇異積分方程 (Strongly singular integral equation)

$$\int_a^b T(y, x)\phi(y)dy = f(x) \quad (1.64)$$

其中，當  $x \rightarrow y$  時， $T(y, x) = O(1/r)$ 。

(4) 超強奇異積分方程 (Hypersingular integral equation)

$$\int_a^b M(y, x)\phi(y)dy = f(x) \quad (1.65)$$

其中，當  $x \rightarrow y$  時， $M(y, x) = O(1/r^2)$ 。

若純以邊界元素法解題的邏輯過程來分的話，則可分為：

(1) 域內點之邊界積分式

$$2\pi u(x) = \int_B T(s, x)u(s)dB(s) - \int_B U(s, x)t(s)dB(s), \quad x \in D \quad (1.66)$$

$$2\pi t(x) = \int_B M(s, x)u(s)dB(s) - \int_B L(s, x)t(s)dB(s), \quad x \in D \quad (1.67)$$

其中， $U, T, L$  與  $M$  表四個核函數， $u(s)$  與  $t(s)$  表邊界物理量， $x$  在考慮問題的定義域內，故無奇異積分。

(2) 邊界點之邊界積分式

$$\alpha u(x) = C.P.V. \int_B T(s, x)u(s)dB(s) - R.P.V. \int_B U(s, x)t(s)dB(s), \quad x \in B \quad (1.68)$$

$$\alpha t(x) = H.P.V. \int_B M(s, x)u(s)dB(s) - C.P.V. \int_B L(s, x)t(s)dB(s), \quad x \in B \quad (1.69)$$

其中， $x$  在考慮問題的邊界上，故有奇異積分發生，R.P.V., C.P.V. 與 H.P.V. 分別代表 Riemann 主值、Cauchy 主值和 Hadamard 主值（請參閱 § 1.10），而  $\alpha$  與邊界平滑度有關。以下將舉例說明典型之積分方程式：

範例：各類積分方程例子如下

(1) Laplace 轉換：

$$g(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (1.70)$$

若  $g(s)$  為已知函數，而要求  $f(t)$  函數的話，則上式即為一典型積分方程式。而此問題即為 Laplace 的逆轉換，其解為

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{st} g(s) ds \quad (1.71)$$

(2) Fourier 轉換：

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt \quad (1.72)$$

若  $g(\omega)$  為已知函數，而要求解  $f(t)$  函數的話，則上式也為一典型積分方程式。而此問題即為 Fourier 的逆轉換，其解為

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} g(\omega) d\omega \quad (1.73)$$

(3) 傅立葉反算 (Fourier Inversion Formula) 實數表示式

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} g(t) \cos(tx) dt \quad (1.74)$$

其中， $f(x)$  已知， $g(t)$  為未知函數，則  $g(x)$  可表示成下式

$$g(t) = \int_0^{\infty} f(x) \cos(tx) dx \quad (1.75)$$

(4) 傅立葉反算 (Fourier Inversion Formula) 複數表示式

傅立葉轉換運算元 (Fourier Transform Operator)  $\Phi$

$$\Phi(f(t)) = \psi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(i\omega t) dt \quad (1.76)$$

其中， $\psi(\omega)$  已知，而  $f(t)$  為未知函數，則  $f(t)$  可表示成下式

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega \quad (1.77)$$

而  $\Phi$  運算元有如下特性

$$\Phi(\Phi(f(t))) = f(-t) \quad (1.78)$$

(5) Mellin transform 表示式

$$f(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} \phi(t) dt \quad (1.79)$$

其中， $f(x)$  已知， $\phi(t)$  為未知函數，則  $\phi(t)$  可表示成下式

$$\phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} t^{-x} f(x) dx \quad (1.80)$$

(6) Hankel transform 表示式

$$f(x) = \int_0^{\infty} t J_{\nu}(xt) \phi(t) dt \quad (1.81)$$

其中  $f(x)$  已知， $\phi(t)$  為未知函數， $J_{\nu}(xt)$  為 Bessel 函數，則  $\phi(t)$  可表示成下式

$$\phi(t) = \int_0^{\infty} x J_{\nu}(xt) f(x) dx \quad (1.82)$$

(7) Hilbert transform 表示式

$$\bar{x}(t) = H(x(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(u)}{\pi(t-u)} du \quad (1.83)$$

其中， $\bar{x}(t)$  已知， $x(t)$  為未知函數，則  $x(t)$  可表示成下式

$$x(t) = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{x}(u)}{\pi(t-u)} du \quad (1.84)$$

而  $H$  運算元有如下特性

$$H(H(x(t))) = -x(t) \quad (1.85)$$

(8) Abel 積分式。(見下一小節)

舉上述例子，主要是其較為我們所熟悉，例如在求解微分或偏微分方程的問題時，Fourier 和 Laplace 轉換經常被當成運算數學 (operational mathematics) 的工具，在控制理論用的很多。在頻譜分析領域上，傅立葉 (Fourier) 轉換與 Hilbert transform 亦常被應用來看出時序資料中頻率內含的物理現象。

### 1.3.2.1 積分方程式最早的例子—Abel 積分式

文獻上最早對積分方程式研究的學者應屬 Abel (1823)，他曾探討一擺線問題如下：

圖 1.4 Abel 擺線問題示意圖

參考上圖，考慮一質點質量  $m$  自 A 點滑下，今欲設計一滑槽，使得其下墜  $h$  高度之時間為吾人設定的函數，即  $t = t(h)$ ，求此滑槽曲線方程式。

解：

在 A, B 兩點，考慮能量守恆如下：

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = mgh \quad (1.86)$$

其中， $v$  為速度， $g$  為加速度。將滑槽曲線方程式以路徑座標 (Path Coordinate),  $s$  表示，則  $s = s(y)$ ，即  $s$  將是  $y$  的函數。因此，可將速度表為

$$v = \frac{ds}{dt} \quad (1.87)$$

其中， $ds^2 = dx^2 + dy^2$ 。代入上式守恆律，可得

$$2g(h - y) = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \quad (1.88)$$

取正方向，可得

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2g(h - y)} \quad (1.89)$$

使用鏈法則 (chain rule) ，

$$\frac{ds(y)}{dy} \frac{dy}{dt} = \sqrt{2g(h-y)} \tag{1.90}$$

經積分

$$\int_0^h \frac{s'(y)}{\sqrt{2g(h-y)}} dy = \int_0^t dt = t(h) \tag{1.91}$$

可得

$$t(h) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^h \frac{s'(y)}{\sqrt{(h-y)}} dy \tag{1.92}$$

式中， $s'(y) = ds/dy$ 。上式積分方程式中， $s'(y)$  為未知函數，而  $t(h)$  為已知函數，可解得

$$s(y) = \frac{\sqrt{2g}}{\pi} \int_0^y \frac{t(s)}{\sqrt{y-s}} ds \tag{1.93}$$

若設定下墜時間  $t(h) = T$  常數，則其解為

$$s(y) = \sqrt{2gy}/\pi \tag{1.94}$$

經驗証其和擺線參數式

$$x(\theta) = \frac{gT^2}{\pi^2}(\theta + \sin(\theta)) \tag{1.95}$$

$$y(\theta) = \frac{gT^2}{\pi^2}(1 - \cos(\theta)) \tag{1.96}$$

相同。

\*\*\*\*\*

習題: Abel 廣義積分方程式如下:

$$\int_a^x \frac{\phi(y)}{(x-y)^\alpha} dy = f(x), \quad 0 < \alpha < 1 \tag{1.97}$$

證明其解如下:

$$\phi(y) = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \frac{d}{dy} \left\{ \int_a^y \frac{f(x)}{(y-x)^{1-\alpha}} dx \right\} \tag{1.98}$$

上述例題， $\alpha$  恰為  $\frac{1}{2}$ 。

\*\*\*\*\*

---

### 1.3.3 積分運算元

本小節將介紹積分運算元相關性質如下:

(1) 積分運算元定義如下:

$$F^1(\phi(x)) = \int_a^b k(x, y)\phi(y)dy \quad (1.99)$$

$$F^2(\phi(x)) = \int_a^b k(x, y)\phi(y)dy + \phi(x) \quad (1.100)$$

$$V^1(\phi(x)) = \int_a^x k(x, y)\phi(y)dy \quad (1.101)$$

$$V^2(\phi(x)) = \int_a^x k(x, y)\phi(y)dy + \phi(x) \quad (1.102)$$

其中， $F^1$  為 Fredholm 第一類積分運算元， $F^2$  為 Fredholm 第二類積分運算元， $V^1$  為 Volterra 第一類積分運算元， $V^2$  表示 Volterra 第二類積分運算元。

(2) 線性積分方程的定義

$$K(a\phi(x) + b\psi(x)) = aK(\phi(x)) + bK(\psi(x)) \quad (1.103)$$

其中， $K$  表線性積分運算元， $a$  與  $b$  為常數。

(3) 積分運算元的積 (Product)，定義如下:

$$\begin{aligned} K(L(\phi(x))) &= KL(\phi(x)) \\ &= \int_a^b k(x, s)\left\{\int_a^b l(s, t)\phi(t)dt\right\}ds \\ &= \int_a^b \int_a^b k(x, s)l(s, t)\phi(t)dtds \\ &= \int_a^b m(x, t)\phi(t)dt = M(\phi(x)) \end{aligned} \quad (1.104)$$

其中

$$M(\phi(x)) = \int_a^b m(x, t)\phi(t)dt \quad (1.105)$$

$$m(x, t) = \int_a^b k(x, s)l(s, t)ds \quad (1.106)$$

$K$  積分運算元與  $L$  積分運算元的積，可記成  $M$ ，即

$$M = KL \quad (1.107)$$

同理， $L$  積分運算元與  $K$  積分運算元的積，可記成  $N$ ，即

$$N = LK \quad (1.108)$$

$$n(x, t) = \int_a^b l(x, s)k(s, t)ds \quad (1.109)$$

(4) 積分運算元的可交換性:

設  $K, L$  為積分運算元, 若

$$KL = LK \text{ or } M = N \quad (1.110)$$

則稱  $K, L$  積分運算元有可交換性。因其作用次序可交換, 而不影響其結果。

範例: 若  $k(x, t) = 1, l(x, t) = x - t, a = 0, b = 1$ , 判定  $K$  與  $L$  運算元之交換性。

由定義可知

$$m(x, t) = \int_0^1 1(t-x)dt = 1/2 - x \quad (1.111)$$

$$n(x, t) = \int_0^1 (x-s)1ds = x - 1/2 \quad (1.112)$$

因  $m(x, t) \neq n(x, t)$ , 所以  $K, L$  沒有可交換性。

### 1.3.4 積分方程的理論解法—連續代入近似法

已知 Fredholm 方程式如下:

$$\psi(x) = \lambda \int_a^b K(x, s)\psi(s)ds + f(x) \quad (1.113)$$

其中,  $\lambda$  為某特徵值 (eigenvalue),  $\psi(x)$  為未知函數。

積分方程解的存在性, 常藉助於連續代入法。而連續近似法之解題步驟說明如下:

1. 先設定  $\psi(x) = f(x)$  (若已有更好的初始猜函數, 則使用  $\psi(x) = \bar{\psi}_0(x)$ )。
2. 將  $\psi_0(x) = \psi_0(x)$  代入 Fredholm 方程式, 可得

$$\psi_1(x) = \lambda \int_a^b K(x, s)\psi_0(s)ds + f(x) \quad (1.114)$$

同理, 將  $\psi_1(x)$  代入 Fredholm 方程式之  $\psi(x)$ , 可得

$$\psi_2(x) = \lambda \int_a^b K(x, s)\psi_1(s)ds + f(x) \quad (1.115)$$

依此類推

$$\begin{aligned} \psi_3(x) &= \lambda \int_a^b K(x, s)\psi_2(s)ds + f(x) \\ &\dots \dots \dots \\ \psi_n(x) &= \lambda \int_a^b K(x, s)\psi_{n-1}(s)ds + f(x) \end{aligned} \quad (1.116)$$



定義  $B$  值如下:

$$\int_a^b \int_a^b K^2(x, s) dx ds = B^2 \quad (1.117)$$

若  $B$  值為有限，且

$$\lambda < 1/B \quad (1.118)$$

則  $\psi_n(x)$  收斂到  $\psi(x)$  如下:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(x) = \psi(x) \quad (1.119)$$

範例: 求解  $\psi(x)$  之積分方程如下:

$$\psi(x) = \lambda \int_0^1 \psi(s) ds + 1 \quad (1.120)$$

其中， $\lambda$  為某特性數。

解法一:

$$K(x, s) = 1, \quad \psi_0(x) = f(x) = 1, \quad a=0, \quad b=1$$

$$\psi_1(x) = \lambda \int_0^1 ds + 1 = \lambda + 1$$

$$\psi_2(x) = \lambda \int_0^1 (\lambda + 1) ds + 1 = \lambda^2 + \lambda + 1$$

$$\psi_3(x) = \lambda \int_0^1 (\lambda^2 + \lambda + 1) ds + 1 = \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1$$

$$\dots = \dots \quad \dots$$

$$\psi_n(x) = \lambda^n + \dots + \lambda + 1 = \sum_{i=0}^n \lambda^i = \frac{1}{(1-\lambda)} \quad (if \quad |\lambda| < 1) \quad (1.121)$$

討論:

$$B^2 = \int_0^1 \int_0^1 K^2(x, s) dx ds = 1 \quad (1.122)$$

$B = 1$  為有限，當

$$\lambda < 1 \quad (1.123)$$

則  $\psi(x) = \frac{1}{(1-\lambda)}$ 。

以上之結果告訴我們，當  $|\lambda| < 1$  時，其解為  $\psi(x) = 1/(1-\lambda)$ ，但當  $|\lambda| > 1$  時，則無任何結論。有趣的是，我們若改用另一解法，則可看出，只要  $|\lambda| \neq 1$  時，其解就是  $\psi(x) = 1/(1-\lambda)$ ，說明如下:

解法二:

因

$$\psi(x) = \lambda \int_0^1 \psi(s)ds + 1 \tag{1.124}$$

所以

$$\psi(x) = \lambda C + 1 \tag{1.125}$$

其中， $C$  為常數，再代入原式，可得

$$\lambda C + 1 = \lambda(\lambda C + 1) + 1 \tag{1.126}$$

可解得

$$\psi(x) = \frac{1}{(1-\lambda)} \text{ if } \lambda \neq 1 \tag{1.127}$$

也就是說，只要  $|\lambda| \neq 1$  時，其解就是  $\psi(x) = \frac{1}{(1-\lambda)}$ 。由以上結果可知，連續代入法無法解的問題，並不見得就無解。如上述問題在  $|\lambda| > 1$  的情形即是。

\*\*\*\*\*

習題：求解  $\psi(x)$  之積分方程式

$$\psi(x) = \lambda \int_0^1 \psi(s)ds + f(x) \tag{1.128}$$

解：

當  $\lambda \neq 1$  時， $\psi(x) = \frac{\lambda}{1-\lambda} \int_0^1 f(s)ds + f(x)$ 。

當  $\lambda = 1$  時，若  $\int_0^1 f(s)ds = 0$ ，則無限多解。

當  $\lambda = 1$  時，若  $\int_0^1 f(s)ds \neq 0$ ，則無解。

\*\*\*\*\*

範例：

(1). 求解積分方程式之特徵函數  $\psi(x)$

$$\int_0^\pi k(x, s)y(s)ds = \lambda y(x) \tag{1.129}$$

其中， $k(x, s) = \sin(x + s)$ 。

(2). 利用 (1). 求解以下  $y(x)$ ，其中  $p(x)$  為已知。

$$\int_0^\pi k(x, s)y(s)ds = p(x) \tag{1.130}$$

(1). 求解  $y(x)$

$$\int_0^\pi k(x, s)y(s)ds = \lambda y(x) \quad (1.131)$$

將  $k(x, s)$  式代入上式中，可得

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin(x+s)y(s)ds &= \int_0^\pi (\sin(x)\cos(s) + \cos(x)\sin(s))y(s)ds \\ &= \left[ \int_0^\pi \cos(s)y(s)ds \right] \sin(x) + \left[ \int_0^\pi \sin(s)y(s)ds \right] \cos(x) \\ &= C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x) \\ &= \lambda y(x) \end{aligned} \quad (1.132)$$

其中

$$C_1 = \int_0^\pi \cos(s)y(s)ds$$

$$C_2 = \int_0^\pi \sin(s)y(s)ds$$

再對上式分別乘上  $\cos(x)$  與  $\sin(x)$  作積分可得

$$-\lambda C_1 + \frac{\pi}{2} C_2 = 0 \quad (1.133)$$

$$\frac{\pi}{2} C_1 - \lambda C_2 = 0 \quad (1.134)$$

若  $C_1, C_2$  有非零解的話，則

$$\det \begin{vmatrix} -\lambda & \pi/2 \\ -\pi/2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

可得  $\lambda = \pi/2, -\pi/2$ 。當特徵值  $\lambda = \pi/2$  時，特徵向量為  $(1, 1)^T$ ，特徵函數為  $y_1(x) = \frac{2\sin(x)+2\cos(x)}{\pi}$ 。

當特徵值  $\lambda = -\pi/2$  時，特徵向量為  $(1, -1)^T$ ，特徵函數為  $y_2(x) = \frac{-2\sin(x)+2\cos(x)}{\pi}$ 。

(2). 利用特徵函數可求取以下  $y(x)$  的積分方程式

$$\int_0^\pi k(x, s)y(s)ds = p(x) \quad (1.135)$$

步驟一：

將  $p(x)$  表成

$$p(x) = \sum_{i=1}^2 y_i(x)p_i \quad (1.136)$$

步驟二：

則  $y(x)$  可表成

$$y(x) = \sum_{i=1}^2 \frac{y_i(x)p_i}{\lambda_i} \tag{1.137}$$

實例說明:

若  $p(x) = \frac{2\sin(x)}{\pi}$ ，求解  $y(x)$ ，其積分方程式如下:

$$\int_0^\pi k(x, s)y(s)ds = \frac{2\sin(x)}{\pi} \tag{1.138}$$

其中， $k(x, s) = \sin(x + s)$ 。

解:

步驟一:

將

$$2 \sin(x)/\pi = \sum_{i=1}^2 y_i(x)p_i = y_1(x) - y_2(x) \tag{1.139}$$

步驟二:

則

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{i=1}^2 \frac{y_i(x)p_i}{\lambda_i} \\ &= \frac{\sin(x) + \cos(x)}{\pi^2} - \frac{\sin(x) - \cos(x)}{\pi^2} \\ &= \frac{2\cos(x)}{\pi^2} \end{aligned} \tag{1.140}$$

\*\*\*\*\*

習題: 求如下積分方程的特徵值與特徵函數

$$\int_0^\pi k(x, s)y(s)ds = \lambda y(x), \quad 0 < x < \pi \tag{1.141}$$

其中

$$k(x, s) = \begin{cases} x(\pi - s), & x < s \\ s(\pi - x), & x > s \end{cases} \tag{1.142}$$

解:  $y_n(x) = \sin(nx)$ ,  $\lambda_n = n^2$ 。

\*\*\*\*\*

### 1.3.5 對偶積分方程式

對偶積分方程式 (Dual Integral Equations) 傳統的定義是兩個定義在不同區間但相同核函數的積分式如下:

$$\int_a^b K(x, t) f_1(t) dt = g_1(x), \quad x \text{ on } I_1 \quad (1.143)$$

$$\int_a^b K(x, t) f_1(t) dt = g_2(x) \quad x \text{ on } I_2 \quad (1.144)$$

以上定義參見 Beuker 在 Mechanics of Fracture 第二冊之定義。

對偶積分方程式 (Dual Integral Equations) 在本書的定義如下:

域內對偶積分方程式:

$$2\pi u(x) = \int_B (T(s, x)u(s) - U(s, x)t(s)) dB(s), \quad x \in D \quad (1.145)$$

$$2\pi t(x) = \int_B (M(s, x)u(s) - L(s, x)t(s)) dB(s), \quad x \in D \quad (1.146)$$

其中,  $x$  在考慮問題之定義域 (Domain)  $D$  內,  $U, T, L$ , 與  $M$  表示核函數。邊界點對偶積分方程式則是將  $x$  由域內點逼近到邊界  $B$  上, 由於核函數的奇異特性, 於積分後取主值, 可得下式

$$\alpha u(x) = C.P.V. \int_B T(s, x)u(s) dB(s) - R.P.V. \int_B U(s, x)t(s) dB(s), \quad x \in B \quad (1.147)$$

$$\alpha t(x) = H.P.V. \int_B M(s, x)u(s) dB(s) - C.P.V. \int_B L(s, x)t(s) dB(s), \quad x \in B \quad (1.148)$$

其中,  $x$  在邊界  $B$  上。

### 1.3.6 積分方程式二擇一定理 (Fredholm alternative theorem)

已知積分式如下:

$$\psi(x) - \lambda K[\psi(x)] = f(x) \quad (1.149)$$

其中,  $K$  為積分運算元。

Fredholm 二擇一定理 (Fredholm Alternative Theorem):

(1) 若  $\lambda$  不為  $K$  運算元的特性根時, 則對任何  $f(x)$  的非齊次方程式均可解。

(2) 若  $\lambda$  為  $K$  運算元的特性根時，則即使是齊次方程式，即  $f(x) = 0$ ，仍有非無意義解，此即為特性解。

## 1.3.7 積分方程式與線性代數

在積分方程中若干定理均和線性代數有很密切的關係，為了增進對於積分方程的了解，得先對線性代數有一認識，茲將幾個重要定理列述於下

基本式:

$$Ax = b, \quad \text{or} \quad a_{ij}x_j = b_i \quad (1.150)$$

轉置式 (transpose form) :

$$A^t y = c, \quad \text{or} \quad a_{ji}y_j = c_i \quad (1.151)$$

定理一:

$$\det(A) = \det(A^t), \quad \text{rank}(A) = \text{rank}(A^t) \quad (1.152)$$

定理二: 如果  $\det(A) \neq 0$ ，則對任何的  $b$  均有唯一解。(若  $b = 0$ ，則僅有無聊解 (trivial solution) )

定理三:  $\det(A) = 0$ ， $\text{rank}(A) = r$ ，則  $Ax = b$  有  $n - r$  個線性獨立解，亦及 nullity 為  $n - r$ 。

定理四: 若  $b \neq 0$ ，且  $Ax = b$  有解。則  $\text{rank}(A) = \text{rank}(Ab)$ ，其中， $Ab$  表示增廣矩陣 (Augmented matrix)。

範例: 有唯一解

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

或無限多解

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

---

定理五: If  $Ax = b$  ,  $b \neq 0$  且  $x$  有解, 則  $b \cdot y = 0$  , 其中  $y$  為  $A^t y = 0$  之解。

---

範例一:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 5 \\ 13 \end{bmatrix}$$

則解為

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

check :  $b \cdot y = 0$ , O.K.

---

範例二:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$y$  有兩種可能如下

$$y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

check :  $b \cdot y = 0$  O.K.

---

## 1.3.8 積分方程式的補解與特解

一般於求解邊界值或初始值問題時，不管使用微分方程或積分方程推導，均有補解與特解兩部份。值得一提的是，在集中力與衝量作用下之特解，其實和補解並無兩樣，以下以結構動力學之 Duhamel 積分為例，說明其在 Laplace domain 上看是一樣的。參考下式：

特解乃是滿足控制方程內有非齊次微體項的解，如下

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = \delta(t - 0^+)$$

初始位置與初始速度分別為

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$$

而補解則滿足沒有非齊次項的控制方程式，如下

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0$$

初始位置與初始速度 (由動量守恆知) 分別為

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 = 1/m$$

以上兩個問題之 Laplace domain 對應式均相同為

$$\bar{X}(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + k}$$

其中  $\bar{X}(s)$  為  $x(t)$  之 Laplace 轉換。其對應的時間域解，即為 Duhamel 積分式中之核函數如下

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_d(t))$$

其中  $\xi = \frac{c}{2\sqrt{mk}}$ ,  $\omega_n = \sqrt{k/m}$ ,  $\omega_d = \sqrt{1 - \xi^2} \omega_n$ . 由上例可看出其實基本解是特解也是很特別的特解。不同的定義域範圍有不同的結果。此點在基本解亦有類似的說法。同理，

### 積分方程式的補解與特解

彈性力學的基本解，亦可看成某一補解。但解釋上，需將其挖出圓球後，再輔以適當等效之邊界力平衡條件。因此，集中力變消失於定義域內的等效邊界曳引力。

如上所示一維 Laplace 方程之微分方程與積分方程的補解特解說明表中，可發現微分方程與積分方程所決定的未定係數並不相同，但全解相同。另一點值得一提的是各種不同方法導得的特解可不同，但必差一個補解，這個結論是和微分方程不謀而和的。



至於積分方程的補解個數，是由積分方程的核函數所決定，說明如下：

積分方程

$$\int_{-a}^a K(x, s)\phi(s)ds = g(x)$$

當  $K(x, s) = O(r \ln(r))$  時，則  $\phi(s)$  無解。

當  $K(x, s) = O(\ln(r))$  時，則  $\phi(s)$  有一解。

當  $K(x, s) = O(1/r)$  時，則  $\phi(s)$  有一特解、一補解。

當  $K(x, s) = O(1/r^2)$  時，則  $\phi(s)$  有一特解、二補解。

範例：求解如下積分方程

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{(x-t)^2} \phi(t) dt = f(x)$$

其補解為

$$\phi_c(x) = \frac{c_1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{c_2 x}{\sqrt{1-x^2}}$$

其中， $c_1, c_2$  為未定係數。其特解為

$$\phi_p(x) = \int_{-1}^1 H(x, t) f(t) dt$$

一般解為

$$\phi(x) = \phi_c(x) + \phi_p(x)$$

### 1.3.9 邊界點與域內點的邊界積分方程式

茲將相關積分式綜整如下：一維域內點對偶邊界積分方程式 (Laplace and Helmholtz 方程)：

$$u(x) = \{T(s, x)u(s) - U(s, x)t(s)\} \Big|_{s=a}^{s=b} \tag{1.153}$$

$$t(x) = \{M(s, x)u(s) - L(s, x)t(s)\} \Big|_{s=a}^{s=b} \tag{1.154}$$

一維邊界點對偶邊界積分方程式 (Laplace and Helmholtz 方程)：

$$\lim_{x \rightarrow a^+} u(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} \{T(s, x)u(s) - U(s, x)t(s)\} \Big|_{s=a}^{s=b} \tag{1.155}$$

$$\lim_{x \rightarrow b^-} u(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} \{T(s, x)u(s) - U(s, x)t(s)\} \Big|_{s=a}^{s=b} \tag{1.156}$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} t(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} \{M(s, x)u(s) - L(s, x)t(s)\} \Big|_{s=a}^{s=b} \quad (1.157)$$

$$\lim_{x \rightarrow b^-} t(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} \{M(s, x)u(s) - L(s, x)t(s)\} \Big|_{s=a}^{s=b} \quad (1.158)$$

二維域內點對偶邊界積分方程式 (Laplace and Helmholtz 方程):

$$2\pi u(x) = \int_B T(s, x)u(s)dB(s) - \int_B U(s, x)t(s)dB(s) \quad (1.159)$$

$$2\pi t(x) = \int_B M(s, x)u(s)dB(s) - \int_B L(s, x)t(s)dB(s) \quad (1.160)$$

二維邊界點對偶邊界積分方程式 (Laplace and Helmholtz 方程):

$$\pi u(x) = C.P.V. \int_B T(s, x)u(s)dB(s) - R.P.V. \int_B U(s, x)t(s)dB(s) \quad (1.161)$$

$$\pi t(x) = H.P.V. \int_B M(s, x)u(s)dB(s) - C.P.V. \int_B L(s, x)t(s)dB(s) \quad (1.162)$$

二維域內點對偶邊界積分方程式 (Navier 方程):

$$u_k(x) = \int_B U_{ik}(s, x)t_i(s)dB(s) - \int_B T_{ik}(s, x)u_i(s)dB(s) \quad (1.163)$$

$$t_k(x) = \int_B L_{ik}(s, x)t_i(s)dB(s) - \int_B M_{ik}(s, x)u_i(s)dB(s) \quad (1.164)$$

二維邊界點對偶邊界積分方程式 (Navier 方程):

$$\frac{1}{2}u_k(x) = R.P.V. \int_B U_{ik}(s, x)t_i(s)dB(s) - C.P.V. \int_B T_{ik}(s, x)u_i(s)dB(s) \quad (1.165)$$

$$\frac{1}{2}t_k(x) = C.P.V. \int_B L_{ik}(s, x)t_i(s)dB(s) - H.P.V. \int_B M_{ik}(s, x)u_i(s)dB(s) \quad (1.166)$$

三維域內點對偶邊界積分方程式 (Laplace and Helmholtz 方程):

$$4\pi u(x) = \int_B T(s, x)u(s)dB(s) - \int_B U(s, x)t(s)dB(s) \quad (1.167)$$

$$4\pi t(x) = \int_B M(s, x)u(s)dB(s) - \int_B L(s, x)t(s)dB(s) \quad (1.168)$$

三維邊界點對偶邊界積分方程式 (Laplace and Helmholtz 方程):

$$2\pi u(x) = C.P.V. \int_B T(s, x)u(s)dB(s) - R.P.V. \int_B U(s, x)t(s)dB(s) \quad (1.169)$$

$$2\pi t(x) = H.P.V. \int_B M(s, x)u(s)dB(s) - C.P.V. \int_B L(s, x)t(s)dB(s) \quad (1.170)$$

三維域內點對偶邊界積分方程式 (Navier 方程):

$$u_k(x) = \int_B U_{ik}(s, x)t_i(s)dB(s) - \int_B T_{ik}(s, x)u_i(s)dB(s) \quad (1.171)$$

$$t_k(x) = \int_B L_{ik}(s, x)t_i(s)dB(s) - \int_B M_{ik}(s, x)u_i(s)dB(s) \quad (1.172)$$

三維邊界點對偶邊界積分方程式 (Navier 方程):

$$\frac{1}{2}u_k(x) = R.P.V. \int_B U_{ik}(s, x)t_i(s)dB(s) - C.P.V. \int_B T_{ik}(s, x)u_i(s)dB(s) \quad (1.173)$$

$$\frac{1}{2}t_k(x) = C.P.V. \int_B L_{ik}(s, x)t_i(s)dB(s) - H.P.V. \int_B M_{ik}(s, x)u_i(s)dB(s) \quad (1.174)$$

## 1.4 積分方程式與微分方程的關係

一般物理或力學問題，均可導得微分方程的控制式。若經由基本解，透過自我伴隨運算元特性的應用，則可導得對應的積分方程式。就物理觀念而言，此積分式係建立在兩個力系的功能互換原理上。而基本解的位移場，即為其中的一個力系。而微分方程式，可說是微觀的表示式，其為滿足某一瞬時或某一微元、或可講成其為某一狀態 (state) 下之方程式。但積分方程式，則是巨觀的。數學家已經承認積分運算元的性質比微分運算元為佳，因而更適合用來論證。但對從事計算模擬的研究者而言，積方方程可將某些區域的問題轉化成邊界問題，靠著邊界物理量的基本變數 (state variable)，即可描述整個場的行為，這一點也就是邊界元素法吸引人的地方。另外積分方程可將控制方程、邊界與初始條件寫在一個方程式內。而微分方程則需分開寫。為解釋方便起見，舉一特例說明如下

範例: Liouville 微分方程式 (Ordinary Differential Equation, O.D.E.) 表示式如下:

控制方程:  $\ddot{\phi} + (\rho^2 - \sigma(x))\phi(x) = 0$

初始條件:  $\phi(0) = 1, \dot{\phi}(0) = 0$

其等效積分方程式 (Integral Equation, I.E.) 表示式為

$$\phi(x) = \int_0^x K(x, y)\phi(y)dy + f(x) \quad (1.175)$$

其中

$$K(x, y) = \frac{1}{\rho}\sigma(y)\sin(\rho(x - y)) \quad (1.176)$$

$$f(x) = \cos(\rho(x)) \int_0^x \sigma(y)\phi(y)dy \quad (1.177)$$

解:

由微分方程推導積分方程的過程如下:

步驟一

定義  $G(x, y) = \phi(x)$ ，先解基本解  $\phi(x)$

$$\ddot{\phi} + \rho^2 \phi(x) = \delta(x - y) \quad (1.178)$$

初始條件為  $\phi(0) = 1, \dot{\phi}(0) = 0$ ，此初始型 (Initial) 問題，可用 Laplace 轉換為，

$$s^2 L(\phi) - s\phi(0) - \dot{\phi}(0) + \rho^2 L(\phi) = e^{-sy} \quad (1.179)$$

$$L(\phi) = \frac{s + e^{-sy}}{s^2 + \rho^2} \quad (1.180)$$

$$\begin{aligned} \phi = G(x, y) &= L^{-1}\left(\frac{s + e^{-sy}}{s^2 + \rho^2}\right) \\ &= \cos(\rho x) + \frac{\sin(\rho(x - y))}{\rho} \end{aligned} \quad (1.181)$$

步驟二

由疊加原理可知， $\phi(x)$  可寫成如下積分式，

$$\phi(x) = \int_0^x G(x, y)\sigma(y)\phi(y)dy \quad (1.182)$$

代入  $G(x, y)$  可得

$$\phi(x) = \int_0^x K(x, y)\phi(y)dy + f(x) \quad (1.183)$$

其中

$$K(x, y) = \frac{1}{\rho}\sigma(y)\sin(\rho(x - y))$$

$$f(x) = \cos(\rho(x)) \int_0^x \sigma(y)\phi(y)dy$$

此積分式即為 Volterra 第二類積分方程式。值得一提的是  $K(x, y)$  具有摺積性。

\*\*\*\*\*

習題：

試將如下單自由度振動系統之常微分方程寫成積分型式

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0 \quad (1.184)$$

初始條件  $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = \dot{x}_0$

解：

$$x(t) = \int_0^t K(t, s)x(s)ds + (2\xi\omega x_0 + \dot{x}_0)t + x_0$$

其中， $K(t, s) = (s - t)\omega^2 - 2\xi\omega$ ，上面  $x(t)$  式為 Volterra 第二類方程式。

\*\*\*\*\*

## 1.5 散度定理、Stokes' 定理、格林恆等式與自我伴隨運算元 (Self adjoint operator)

積分方程可將問題的維度降低一階，以下介紹其相關定理。

(1) 散度定理 (Divergence Theorem)，列式如下：

$$\int_V \nabla \cdot \Phi \, dV = \int_S \Phi \cdot n \, dS \quad (1.185)$$

其中， $\Phi$  為向量函數， $\nabla$  表示梯度運算元。

(2) Stokes' 定理

$$\int_A \nabla \times V \, dA = \int_s V_t \, ds \quad (1.186)$$

其中， $V$  表示向量函數， $V_t = V \cdot t$ 。

當  $V$  為一維函數時， $V(x) = \psi$ ，則

$$\int_l \psi \, dx = \int_A \frac{-\partial\psi}{\partial y} \, dx \, dy$$

當  $V$  為二維函數時， $V(x) = (\psi, \xi)$ ，則

$$\int_l \psi \, dx + \int_l \xi \, dy = \int_A \left( \frac{\partial\xi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial y} \right) \, dA = \int_A (\nabla \times F) \cdot (k) \, dA$$

當  $V$  為三維函數時， $V(x) = (\psi, \phi, \xi)$ ，則

$$\begin{aligned} & \int_l \psi \, dx + \phi \, dy + \xi \, dz \\ &= \int_A \left\{ \left( \frac{\partial\xi}{\partial y} - \frac{\partial\phi}{\partial z} \right) \cos(N, x) + \left( \frac{\partial\psi}{\partial z} - \frac{\partial\xi}{\partial x} \right) \cos(N, y) + \left( \frac{\partial\phi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x} \right) \cos(N, z) \right\} \, dA \\ &= \int_A (\nabla \times F) \cdot (\alpha, \beta, \gamma) \, dA \end{aligned} \quad (1.187)$$

其中， $\alpha = \cos(N, x)$ ， $\beta = \cos(N, y)$ ， $\gamma = \cos(N, z)$ 。

(3) 格林恆等式

假設  $\phi, \psi$  為勢流中之純量勢位函數，令  $\Phi = \phi \nabla \psi$ ，則

$$\nabla \cdot \Phi = \text{div}(\Phi) = \nabla \cdot (\phi \nabla \psi) \quad (1.188)$$

$$= \phi \nabla^2 \psi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi \quad (1.189)$$

代回散度定理，可得

$$\int_V (\phi \nabla^2 \psi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi) dV = \int_S \phi \nabla \psi \cdot n \, dS = \int_S \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS \quad (1.190)$$

若將  $\phi, \psi$  角色對調，可得

$$\int_V (\psi \nabla^2 \phi + \nabla \psi \cdot \nabla \phi) dV = \int_S \psi \nabla \phi \cdot n \, dS = \int_S \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} dS \quad (1.191)$$

將以上兩式相減，可得

$$\int_V (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) dV = \int_S (\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n}) dS \quad (1.192)$$

我們稱上式為格林恆等式 (Green's Identity)。

(4) 自我伴隨運算元 (Self-Adjoint Operator)

以格林恆等式，說明如下：

$$\int_V (\phi L \psi - \psi L^* \phi) dV = J(\phi, \psi) |_S \quad (1.193)$$

其中， $L = L^* = \nabla^2$ ， $J(\phi, \psi) = \int_S [\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n}] dS$ 。

而伴隨運算子  $L$  (Adjoint Operator) 標準式可寫成

$$\int_a^b u L(v) dx = \int_a^b v L^*(u) + J(u, v) |_a^b \quad (1.194)$$

其中

$$J(u, v) |_a^b = B(u)B(v) \quad (1.195)$$

(1) 當  $L = L^*$ ，稱  $L$  為型式化自我伴隨運算子 (Formally Self-Adjoint)。

(2) 當  $L = L^*$ ， $J(u, v) |_a^b = 0$  稱  $L$  為自我伴隨運算子 (Self-Adjoint)。

範例一：部分積分式

定義  $L = \frac{d}{dx}$ ，則  $\int_a^b u(x) \frac{dv(x)}{dx} dx = \int_a^b v(x) \frac{du}{dx} dx + u(x)v(x) |_a^b$

其中， $L = L^* = \frac{d}{dx}$ ， $J(u, v) = uv$ 。

若  $u(b)v(b) - u(a)v(a) = 0$ ，則稱  $L$  為自我伴隨運算子。由此可看出部分積分式亦為自我運算元之一例。

範例二：(Sturm-Liouville problem)

若  $L = \frac{d}{dx}(p(x)\frac{d}{dx}) + C$ ，則  $L^* = \frac{d}{dx}(p(x)\frac{d}{dx}) + C$

所以  $L$  為型式化自我伴隨運算子。

## 1.6 Dirac Delta 函數

於物理與工程問題上，無法避免地，我們經常會去處理“點分佈函數”，此函數值分佈均集中於空間中某一點或時間軸上的某一瞬時，如固體力學的集中負荷、剛體運動的衝擊、電學中的點電荷、熱傳中的點熱源。這些物理現象的數學模擬，常以 Dirac Delta 函數  $p \delta(x)$  來表示此物理量，而其強度則由前面的  $p$  值決定。如下例說明：

範例：吾人施一單位力於圓幣上，而圓幣與一剛體接觸，如下圖示，當取圓幣的自由體圖之力平衡關係時，則其接觸力的分佈，需滿足下式：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1.0 \quad (1.196)$$

由以上例題，吾人可知 Dirac Delta 函數實為一分佈函數 (Distribution Function)，只是其分佈區間很短，故可模擬如下

圖 1.5 (a) 集中力作用圖      圖 1.5 (b) 分佈反力函數圖

$\delta(x)$  之分佈函數模擬，亦可寫成

$$W_k(x) = \begin{cases} k/2, & \text{if } |x| < 1/k \\ 0, & \text{if } |x| > 1/k \end{cases}$$

或

$$W_k(x) = \frac{k}{\pi(1 + k^2 x^2)}$$

當  $k \rightarrow \infty$  時， $W_k(x) \rightarrow \delta(x)$ 。

$\delta(x)$  特性可綜整如下

(a).  $\delta(x)$  與 Heaviside 函數  $H(x)$  的關係如下

$$\delta(x) = \frac{d(H(x))}{dx} \quad (1.197)$$

(b).  $\delta(x)$  的強度為 1，如下式

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx \quad (1.198)$$

(c).  $\delta(x - s)$  具有取樣的功能，如下式

$$\hat{h}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(nT)\delta(t - nT) \quad (1.199)$$

其中， $T$  為取樣間隔。

(d).  $\delta^{(j)}(x - s)$  具有微分的功能，如下式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(j)}(x - s)h(x)dx = (-1)^{(j)}h^{(j)}(s) \quad (1.200)$$

(e).  $x\delta(x)$  整體效應為 0，如下式

$$x\delta(x) = 0$$

(f).  $\delta(x - c)$  具有平移複製功能，如下式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - c - u)f(u)du = f(x - c)$$

(g) Dirac Delta 函數若以級數則可表示如下式

$$\begin{aligned} \delta(x - s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(x)\bar{\phi}_n(s) = \frac{1}{4a^2} \sum_{-\infty}^{\infty} \exp(in\pi x/a)\exp(-in\pi s/a) \\ &= \frac{1}{4a^2} \sum_{-\infty}^{\infty} \exp(in\pi(x - s)/a) \end{aligned} \quad (1.201)$$

當  $a = \pi$ ,  $n = 5, 10, 20$  時， $\delta(x - s)$  見下圖



$$n = 5$$

$\delta(x)$  之 5 項級數展開圖

$$n = 10$$

$\delta(x)$  之 10 項級數展開圖

$$n = 20$$

$\delta(x)$  之 20 項級數展開圖

(h) Dirac Delta 函數亦可以積分表示如下式:

$$\delta(x - s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ik(x - s)) dk \quad (1.202)$$

---

## 1.7 基本解 (自由空間格林函數)

基本解又可稱為自由空間格林函數，其數學意義為含集中源外力之積分方程，此為將微分方程式表為積分方程式的橋梁。而物理意義則為影響函數 (Influence Function) 的觀念。因此，單就數學定義而言，可表成下式:

$$L(G(x, s)) = \delta(x - s), \quad \lim_{r \rightarrow \infty} G(x, s) = 0 \quad (1.203)$$

其中， $L$  為微分運算元， $G(x, s)$  為基本解 (自由空間格林函數)。

以下將舉數例，說明基本解的數學與物理意義。

基本解的數學與物理意義說明例：

範例一：求解如下基本解  $G(x, s)$  (亦可稱為自由空間格林函數)。

$$L(G(x, s)) = \delta(x - s), \quad -\infty < x < \infty$$

其中， $L = (-\frac{d^2}{dx^2} + q^2)$ 。

解：

假設  $-\infty < x < s$ ，則

$$L(G(x, s)) = 0$$

$$G(x, s) = c_2 e^{-q(x-s)}$$

假設  $s < x < \infty$ ，則

$$L(G(x, s)) = 0$$

$$G(x, s) = c_1 e^{q(x-s)}$$

在  $x = s$  處， $G(x, s)$  需連續。所以， $c_1 = c_2$ 。在  $x = s$  處， $G'(x, s)$  需跳躍，亦即

$$\frac{dG}{dx} \Big|_{s^+} - \frac{dG}{dx} \Big|_{s^-} = 1.0$$

可導得

$$c_1 = c_2 = \frac{1}{2q}$$

故基本解可寫成

$$G(x, s) = \begin{cases} \frac{e^{q(x-s)}}{2q}, & x < s \\ \frac{e^{-q(x-s)}}{2q}, & x > s \end{cases}$$

簡寫成

$$G(x, s) = \frac{1}{2q} e^{-q|x-s|}$$

當  $q \rightarrow 0$  時，並取無限遠處為參考勢能點，則上式可簡化成

$$G(x, s) = -\frac{1}{2} |x - s|, \quad \text{for any } x$$

上式即為一維 Laplace 方程式

$$-\frac{d^2}{dx^2}(G(x, s)) = \delta(x - s) \quad (1.204)$$

的基本解 (自由空間格林函數)。

範例二: 求解二維 Laplace 基本解  $G(x, s)$ 。

$$\nabla^2 G(x, s) = \delta(x - s)$$

步驟一

將  $\delta(x - s)$  以二維分佈函數表示如下:

$$\delta(x - s) = \lim_{k \rightarrow \infty} k e^{-kr^2} / \pi$$

步驟二

若改以極坐標表示, 則可將 Laplace 方程表成

$$\frac{1}{r}(rG_{,r})_{,r} + \frac{1}{r^2}G_{,\theta\theta} = k e^{-kr^2} / \pi$$

因為  $G(x, s)$  為極對稱而與  $\theta$  無關, 故上式可簡化為

$$\frac{1}{r}(rG_{,r})_{,r} = k e^{-kr^2} / \pi$$

可解得

$$rG_{,r} = 1 - k e^{-kr^2} / 2\pi$$

$$G(x, s) = \frac{\ln(r)}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \int_r^1 \frac{e^{-kt^2}}{t} dt$$

當  $k \rightarrow \infty$  時, 則

$$G(x, s) = \frac{1}{2\pi} \ln(r)$$

範例三: 求解三維 Laplace 基本解  $G(x, s)$ 。

讀者可仿照例 2 解得  $G(x, s) = \frac{-1}{4\pi r}$

範例四: 求解長度為  $L$  之簡支梁於  $s$  處, 承受一集中力的格林函數, 並說明其物理意義。

(1) 數學意義 (Mathematical Sense)

此問題之數學模式如下:

$$\mathcal{F}(G(x, s)) = -P\delta(x, s)$$

其中， $\mathcal{F}$  為梁之運算元 (Operator)， $P$  為源強度 (Strength of Source)， $x$  為場點 (Field Point)， $s$  為源點 (Source Point)。

以此例而言

控制方程式  $EIy'''' = \delta(x, s)$

邊界條件  $y(0) = y(L) = 0, M(0) = M(L) = 0$

針對上述之邊界條件，其解可以特徵函數 (Eigenfunction) 表示如下

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right)$$

上式  $A_i$  為未定係數，則

$$y'' = -\sum_{i=1}^{\infty} A_i \left(\frac{i\pi}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right)$$

使用最低能量法 (Minimum potential energy method) 求解步驟如下:

步驟一

此梁之應變能  $V$  為

$$V_1 = 0.5EI \int_0^L [(\pi/L)^2 \sum_{i=0}^{\infty} A_i i^2 \sin(i\pi x/L)]^2 dx = EI\pi^4 \sum_{i=0}^{\infty} A_i^2 i^4/4L^3 \quad (1.205)$$

步驟二

外功勢能  $V$  為

$$V_2 = -\int_0^L \delta(x-s) \sum_{i=1}^{\infty} A_i \sin(i\pi x/L) dx = -\sum_{i=1}^{\infty} A_i \sin(i\pi s/L) \quad (1.206)$$

步驟三

其總勢能為

$$V = V_1 + V_2$$

步驟四

由最低勢能原理，可知

$$\frac{\partial V}{\partial A_i} = 0$$

可得

$$\frac{EI\pi^4}{2L^3} i^4 A_i = \sin(i\pi s/L)$$

亦即

$$A_i = 2L^3 \sin(i\pi s/L) / (EI i^4 \pi^4)$$

其解為

$$y(x) = \frac{2L^3}{EI\pi^4} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^4} \sin(i\pi x/L) \sin(i\pi s/L) = G(x, s)$$

驗證：

- (i) 由上式可看出對稱性，因  $G(x, s) = G(s, x)$ ，意即滿足功能互換關係。
- (ii) 當  $x = s = L/2$  時，單位力作用在中點，中點處的變形為

$$y = \frac{2L^3}{EI\pi^4} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i+1)^4} = L^3 / (48EI)$$

恰為正解。

(2) 物理意義 (Physical Sense)

作用點  $s$  (Source)，反應點  $x$  (Response)，如果  $x$  固定， $s$  變動，則稱  $G(x, s)$  為影響函數 (Influence function)，此和結構學的影響線 (influence line) 觀念是一致的。如果  $s$  固定， $x$  變動，以材力觀點，則稱  $EIG''(x, s)$  為彎矩圖。由材力共軛梁法 (Conjugate Beam Theory)，可將彎矩圖的彎矩視為均佈負荷，則其彎矩圖即為變位圖，可解得

$$y = \begin{cases} \frac{(L-s)}{6EIL} x^3 - \frac{1}{6EI} \frac{L-s}{L} s(s-2L)x & , 0 < x < s \\ \frac{(L-x)}{6EIL} s^3 - \frac{1}{6EI} \frac{L-x}{L} x(x-2L)s & , s < x < L \end{cases}$$

驗核，當  $x = s = L/2$  時，

$$G(x, s) = \frac{L^3}{48EI}$$

以上和材料力學結果相吻合。

茲綜整結果如下圖示

圖 1.7 (a) 簡支梁受集中力作用圖

圖 1.7 (b) 簡支梁受集中力的變形圖 ( $G(x, s)$ )

由於基本解在 BEM 的應用上甚為重要，特將其綜整如下：

常用基本解綜整表

常用基本解綜整表

問題描述	數學式	基本解
一維 Laplace 方程 Helmholtz 方程式 Wave 方程式	$u'' = \delta(x - s)$ $u'' + k^2u = \delta(x - s)$ $c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ $= \delta(x - s)\delta(t)$	$U(x, s) = \frac{x}{2}$ $U(x, s) = \frac{e^{ikr}}{2ki}$ $U(x, s, t) = \frac{-H(ct-r)}{2c}$
二維 Laplace 方程 Helmholtz 方程式 彈性力學方程式	$\nabla^2 u = 2\pi\delta(x - s)$ $\nabla^2 u + k^2u = 2\pi\delta(x - s)$ $\sigma_{p,j,j} = \delta_q(x - s)$	$U(x, s) = \ln(r)$ $U(x, s) = \frac{-i\pi H_0^{(1)}(kr)}{2}$ Kelvin 解 變位解 $-U_{pq}(x, s)$ 曳引力解 $-T_{pq}(x, s)$
三維 Laplace 方程 Helmholtz 方程式 彈性力學方程式	$\nabla^2 u = 4\pi\delta(x - s)$ $\nabla^2 u + k^2u = 4\pi\delta(x - s)$ $\sigma_{p,j,j} = \delta_q(x - s)$	$U(x, s) = \frac{-1}{r}$ $U(x, s) = \frac{-e^{-ikr}}{r}$ Kelvin 解 變位解 $-U_{pq}(x, s)$ 曳引力解 $-T_{pq}(x, s)$

(\* : 此核函數請參閱第四章)。

## 1.8 核函數

在積分方程式的標準式如下：

$$\int_a^b k(x, y)\phi(y)dy + f(x) = \phi(x)$$

其中， $k(x, y)$  稱為積分方程的核函數 (Kernel Function)， $\phi(y)$  為源密度函數，而  $f(x)$  為外力函數。

## 1.8.1 核函數的特性

一般工程上所對應的積分方程核函數，常有以下特性

- (i) 若  $K(s, t) = K(s - t)$ ，則稱該函數具褶積性 (Convolution) 此特性在工程應用上常碰到，如不老化黏彈材料之鬆弛模數 (relaxation modulus),  $E(t - \tau)$ ，隨機振動穩態過程的自相關函數 (stationary process),  $R(t - \tau)$ ，彈性力學之基本解 (Kelvin solution),  $K(x - s)$ ，另空間變異性的統計函數  $\sigma(x - s)$ ，均具褶積性 (Convolution)，此特性很適合作 Fourier 或 Laplace 轉換。
- (ii) 若滿足  $K(s, t) = K(t, s)$ ，則稱該函數具對稱性，一般保守力場，經由功能互換的應用，常可導得對稱的核函數。
- (iii) 奇異性見下表，說明於後

核函數的奇異性  
核函數的奇異強度

一維積分	二維積分	奇異強度大小
$O(\ln(r))$	$O(1/r)$	弱奇異
$O(1/r)$	$O(1/r^2)$	強奇異
$O(1/r^2)$	$O(1/r^3)$	超強奇異

(1). 弱奇異 (Weak Singularity)

積分方程式:

$$u(p) - \lambda \int K(p, q)u(q)dV(q) = f(p)$$

其中， $dV(q) = dx_1 dx_2 dx_3 \dots dx_m$ ，表  $m$  層積分。若核函數  $K(p, q)$ ，存在  $0 \leq \alpha \leq m$ ，使得  $r^\alpha \cdot K(p, q)$  有界，其中  $r$  為  $p, q$  之距離。亦即  $K(p, q) = A(p, q)/r^\alpha$ ，若  $A(p, q)$  為有界函數，則稱  $K(p, q)$  為弱奇異。

範例:  $\int \ln(r)dr = \int \ln |y - x| dx$

其中， $K(p, q) = \ln(r)$ ，存在  $0 \leq \alpha \leq 1$ ，取  $\alpha = 1$ ，則  $r \ln(r)$  有界，故  $\ln(r)$  對一維 (1-D) 積分而言為弱奇異。

(2). 強奇異，比弱奇異強一個階數 (order)。

(3). 超強奇異則高兩個階數 (order)。



## 4. 簡化性 (Degenerate Kernel)

簡化核函數定義: 如果核函數  $K(x, s)$  可以寫成如下變數分離式

$$K(x, s) = \sum_{k=1}^n a_k(x)b_k(s)$$

的話, 則稱  $K(x, s)$  為簡化核函數。一般所謂特徵值展開法來求基本解, 即為簡化核函數的一例。對具簡化核函數的積分方程而言, 其解法比較特殊, 舉例說明如下:

範例:

若  $k(x, s)$  具簡化性, 求解如下積分方程式  $\psi(x)$

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \lambda \int_a^b K(x, s)\psi(s)ds + f(x) \\ &= \lambda \sum_{i=1}^n a_i(x) \int_a^b b_i(s)\psi(s)ds + f(x) \end{aligned} \quad (1.207)$$

令  $\int_a^b b_i(s)\psi(s)ds = c_i$ , 則

$$\psi(x) = \lambda \sum_{i=1}^n a_i(x)c_i + f(x)$$

為其解。然而  $c_i = ?$  (當然和  $\psi(x)$  有關)。

$c_i$  之求法:

將上式兩邊乘上  $b_m(x)$  從  $a$  積到  $b$ , 可得

$$\int_a^b \psi(x)b_m(x)dx = \lambda \sum_{i=1}^n \int_a^b a_i(x)b_m(x)dx c_i + \int_a^b b_m(x)f(x)dx \quad (1.208)$$

$$\text{令 } \int_a^b a_i(x)b_m(x)dx = A_{im}, \quad \int_a^b b_m(x)f(x)dx = B_m$$

$$\text{所以, } c_m = \lambda A_{im}c_i + B_m$$

$$(\delta_{im} - \lambda A_{im})c_i = B_m$$

$$\det | \delta_{im} - \lambda A_{im} | = D_n(\lambda)$$

如果  $D_n(\lambda) \neq 0$ , 則積分方程有唯一解。如果  $D_n(\lambda) = 0$ , 則積分方程無解。(除非  $B = 0$  或  $\int_a^b f(x)y^*(x)dx = 0$ , 其中  $y^*(x)$  為  $K(x, s)$  的共軛運算元  $K^*(x, s)$  的齊次解。即  $K^*y^* = 0$ , 請參考 § 1.3.7 線性代數定理)。

## 1.8.2 密度函數連續性與Lyapunov 平面條件

積分方程，除了核函數外，尚有密度函數，而密度函數在積分區間的連續性對於該積分值是否存在影響甚巨。就一般密度函數的連續性而言有三種，

1. 連續 (continuous)

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon, \text{ if } |x - y| < \delta(\epsilon, y)$$

2. 均勻連續 (uniformly continuous)

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon, \text{ if } |x - y| < \delta(\epsilon)$$

3.  $H$  - 連續 (Holder Continuous)

$$|f(x) - f(y)| < A |x - y|^\lambda$$

4.  $L$  - 連續 (Lipschitz Continuous)

$$|f(x) - f(y)| < A |x - y|^\alpha$$

其中， $A, \alpha, \lambda$  為常數 ( $0 < \lambda \leq 1$ )。

一般積分方程式中，密度函數均有  $H$  連續的條件，因此可利用加減法技巧降低奇異階數如下

$$\int k(x, y)\phi(y)dy = \int k(x, y)(\phi(y) - \phi(x))dy + \int k(x, y)\phi(x)dy$$

當  $x \rightarrow y$  時，降奇異階數一階，因為  $|\phi(y) - \phi(x)| \rightarrow O(r)$ ，如此才易於數值處理。

以上密度函數所分布的二維表面，在數學上一般定義該面需滿足 Lyapunov Surface，說明於下：

Lyapunov 平面條件的定義：

1. 面上任意點均存在唯一的切平面與法向量。
2. 如圖所示，任意兩點  $M_1, M_2$  其距離為  $r$ ，而其法向量夾角為  $\theta$ ，則

$$\theta < Er^\lambda, \quad (0 < \lambda \leq 1)$$

其中， $E, \lambda$  為常數

3. 對於面上所有點  $M$ ，均存在一固定數  $d$ ，使得以  $M$  為球心， $d$  為半徑的半球面，和過  $M$  法向量方向的平行線最多只有一個交點。

滿足以上三條件的曲面稱為 Lyapunov 面。

在邊界元素法的數值分析上，若遇上角點問題 (Corner) 雖不滿足 Lyapunov 條件，但仍能以雙節點予以解決，可參閱 Banerjee 一書。另亦可由對偶積分式的第二式求得獨立的角點束制方程，而不需使用雙結點技巧，可參閱邱建滄君之碩士論文。

Helmholtz

Helmholtz

Helmholtz

Helmholtz

Helmholtz

海大河工研究所陳正宗 對偶邊界元素法

【存檔：e:/dualbem/dbem1-1.te】【建檔:July./2/'2006】