

第三章

Laplace 方程式的應用

3.1 簡介

經過第一章的數學基礎介紹與第二章的數值技巧說明後，以下兩章將分別闡述邊界元素法在 Laplace 方程式、彈性力學與裂縫問題的應用。在實際工程應用上，Laplace 方程式經常遇到，而列於本章的原因如下：

- (1). 控制方程式簡單。
 - (2). Laplace 方程式是最早使用積分方程來求解的。
 - (3). Laplace 方程式在工程應用甚廣，舉凡 Darcy 流場、穩態熱傳、電磁場、地下水滲流、彈力扭轉及反平面問題等，參見表 3.1。
 - (4). 對二維 Laplace 方程而言，因其與複數相關，在物理意義較易說明，參見表 3.1。
- 因此，Laplace 方程式常被用來作為說明邊界元素法的例子。

表 3.1 Laplace 方程式的應用

積分方程在 Laplace 方程式的應用，文獻上包括以下幾種：

(1). 邊界元素法 (BEM)、(2). 邊界積分法 (BIEM)、(3). 表面速度分佈法 (Surface-velocity method)、(4). 表面偶極分佈法 (Surface-doublet method)、(5). 表面奇異源分佈法 (Surface-singularity method)、(6). 內點奇異源分佈法 (Internal Singularity Method)、(7). 小板法 (Panel method) 與 (8). 複數邊界元素法 (CVBEM)。

茲列表 3.2 說明如下：

表 3.2 Laplace 方程式以積分方程求解之文獻回顧

表 3.2 所述之各種方法，所處理問題的方式雖有不同，但基於本書所提的對偶積分式架構而言，在理論基礎與解題邏輯上均可解釋為其特例。而 U, T, U^*, T^* 四個核函數的物理意義，更有助於對勢論 (Potential theory) 之瞭解。本章將以 Laplace 方程式為例，以第一章所提的數學理論，配合第二章的數值技巧，進行其邊界元素法的推導，並輔以一程式說明之。

3.2 基本方程式

Laplace 方程式為一典型的橢圓型 (Elliptic type) 偏微分方程，其控制方程式與邊界條件如下：

圖 3.1 典型橢圓型 (Elliptic type) 邊界值問題

控制方程式 $\nabla^2 u(x) = 0, x \in D$

其中，二維時， $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ ，三維時， $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 。

邊界條件：

$$u = \bar{u}, \quad x \text{ on } B_1$$

Table 1: 表3.2 Laplace 方程式以積分方程求解之文獻回顧

年代	創見
1828	Green's identity 恆等式導出
1850	Kelvin 再度發現 Green 恆等式，並廣泛應用
1872	Betti's 導得功能互換原理.
1886	Kirchoff 導得 Helmholtz 積分方程式.
1905	Fredholm 證明積分方程解的存在性.
1917	Trefftz 使用連續代入法解積分方程的問題
1921	von Karman 和 Pohlhause 首先以積分方程解偏微分方程。
1927	Gunter 與 Muskhelishvili 分別建立純量與向量勢能理論
1928	Prager 以積分方程解勢流場.
1929	Kellog 建立勢論 (potential theory) 基礎.
1932	Lotz(女) 以 source 源解積分方程勢流場問題
1944	Somigliana 導得彈力恆等式 (Identity)
1950	計算機問世 (BEM 發展的催化劑)
1951	Vandevy 以 source 和 vortices 源解積分方程勢流場問題
1953	Kellog "Foundation of potential theory" (書印行)
1958	Smith 和 Pierce 使用計算機解以 BEM 解問題
1963	Jaswon and Symn 提出 Torsion 積分方程解法
1964	Hess 和 Smith 以 BEM 解三維勢流場問題
1965	Massonnet 間接法疊加觀念應用.
1967	Jaswon and Ponter 以積分方程解 Biharmonic 問題
1968	Oliveria 廣義間接法疊加觀念應用.
1970	Brebbia 定名邊界元素法 (BEM)
1973	Woodward 以小板法解氣動力問題
1978	Clement, Rizzo 解二維 elliptic P.D.E.
1981~1982	Hartmann 解決角點 (corner) 積分問題.
1982	Hromadka 開始複變數邊界元素法研究
1986	洪宏基，陳正宗導得超強奇異積分 Hadamard 主值， 並應用它解決了退化邊界 BEM 的困難，於含阻水牆上有所應用
1987	洪宏基，陳正宗導得邊界積分的統一式，並將文獻各類方法視為對偶積分式的特
1989	陳正宗，洪宏基將對偶積分式應用在 Darcy 流
1990	王政盛，朱信，陳正宗將 Mangler(Hadamard) 主值應用在氣動力小板法上
1994	陳正宗推廣對偶積分方程到對偶級數模式
1994	陳正宗建構超奇異積分與發散級數的橋梁
1994	陳正宗與洪宏基將對偶積分式應用在角點
1996	陳正宗與洪宏基推廣內域對偶積分方程到外域對偶積分方程
1996	陳正宗、洪宏基、葉超雄與全湘偉將 Stokes' transformation 引入對偶級數模式

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \bar{t}, \quad x \text{ on } B_2$$

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} = \bar{m}, \quad x \text{ on } B_3$$

典型橢圓型邊界值問題有以下三種：

- (1). Dirichlet (位移) 型，只有 B_1 邊界條件。
- (2). Neumann (曳引力) 型，只有 B_2 邊界條件。
- (3). Robin (Mixed) 型，含有 B_3 邊界條件或同時含有 B_1, B_2 之邊界條件。

Laplace 方程在物理問題上常遇到，舉兩例說明如下

範例一：地球重力位能

地球重力位能 $U(r) = -\frac{GMm}{r}$ ，滿足 Laplace's 方程式與邊界條件 $\lim_{r \rightarrow \infty} U = 0$ 。

範例二：勢流場問題

不可壓縮非旋轉流，速度勢位 u (Velocity potential)，經一障礙物後之流場分析。

圖 3.1 勢流場問題

令 ψ 為擾動勢位，則 u 可表成下式

$$u = \psi + V_\infty \cdot r$$

其中， r 表示位置向量， $r = x i + y j$ ， i, j 為 x, y 方向之單位向量。而

$$\nabla u = \nabla \psi + V_\infty$$

其中， $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j$ ， V_∞ 為遠流 (onset flow) 之流速。令 $\nabla u = V$ ， $\nabla \psi = v$ ，則

$$V = v + V_{\infty} \circ$$

$$\nabla \cdot V = 0 = \nabla \cdot v = \nabla \cdot (\nabla \psi) = \nabla^2 \psi = 0$$

因此， ψ 滿足 Laplace 方程式，其邊界條件為流切條件 (Flow tangency) 如下：

$$V \cdot n = 0$$

亦即

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = -V_{\infty} \cdot n$$

3.3 勢流場域內積分方程式與邊界積分方程式推導

以下章節中將分別以三種方法來推導 Laplace 方程式之積分方程，有關各方法請參見下表 3.3

表 3.3 積分方程推導說明表

積分方程推導說明表		
各類方法	代表人物	特性
Green's or Somigliana 恆等式	Rizzo , Cruse	積分方程未離散化前為 exact form
權餘法 (Weighted residual method)	Brebbia	積分方程的推導含逼近的意味 (Rizzo 特別提到)
從物理意義想	Heise 葉超雄 洪宏基 黃燦輝	易了解

以下即針對 Laplace 方程式的積分式推導分述如下：

3.3.1 格林恆等式 (Green's identity)

吾人首先考慮散度定理 (Divergence theorem) 如下:

$$\int_V \nabla \cdot \Phi \, dV = \int \Phi \cdot n \, dB$$

假設 u, ψ 為勢流中之純量勢位，若令 $\Phi = u \nabla \psi$ ，則

$$\nabla \cdot \Phi = \text{div}(\Phi) = \nabla \cdot (u \nabla \psi) \quad (3-1)$$

$$= u \nabla^2 \psi + \nabla u \cdot \nabla \psi \quad (3-2)$$

將 $\nabla \cdot \Phi$ 代回上式，可得

$$\begin{aligned} \int_V (u \nabla^2 \psi + \nabla u \cdot \nabla \psi) \, dV &= \int_B u \nabla \psi \cdot n \, dB \\ &= \int_B u \frac{\partial \psi}{\partial n} \, dB \end{aligned} \quad (3-3)$$

同理，若將 u, ψ 角色對調，亦可得如下表示式

$$\begin{aligned} \int_V (\psi \nabla^2 u + \nabla \psi \cdot \nabla u) \, dV &= \int_B \psi \nabla u \cdot n \, dB \\ &= \int_B \psi \frac{\partial u}{\partial n} \, dB \end{aligned} \quad (3-4)$$

因此，將以上二式相減，即得

$$\int_V (u \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 u) \, dV = \int_B (u \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial u}{\partial n}) \, dB$$

上式即為吾人所熟悉的格林恆等式 (Green's Identity)，可視為第一章所提之自我伴隨運算元 (Self-adjoint Operator) 的一個特例，說明如下:

$$\int_V (u L \psi - \psi L^* u) \, dV = J(u, \psi) \big|_B$$

其中， $L = L^* = \nabla^2$ ， $J(u, \psi) = \int_B [u \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial u}{\partial n}] \, dB(s)$ 。若考慮 u 為滿足 $\nabla^2 u = 0$ 之欲解函數，而特別選取 ψ 為基本解，則 ψ 需滿足 $\nabla^2 \psi = 2\pi\delta(r)$ ，由 § 1.7 節可解得 $\psi = \ln(r)$ 。因此可將 $\psi = \ln(r)$ 代入格林恆等式，可得

$$2\pi u(s) = \int_B (u(x) \frac{\partial \ln(r)}{\partial n_x} - \ln(r) \frac{\partial u(x)}{\partial n_x}) \, dB(x), \quad s \in D$$

為方便往後物理意義之說明，將其上式寫成 $u(x)$ 如下

$$2\pi u(x) = \int_B (u(s) \frac{\partial \ln(r)}{\partial n_s} - \ln(r) \frac{\partial u(s)}{\partial n_s}) dB(s), \quad x \in D$$

式中， n_s 表示 s 點法向量， $dB(s)$ 表示邊界積分。於退化邊界問題的應用時，為了再得到另一條獨立方程式，我們將上式對 $u(x)$ 在 n_x 方向作法向偏微 $\frac{\partial}{\partial n_x}$ ，且定義以下四個核函數：

$$U(s, x) = \ln(r) \quad (3-5)$$

$$T(s, x) = \frac{\partial U(s, x)}{\partial n_s} \quad (3-6)$$

$$L(s, x) = \frac{\partial U(s, x)}{\partial n_x} \quad (3-7)$$

$$M(s, x) = \frac{\partial^2 U(s, x)}{\partial n_x \partial n_s} \quad (3-8)$$

因此，可得域內對偶積分方程式如下：

$$2\pi u(x) = \int_B T(s, x) u(s) dB(s) - \int_B U(s, x) \frac{\partial u(s)}{\partial n_s} dB(s), \quad x \in D \quad (3-9)$$

$$2\pi \frac{\partial u(x)}{\partial n_x} = \int_B M(s, x) u(s) dB(s) - \int_B L(s, x) \frac{\partial u(s)}{\partial n_s} dB(s), \quad x \in D \quad (3-10)$$

其中， $t(s) = \frac{\partial u}{\partial n_s}$ ， $t(x) = \frac{\partial u}{\partial n_x}$ ， x 在域內。

為導得邊界積分方程式，需將 x 逼近邊界，以 § 1.10.4 節所提之繞奇異點積分 (Semi-circle contour integral)，可得邊界積分方程式如下：

$$\alpha u(x) = C.P.V. \int_B T(s, x) u(s) dB(s) - R.P.V. \int_B U(s, x) \frac{\partial u(s)}{\partial n_s} dB(s) \quad (3-11)$$

$$\alpha \frac{\partial u(x)}{\partial n_x} = H.P.V. \int_B M(s, x) u(s) dB(s) - C.P.V. \int_B L(s, x) \frac{\partial u(s)}{\partial n_s} dB(s) \quad (3-12)$$

其中， x 在邊界上。在本書中，常使用符號為 $t(s) = \frac{\partial u(s)}{\partial n_s}$ ， $t(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial n_x}$ 。因此域內點的邊界積分式，可寫成

$$2\pi u(x) = \int_B T(s, x) u(s) dB(s) - \int_B U(s, x) t(s) dB(s) \quad (3-13)$$

$$2\pi t(x) = \int_B M(s, x) u(s) dB(s) - \int_B L(s, x) t(s) dB(s) \quad (3-14)$$

而邊界點的邊界積分式，則可寫成

$$\alpha u(x) = C.P.V. \int_B T(s, x) u(s) dB(s) - R.P.V. \int_B U(s, x) t(s) dB(s), \quad x \in B$$

$$\alpha t(x) = H.P.V. \int_B M(s, x) u(s) dB(s) - C.P.V. \int_B L(s, x) t(s) dB(s), \quad x \in B \quad (3-15)$$

3.3.2 加權剩餘法

考慮圖 3.1 之問題若無 B_3 邊界，則此問題若以權餘法解之，可先定義殘餘值，權衡函數和對應領域分別為如下：

$$\begin{aligned} \nabla^2 u - 0 &= R_1, \text{ 其權衡函數為 } W_1, \quad x \in V \\ -(u - \bar{u}) &= R_2, \text{ 其權衡函數為 } W_2, \quad x \text{ on } B_1 \\ \frac{\partial u}{\partial n} - \bar{t} &= R_3, \text{ 其權衡函數為 } W_3, \quad x \text{ on } B_2 \end{aligned}$$

根據最小權餘定理可得

$$\int_V R_1 \cdot W_1 dV + \int_{B_1} R_2 \cdot W_2 dB + \int_{B_2} R_3 \cdot W_3 dB = 0 \quad (3-16)$$

首先，取權衡函數如下：

$$W_1 = W_3 = U(x, s)$$

$$W_2 = T(x, s)$$

代入式 (3.16)，再利用 Green 恆等式，重新整理可得

$$2\pi u(s) = \int_B (T(x, s)u(x) - U(x, s)t(x))dB(x)$$

配合 x 為場點的定義，則勢位場 u 可改為 x 的函數，因此上式可改寫成

$$2\pi u(x) = \int_B (T(s, x)u(s) - U(s, x)t(s))dB(s)$$

同理，若取

$$W_1 = W_3 = L(x, s) = \frac{\partial U(s, x)}{\partial n(x)}$$

$$W_2 = M(x, s) = \frac{\partial T(s, x)}{\partial n(x)}$$

再利用 Green 恆等式，重新整理可得

$$2\pi t(s) = \int_B (M(x, s)u(x) - L(x, s)t(x))dB(x)$$

同理，因為 u 為 x 的函數，所以上式改寫成

$$2\pi t(x) = \int_B (M(s, x)u(s) - L(s, x)t(s))dB(s)$$

同樣，可導得域內點對偶邊界積分式。

為導得邊界點邊界積分方程式，需將 x 逼近邊界，可得邊界點邊界積分方程式如下：

$$\alpha u(x) = C.P.V. \int_B T(s, x)u(s)dB(s) - R.P.V. \int_B U(s, x)t(s)dB(s) \quad (3-17)$$

$$\alpha t(x) = H.P.V. \int_B M(s, x)u(s)dB(s) - C.P.V. \int_B L(s, x)t(s)dB(s) \quad (3-18)$$

其中， α 為體角， x 在邊界上。和 Green Identity 導得的結果相同。

經由以上的推導，吾人可發現兩個結論：

表 3.4 趨近邊界的運算與法向微分運算的交換性

(1). 趨近邊界的運算與法向微分運算具交換性：一個有趣的結果是以上是分別對兩條域內點對偶邊界積分式作趨近邊界之處理所得，若吾人考慮先對域內點對偶邊界積分式的第一式進行趨近邊界處理後，再作法向微分運算，亦可得到直接由對域內點對偶邊界積分式的第二式再進行趨近邊界處理的式子，此點表明了趨近邊界的運算與法向微分運算是可先後交換的，而最後都是導得超強奇異的 Hadamard 積分式（參見表 3.4）。

(2). 另一發現為 Hadamard 主值的計算，可由不同的方法求得，值得注意的是第二種算法需在 Hadamard 主值的觀念下完成。參見下式說明，

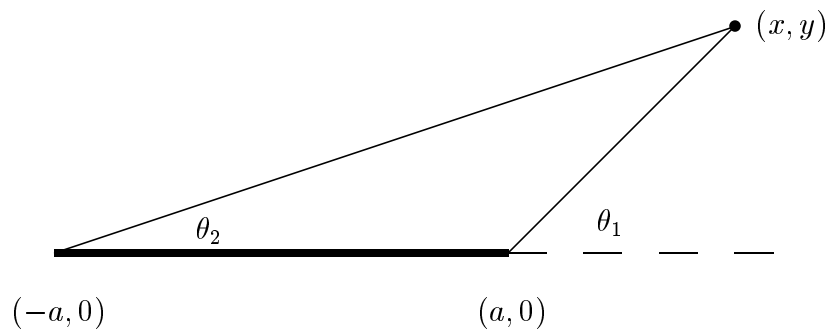
方法 1 — 先微分再逼近邊界

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2 + y^2} dx = \lim_{y \rightarrow 0} -\frac{\tan^{-1}(y/x)}{y} \Big|_{x=-1}^{x=1} = \lim_{y \rightarrow 0} -2 \tan^{-1}(y)/y = -2 \quad (3-19)$$

上式已使用了反三角關係與 h'Lospital's rule，以上推導在 Mangler 的文獻上誤以為無限大，因他忘了使用如下反三角函數關係

$$\tan^{-1}(x) + \tan^{-1}(1/x) = \pi/2$$

參考下圖:



$$\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x-a}\right)$$

$$\theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x+a}\right)$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{y}{x-a}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{y}{x+a}\right) = \begin{cases} \pi, & |x| < a, y \rightarrow 0^+ \\ -\pi, & |x| < a, y \rightarrow 0^- \\ 0, & |x| > a \end{cases}$$

(file:disc.te)

方法 2 — 先逼近邊界再微分

$$HPV \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = \frac{d}{dx} \{CPV \int_{-1}^1 \frac{-1}{x} dx\} = \int_{-1}^{-\epsilon} \frac{1}{x^2} dx + \int_{\epsilon}^1 \frac{1}{x^2} dx - 2/\epsilon = -2 \quad (3-20)$$

上式已使用了 Leibnitz' rule。

$$\frac{d}{dx} \left\{ \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, t) dt \right\} = \int_{a(x)}^{b(x)} f_x(x, t) dt + f(x, b(x))b'(x) - f(x, a(x))a'(x)$$

兩者導得相同結果。以上 § 3.3.1 節與 § 3.3.2 節所導的邊界積分式乃是邊界元素法中直接法的理論基礎。

3.3.3 物理意義

積分方程的物理意義不外乎是勢位 (Potential) 的疊加觀念，而勢位即是由分佈奇異源 (Singularity source) 所產生，因此就有影響函數的疊加理念。基於此，吾人可先定義以下四個核函數：

$U(x, s)$ ：表示在 s 處的源所造成 x 處的勢位

$U^*(x, s)$ ：表示在 s 處的偶極所造成 x 處的勢位

$T(x, s)$ ：表示在 s 處的源所造成 x 處的法向微分勢位

$T^*(x, s)$ ：表示在 s 處的偶極所造成 x 處的法向微分勢位

由疊加原理可知勢位係由所有奇異源 (含單層與雙層) 所影響的結果列式如下：

$$u(x) = \int_B (U(x, s)\phi(s) + U^*(x, s)\psi(s))dB(s)$$

$$t(x) = \int_B (T(x, s)\phi(s) + T^*(x, s)\psi(s))dB(s)$$

其中， $\phi(s)$ 表示在邊界上內外法向微分勢位之差， $\psi(s)$ 表示在邊界上內外勢位之差。

3.3.4 核函數的關係

由以上三種對偶積分式的邊界元素法推導中，共有

表 3.5 核函數特性表

		$U_{ki}(s,x)$	$T_{ki}(s,x)$	$L_{ki}(s,x)$	$M_{ki}(s,x)$
對應 密度 函數		正規邊界 $t_k(s)$	正規邊界 $u_k(s)$	正規邊界 $t_k(s)$	正規邊界 $u_k(s)$
		退化邊界 $\sum t_k(s)$	退化邊界 $\Delta u_k(s)$	退化邊界 $\sum t_k(s)$	退化邊界 $\Delta u_k(s)$
對稱性		$U_{ki}(x,s)$	$-U_{ik}^*(x,s)$	$T_{ik}(x,s)$	$-T_{ik}^*(x,s)$
		$U_{ik}(x,s)$			$M_{ik}(x,s)$
勢能 特性		單層 勢能	雙層 勢能	單層勢能的 曳引力運算	雙層勢能的 曳引力運算
奇 異 性	二 維	$O(\ln(r))$	$O(1/r)$	$O(1/r)$	$O(1/r^2)$
	三 維	$O(1/r)$	$O(1/r^2)$	$O(1/r^2)$	$O(1/r^3)$
	維				
越邊界 勢能 連續性		連續	不連續	法向面曳引力 不連續切向面 曳引力為連續	法向面曳引力 假連續切向面 曳引力不連續
主值 存在 觀念		Riemann	Cauchy	Cauchy	Hadamard

註：此表之二維核函數 $U(s, x) = -\ln(r)$ ，三維 $U(s, x) = 1/r$ 。八個核函數，分別為直接法的 $U(s, x), T(s, x), L(s, x), M(s, x)$ 與間接法的 $U(x, s), T(x, s), U^*(x, s), T^*(x, s)$ ，此八個核函數的關係與特性可參考表 3.5，為證明前述四種導法的一致性，核函數需有如下關係如下

- (1). $U(x, s) = U(s, x)$
- (2). $U^*(x, s) = -T(s, x)$
- (3). $T(x, s) = L(s, x)$
- (4). $T^*(x, s) = -M(s, x)$

證明：(1). $U(x, s) = U(s, x)$

此式之證明可直接由核函數的物理意義知，因其恰為功能互換原理之數學式。亦即“於 s 處之集中奇異源所產生在 x 處的勢位值 $U(x, s)$ ”應等於“於 x 處之集中奇異源所產生在 s 處的勢位值 $U(s, x)$ ”。若直接由二維核函數 $U(s, x) = -\ln(r)$ ，三維 $U(s, x) = 1/r$ 亦可看出。

證明: (2). $U^*(x, s) = -T(s, x)$

此式之證明其實在 § 1.9.2 由偶極的物理意義已證得，在此以另一種方式證明，今假設兩種勢位狀態，如下圖所示。

圖 3.2 $U^*(x, s) = -T(s, x)$ 圖示證明

則由功能互換原理可列式如下:

$$u(s) + \int_B \{T(x, s)u^-(x) - T(x, s)u^+(x)\}dB(x) = \int_B t(x)u(x)dB(x) = 0 \quad (3-21)$$

若取內外相對勢位如下

$$g(x) \equiv u^-(x) - u^+(x) = \delta(x - x')$$

則

$$u(s) = -T(x', s) = U^*(s, x')$$

證明: (3). $T(x, s) = L(s, x)$

由式 (3.7) $L(s, x)$ 之定義和 (1) 之證明，可導得

$$L(s, x) = B(\partial, n_x)\{U(s, x)\} = B(\partial, n_x)\{U(x, s)\} = T(x, s) \quad (3-22)$$

其中， $B(\partial, n_x) = \frac{\partial}{\partial n_x}$ 為對 n_x 作法向導微。

證明：(4). $T^*(x, s) = -M(s, x)$

同理，由式 (3.8) $M(s, x)$ 之定義和 (2) 之證明，可導得

$$M(s, x) = B(\partial, n_x)\{T(s, x)\} = B(\partial, n_x)\{-U^*(x, s)\} = -T^*(x, s) \quad (3-23)$$

由以上所證，可知真正不同的核函數只有三個，分別為：直接法的 $U(s, x), T(s, x)$ 與 $M(s, x)$ ，或是間接法的 $U(x, s), U^*(x, s)$ 與 $T^*(x, s)$ 。而其他兩個，即直接法的 $L(s, x)$ 與間接法的 $T(x, s)$ 均可分別由 $T(s, x)$ 與 $U^*(x, s)$ 經變換求得。其實際表示式請參閱核函數表。值得一提的是，

- (1). 核函數若對場點 x 微分，則所得之核函數物理意義，代表同源、不同反應的影響函數，列式如下

$$B(\partial, n_x)U(x, s) = T(x, s)$$

其中， $U(x, s)$ 與 $T(x, s)$ 分別表示同為集中奇異源所造成不同的勢位場與勢位導微場。以簡支梁為例，若 $U(x, s)$ 表示梁受集中力的位移基本解，則 $T(x, s)$ 為梁受集中力的斜率基本解。

- (2). 核函數若對源點 s 微分，則所得之核函數物理意義，代表不同源、同反應的影響函數，列式如下

$$B(\partial, n_s)U(x, s) = -U^*(x, s)$$

其中， $U(x, s)$ 與 $U^*(x, s)$ 分別表示由不同的集中奇異源 (source) 與偶極源 (dipole) 所造成的勢位場。以簡支梁為例，若 $U(x, s)$ 表示梁受集中力的位移基本解，則 $U^*(x, s)$ 為梁受集中彎矩的位移基本解。

值得注意的是，

- (1). 四個核函數和場點或源點在邊界的法向量具如下關係

當 $n(s^+) = -n(s^-)$, $(s_1^+, s_2^+) = (s_1^-, s_2^-)$ 時

$$U(s^+, x) = U(s^-, x)$$

$$T(s^+, x) = -T(s^-, x)$$

$$L(s^+, x) = L(s^-, x)$$

$$M(s^+, x) = -M(s^-, x)$$

參見下表 3.6 :

表 3.6 核函數與場點、源點之法向量關係

(2). 若 $T(s, x)$ 與 $L(s, x)$ 對相同密度函數積分所造成的勢能，在橫越邊界時，分別為不連續。但兩者之和，在密度函數滿足 *Hölder* 條件下，在橫越邊界時為連續。說明如下

$$P(x) = \int_B \{T(s, x) + L(s, x)\} \mu(s) dB(s) \quad (3-24)$$

$P(x)$ 恰為連續。

以 § 1.9 節所得的各類勢能圖說明如下

§ 1.9 節所得的各類勢能圖

另以 § 3.7 節所得一維 Lapace 方程各類勢能圖 (參見 § 3.7)

一維 Lapace 方程各類勢能圖

(3). 勢流場核函數的實際表示式如下:

勢流場核函數

3.4 各類方法探討

基於以上之數學推導與物理疊加觀念，文獻上可歸納出以下幾種方法，分述如後：

(1). 間接法第一類 — 單層勢能法

傳統の間接法是源自於物理觀念的疊加原理。從數學的角度而言，間接法的觀念乃是找到既滿足控制方程又滿足邊界條件的積分表示式，一定是該問題的解，也可說成積分表示式內可含有人造的或稱為虛擬的未知密度函數。基於此點，吾人可說明間接法第一類（單層勢能法）如後，將 $u(x)$ 場表成下式：

$$u(x) = \int_B U(x, s) \phi(s) dB(s)$$

其中， $\phi(s)$ 表示虛擬單層密度函數。經法向微分運算後，可得 $t(x)$ 場如下：

$$t(x) = \int_B T(x, s) \phi(s) dB(s)$$

上述 $u(x)$ 場表示式，在定義域內均滿足控制方程式，至於邊界條件則用來決定邊界積分式中 $\phi(s)$ 的分佈，因此既滿足控制方程又滿足邊界條件，當然是其解。亦即該解之未定係數是隱藏在 $\phi(s)$ 中。而誤差的來源，則來自 $\phi(s)$ 的離散內插假設、幾何邊界之模擬與邊界條件之點配置 (Point collocation)，因此會有滲漏 (leakage) 問題，參見下圖 3.2。

圖 3.2 滲漏 (leakage) 問題

值得一提的是，文獻上常提 $\phi(s)$ 為虛擬密度函數不具物理意義，但確定的是其單位應是和積分表示式中的核函數單位成對偶 (dual) 關係，於此例即為勢位法向微分 t 的單位。若

以 § 3.3.3 節中物理意義的推導而言，其實是令 $\psi = 0$ ，而只取 ϕ 而已，文獻上所謂表面速度奇異源分佈法，即為此類。

(2). 間接法第二類 — 雙層勢能法

本法之觀念仍源自於奇異源疊加原理的物理觀念，所不同的是所採用之奇異源為雙層密度函數 $\psi(s)$ ，因此吾人可說明間接法第二類（雙層勢能法）如後，將 $u(x)$ 場表示成下式：

$$u(x) = \int_B U^*(x, s) \psi(s) dB(s)$$

其中， $\psi(s)$ 表示虛擬雙層密度函數。則 $t(x)$ 場可表示成

$$t(x) = \int_B T^*(x, s) \psi(s) dB(s)$$

上述 $u(x)$ 場表示式，在定義域內均滿足控制方程式。至於邊界條件則用來決定邊界積分式中 $\psi(s)$ 的分佈，因此既滿足控制方程又滿足邊界條件，當然是其解。亦即該解之未定係數是隱藏在 $\psi(s)$ 中。而誤差的來源，則來自 $\psi(s)$ 的離散內插假設、幾何邊界之模擬與邊界條件之點配置 (Point collocation)，因此也會有滲漏 (leakage) 問題。

值得一提的是，文獻上常提 $\psi(s)$ 為虛擬密度函數不具物理意義，但確定的是其單位應是勢位 u 的單位，若以本書物理意義的推導而言，其實是將 $\phi = 0$ ，只取 ψ 而已，文獻上所謂表面偶極奇異源分佈法即為此類。

(3). 間接法第三類 — 混合勢能法

對含退化邊界的邊界值問題而言，其邊界有兩類：一為正規邊界 S ，另一為退化邊界 C 。而從物理數學的特性可知，針對正規邊界而言，是以單層勢能模擬較適合；針對退化邊界而言，則以雙層勢能模擬較適合。因此，積分表示式可取混合式如下：

$$u(x) = \int_S U(x, s) \phi(s) dB(s) + \int_C U^*(x, s) \psi(s) dB(s)$$

$$t(x) = \int_S T(x, s) \phi(s) dB(s) + \int_C T^*(x, s) \psi(s) dB(s)$$

再由邊界條件決定隱藏在 $\phi(s)$ 與 $\psi(s)$ 之未定係數。

(4). 間接法第四類 — 廣義間接法

所謂廣義間接法乃是將虛擬密度分佈在離邊界一段距離處，此邊界可稱為輔助邊界，如此可避免奇異積分、角點 (Corner) 問題與滲漏問題，且可同時滿足控制方程與邊界條件的表示式。此法應用關鍵在於輔助邊界之最佳選擇。原則取決於避開奇異積分之計算與

病態問題之控制。應以誤差最小來考慮。其收斂條件，可參考黃志勇君之博士論文。而選取輔助邊界的原則為內域問題取外面，外域問題取裡面，如此才能在問題的域內完全滿足控制方程式，文獻上所謂內點奇異源分佈法，即是外域問題佈置內部奇異源的方法。可列式如下：

單層勢能法：

$$u(x) = \int_{B'} U(x, s) \phi(s) dB(s)$$

$$t(x) = \int_{B'} T(x, s) \phi(s) dB(s)$$

雙層勢能法：

$$u(x) = \int_{B'} U^*(x, s) \psi(s) dB(s)$$

$$t(x) = \int_{B'} T^*(x, s) \psi(s) dB(s)$$

其中， B' 為輔助邊界或虛擬邊界。因此本法有文獻稱為虛擬邊界元素法。

(5). 間接法第五類 — 體積勢能法

若將上述分佈在虛擬邊界的虛擬源改為集中源，則解可以下式表示：

體積（單層）勢能法：

$$u(x) = \sum_{j=1}^n U(x, s_j) \phi(s_j)$$

$$t(x) = \sum_{j=1}^n T(x, s_j) \phi(s_j)$$

體積（雙層）勢能法：

$$u(x) = \sum_{j=1}^n U^*(x, s_j) \psi(s_j)$$

$$t(x) = \sum_{j=1}^n T^*(x, s_j) \psi(s_j)$$

(6). 直接法第一類 — U, T 核函數法

上述 (1) ~ (4) 四種間接法均先求得虛擬量後，再求得實際物理量。而所謂直接法乃指所有的邊界欲求量均直接以邊界 u 與邊界 t 為未知量，而不以虛擬未知密度函數來推導

的方法。亦可說成以邊界 u, t 為狀態變數，來描述整個場的行為。對一般不含退化邊界的 Laplace 方程問題而言，均可使用如下域內點對偶邊界積分式的第一式解域內場

$$2\pi u(x) = \int_B T(s, x)u(s)dB(s) - \int_B U(s, x)t(s)dB(s)$$

至於邊界未知量，則用邊界點對偶邊界積分式的第一式

$$\pi u(x) = CPV \int_B T(s, x)u(s)dB(s) - RPV \int_B U(s, x)t(s)dB(s)$$

即可解，這是現今文獻上較常用的解法，於本書稱為 U, T 核函數法。

(7). 直接法第二類 — L, M 核函數法

同理，吾人可考慮域內對偶積分式的第二式來求解，則域內點對偶邊界積分式的第二式如下

$$2\pi t(x) = \int_B M(s, x)u(s)dB(s) - \int_B L(s, x)t(s)dB(s)$$

至於其邊界點的邊界積分式如下

$$\pi t(x) = HPV \int_B M(s, x)u(s)dB(s) - CPV \int_B L(s, x)t(s)dB(s)$$

亦可解決問題。值得一提的是 (5) 與 (6) 的方法雖均能獨自解決僅含正規邊界的問題，但本節方法，因 $L(s, x), M(s, x)$ 之奇異性較高，在數值方法上會有對角線較大的情形產生，應有助於數值處理。但對一含阻水牆的流場問題而言，以上兩種方法（直接法第一、二類），若僅對邊界作離散，則無法個別解決問題，會產生不唯一解，因此需兩者同時考慮，方能解出唯一的解，此點正是本書一直所強調的，也是對偶邊界元素法最主要的精神。

(8). 體積力法

前述之廣義間接法是在輔助邊界分佈未知密度源函數，但若將此分佈函數改以等效集中源分佈於定義域之外，則未知密度源函數可表示如下：

$$\phi(s) = \sum_{i=1}^N C_i \delta(s - s_i)$$

其中，未定係數 C_i 表示等效集中源強度，其大小需由邊界條件來決定，這種作法叫體積力法。本法最大的好處在於不需作邊界積分，而改以體積勢能的離散和來模擬。

3.5 對偶邊界積分式在含退化邊界問題的應用

若將邊界積分式的邊界 B 分為正規邊界 S 與退化邊界 C 如下：

$$B = S + C$$

其中，正規邊界 S 表示含單值 (Single valued) 物理量的邊界，退化邊界 C 表示含雙值物理量 (分別定義在 C^+ , C^- 的邊界)。

利用前述表 3.6 中四個核函數與源點和場點法向量的關係，可導得當 $x \in S$ 時，邊界積分式為

$$\begin{aligned} \alpha u(x) = & C.P.V. \int_S T(s, x) u(s) dB(s) - R.P.V. \int_S U(s, x) \frac{\partial u(s)}{\partial n_s} dB(s) \\ & + \int_{C^+} T(s, x) \Delta u(s) dB(s) - \int_{C^+} U(s, x) \Sigma \frac{\partial u(s)}{\partial n_s} dB(s) \end{aligned} \quad (3-25)$$

$$\begin{aligned} \alpha \frac{\partial u(x)}{\partial n_x} = & H.P.V. \int_S M(s, x) u(s) dB(s) - C.P.V. \int_S L(s, x) \frac{\partial u(s)}{\partial n_s} dB(s) \\ & + \int_{C^+} M(s, x) \Delta u(s) dB(s) - \int_{C^+} L(s, x) \Sigma \frac{\partial u(s)}{\partial n_s} dB(s) \end{aligned} \quad (3-26)$$

當 $x \in C^+$ 時，邊界積分式為

$$\begin{aligned} \alpha \Sigma u(x) = & C.P.V. \int_{C^+} T(s, x) \Delta u(s) dB(s) - R.P.V. \int_{C^+} U(s, x) \Sigma \frac{\partial u(s)}{\partial n_s} dB(s) \\ & + \int_S T(s, x) u(s) dB(s) - \int_S U(s, x) \frac{\partial u(s)}{\partial n_s} dB(s) \end{aligned} \quad (3-27)$$

$$\begin{aligned} \alpha \Delta \frac{\partial u(x)}{\partial n_x} = & H.P.V. \int_{C^+} M(s, x) \Delta u(s) dB(s) - C.P.V. \int_{C^+} L(s, x) \Sigma \frac{\partial u(s)}{\partial n_s} dB(s) \\ & + \int_S M(s, x) u(s) dB(s) - \int_S L(s, x) \frac{\partial u(s)}{\partial n_s} dB(s) \end{aligned} \quad (3-28)$$

其中

$$\Sigma u(s) = u(s^+) + u(s^-) \quad (3-29)$$

$$\Delta u(s) = u(s^+) - u(s^-) \quad (3-30)$$

$$\Sigma \frac{\partial u}{\partial n}(s) = \frac{\partial u}{\partial n}(s^+) + \frac{\partial u}{\partial n}(s^-) \quad (3-31)$$

$$\Delta \frac{\partial u}{\partial n}(s) = \frac{\partial u}{\partial n}(s^+) - \frac{\partial u}{\partial n}(s^-) \quad (3-32)$$

以上四式反應了在退化邊界上的邊界未知量多了一倍，亦可說成由一個變成兩個，邊界積分式的密度函數包含了退化邊界兩邊物理量之和與之差來描述，這裡可看出超奇異積分式的角色了。因為沒有它，方程式的數目就會比未知數來得少了！會有解不唯一的問題。換句話說，對偶邊界積分式對所有的邊界值問題（含或不含退化邊界）提供了充份足夠的邊界物理量束制條件。亦即邊界值問題真正的主集自由度 (master set) 為邊界未知量，而場內物理量則為僕集 (slavery set)。而所有邊界物理量，可再分成未知和已知邊界條件，前者可再看成主集，後者為僕集，而其間的相容關係則靠邊界積分式來維繫。對對偶邊界積分式的第一式而言，卻無法反映 x 在 C^+ 或 C^- 所造成束制方程的不同；第二式亦然。第一式得到完全相同的代數方程；第二式則恰好差個負號。但是第一和第二式在 $x \in C^+$ 時所得的代數方程是獨立的，因此需合併使用，才能定出唯一解。

3.5.1 域內點與邊界點勢位與勢位梯度的計算

在求得邊界未知量後，域內點與邊界點勢位與勢位梯度的計算，係將求得的邊界量透過核函數疊加而得。當 $x \in D$ 時，域內點勢位與勢位邊界法向梯度，可分別由下兩式計算

$$\begin{aligned} 2\pi u(x) = & \int_{C^+} T(s, x) \Delta u(s) dB(s) - \int_{C^+} U(s, x) \Sigma \frac{\partial u(s)}{\partial n_s} dB(s) \\ & + \int_S T(s, x) u(s) dB(s) - \int_S U(s, x) \frac{\partial u(s)}{\partial n_s} dB(s) \end{aligned} \quad (3-33)$$

$$\begin{aligned} 2\pi \frac{\partial u(x)}{\partial n_x} = & \int_{C^+} M(s, x) \Delta u(s) dB(s) - \int_{C^+} L(s, x) \Sigma \frac{\partial u(s)}{\partial n_s} dB(s) \\ & + \int_S M(s, x) u(s) dB(s) - \int_S L(s, x) \frac{\partial u(s)}{\partial n_s} dB(s) \end{aligned} \quad (3-34)$$

當 $x \in S$ 時，邊界點勢位的邊界切向梯度，可由下式計算

$$\begin{aligned} \pi \frac{\partial u(x)}{\partial t_x} = & H.P.V. \int_S M^t(s, x) u(s) dB(s) - C.P.V. \int_S L^t(s, x) \frac{\partial u(s)}{\partial n_s} dB(s) \\ & + \int_{C^+} M^t(s, x) \Delta u(s) dB(s) - \int_{C^+} L^t(s, x) \Sigma \frac{\partial u(s)}{\partial n_s} dB(s) \end{aligned} \quad (3-35)$$

當 $x \in C^+$ 時，邊界點勢位的邊界切向梯度，由下式計算

$$\begin{aligned} \pi \frac{\partial u(x)}{\partial t_x} = & H.P.V. \int_{C^+} M^t(s, x) \Delta u(s) dB(s) - C.P.V. \int_{C^+} L^t(s, x) \Sigma \frac{\partial u(s)}{\partial n_s} dB(s) \\ & + \int_S M^t(s, x) u(s) dB(s) - \int_S L^t(s, x) \frac{\partial u(s)}{\partial n_s} dB(s) \end{aligned} \quad (3-36)$$

其中， t_x 為邊界點的切向方向且

$$L^t(s, x) = \frac{\partial U(s, x)}{\partial t_x} \quad (3-37)$$

$$M^t(s, x) = \frac{\partial^2 U(s, x)}{\partial t_x \partial n_s} \quad (3-38)$$

沿邊界切向之勢位導微的計算方法可歸納兩種：

- (1). 積分表示法 — 上述的方法。
- (2). 數值導微法 — 直接由所得邊界勢位做差分導微。

3.5.2 邊界積分推導統一表示式

上兩小節已導得在含退化邊界問題中有用的邊界積分式，本節將說明不管域內點或邊界點，均可以用一統一的積分式表示，說明於下

如果 x 在任意點上，廣義對偶積分式可寫成

$$\begin{aligned} \pi \Sigma u(x) &= \int_B T(s, x) \Delta u(s) dB(s) - \int_B U(s, x) \Sigma t(s) dB(s) \\ \pi \Delta t(x) &= \int_B M(s, x) \Delta u(s) dB(s) - \int_B L(s, x) \Sigma t(s) dB(s) \end{aligned}$$

其中， $\Delta u(s), \Sigma t(s), \Delta t(s), \Sigma u(s)$ 之定義詳見下表。值得一提的是，以上積分並非存在於 Cauchy 或 Hadamard 的主值觀念內，而是在一般解析積分的定義下進行。

表 3.7 邊界積分表示式之統一表示式

邊界型式		正規邊界	退化邊界
邊界型式示意圖		S	C
$\sum u$	域內	$2u(x)$	$2u(x)$
	邊界	$u(x)$	$u(x^+) + u(x^-)$
Δu	域內	0	0
	邊界	$u(x)$	$u(x^+) - u(x^-)$
$\sum t$	域內	0	0
	邊界	$t(x)$	$t(x^+) + t(x^-)$
Δt	域內	$2t(x)$	$2t(x)$
	邊界	$t(x)$	$t(x^+) - t(x^-)$
用途		正常邊界問題	彈力裂縫 (crack) 阻水牆 (cutoff wall) 音波螢幕 (screen) 等問題
$\sum u = u(x^+) + u(x^-)$ $\sum t = t(x^+) + t(x^-)$ $\Delta u = u(x^+) - u(x^-)$ $\Delta t = t(x^+) - t(x^-)$ 註: 假設邊界為平滑			

如果 x 在域內 (Domain) ，由表 3.7 可知，上二式可化簡為域內點邊界積分式

$$2\pi u(x) = \int_B T(s, x)u(s)dB(s) - \int_B U(s, x)t(s)dB(s)$$

$$2\pi t(x) = \int_B M(s, x)u(s)dB(s) - \int_B L(s, x)t(s)dB(s)$$

如果 x 在平滑邊界 (smooth boundary) 上，由表 3.7 可知，上二式可簡化為邊界點邊界積分式如下：

$$\pi u(x) = CPV \int_B T(s, x)u(s)dB(s) - RPV \int_B U(s, x)t(s)dB(s)$$

$$\pi t(x) = HPV \int_B M(s, x) u(s) dB(s) - CPV \int_B L(s, x) t(s) dB(s)$$

3.6 邊界積分法流程

由以上積分方程的推導，吾人可將其實際的邊界元素法執行的分析流程示意如下：

邊界積分法流程圖

3.7 一維 Laplace 方程邊界積分解法說明例

為了說明上述流程圖，特舉一維問題以邊界元素法解之，以便使讀者熟悉對偶積分式之 U, T, L, M 等四個核函數所代表的角色與在 Laplace 方程之應用。

範例：

控制方程式： $\frac{d^2 u(x)}{dx^2} = 0, \quad 0 < x < 1$

邊界條件：

以下分三個情況分別討論之

case 1. 混合型 (Mixed) 邊界條件

$$u(0) = 100, \quad q(1) = \frac{du}{dx} \Big|_{x=1} = 0$$

case 2. Dirichlet 邊界條件

$$u(0) = 100, u(1) = 0$$

case 3. Neumann 邊界條件

$$q(0) = 100, q(1) = 100$$

解析解:

由於此微分方程相當簡單，其解析解分別為:

case 1. 混合型 (Mixed) 邊界條件 $u = 100$. case 2. Dirichlet 邊界條件 $u = 100 - 100x$. case 3. Neumann 邊界條件 $u = 100x + c$.

其中， c 為任意常數。

以下擬以兩種邊界元素法解之，(a) 為 U, T 核函數法，(b) 為 L, M 核函數法。分別說明如下:

(a). U, T 核函數解法

步驟一: 求解基本解 $L(v) = \frac{d^2 v}{dx^2} = \delta(x - s)$

$$v(x) = 0.5 |x - s| = G(x, s)$$

首先，定義 U, T, L, M 等四個核函數定義如下:

$$U(s, x) = G(x, s)$$

$$T(s, x) = \frac{\partial U(s, x)}{\partial n_s} = \frac{dU(s, x)}{ds}$$

$$L(s, x) = \frac{\partial U(s, x)}{\partial n_x} = \frac{dU(s, x)}{dx}$$

$$M(s, x) = \frac{\partial^2 U(s, x)}{\partial n_x \partial n_s} = \frac{\partial^2 U(s, x)}{\partial x \partial s}$$

步驟二: 由域內點邊界積分方程式之推導，可得

$$\langle u, L(v) \rangle = \langle v, L(u) \rangle - J(u, v) \Big|_0^1$$

$$\int_0^1 \frac{d^2 u}{dx^2} v dx = \int_0^1 \frac{d^2 v}{dx^2} u dx + \left(\frac{du}{dx} v - u \frac{dv}{dx} \right) \Big|_0^1$$

若取 u 為考慮的問題，而取 v 為基本解，則由上式可得域內積分方程式

$$u(s) = u \frac{dG(x, s)}{dx} \Big|_0^1 - \frac{du}{dx} G(x, s) \Big|_0^1$$

為了配合本書符號的一致性，可改寫成

$$u(x) = u \frac{dG(s, x)}{ds} \Big|_0^1 - \frac{du}{ds} G(s, x) \Big|_0^1$$

其中， $v = G(x, s)$ 即為步驟一導得之基本解。

由於一維問題其邊界為兩個端點，故無需邊界積分符號，且本例並無非齊次 (nonhomogeneous) 項，或稱微體源 (body force) 項，故亦無體積分。

步驟三：將 s 逼到邊界，可得 U, T 核函數如下：

$$\lim_{s \rightarrow 1} 0.5 |s - x| = 0.5 |1 - x|$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} 0.5 |s - x| = 0.5 |x|$$

$$\lim_{s \rightarrow 1} \frac{dG(s, x)}{ds} = 0.5 \frac{d(s - x)}{ds} = 0.5, \quad 0 < x < 1, s > x$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{dG(s, x)}{ds} = 0.5 \frac{d(x - s)}{ds} = -0.5, \quad 0 < x < 1, s < x$$

將 $x = 0$ 代入可得邊界積分方程

$$0.5u(0) - 0.5u(1) = -0.5q(1)$$

將 $x = 1$ 代入可得邊界積分方程

$$-0.5u(0) + 0.5u(1) = 0.5q(0)$$

其中， $q = \frac{du}{ds}$ 。

步驟四：上二式可寫成代數方程的矩陣式如下：

$$\begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q(0) \\ q(1) \end{bmatrix}$$

步驟五：套入已知邊界條件，可求解未知邊界量，說明於下

case 1. (混合型)

$$\begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ u(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q(0) \\ 0 \end{bmatrix}$$

可解得

$$\begin{bmatrix} u(1) \\ q(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \end{bmatrix}$$

恰為正解 $u = 100$ 吻合。

case 2. (Dirichlet 型)

$$\begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q(0) \\ q(1) \end{bmatrix}$$

可解得

$$\begin{bmatrix} q(0) \\ q(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -100 \\ -100 \end{bmatrix}$$

恰為正解 $u = 100 - 100x$ 吻合。

case 3. (Neumann 型)

$$\begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \end{bmatrix}$$

可解得

$$\begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ 100 + c \end{bmatrix}$$

恰為正解 $u = 100x + c$ 吻合。

步驟六: 求解域內值

case 1.(混合型)

$$u(x) = u \frac{dG}{ds} \Big|_0^1 - G \frac{du}{ds} \Big|_0^1$$

$$u(x) = \begin{bmatrix} \frac{dG}{ds} \Big|_1 & -\frac{dG}{ds} \Big|_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_1 & -G_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q(1) \\ q(0) \end{bmatrix}$$

代入 $x = 0.5$, 可得

$$u(0.5) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.25 & -0.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 100$$

恰為正解。

case 2. (Dirichlet 型)

$$u(x) = u \frac{dG}{ds} \Big|_0^1 - G \frac{du}{ds} \Big|_0^1$$

$$u(x) = \left[\frac{dG}{ds} \Big|_1 \quad -\frac{dG}{ds} \Big|_0 \right] \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} - \left[G_1 \quad -G_0 \right] \begin{bmatrix} q(1) \\ q(0) \end{bmatrix}$$

$$u(0.5) = \left[0.5 \quad 0.5 \right] \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \end{bmatrix} - \left[0.25 \quad -0.25 \right] \begin{bmatrix} -100 \\ -100 \end{bmatrix} = 50$$

恰為正解。

case 3.(Neumann 型)

$$u(x) = u \frac{dG}{ds} \Big|_0^1 - G \frac{du}{ds} \Big|_0^1$$

$$u(x) = \left[\frac{dG}{ds} \Big|_1 \quad -\frac{dG}{ds} \Big|_0 \right] \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} - \left[G_1 \quad -G_0 \right] \begin{bmatrix} q(1) \\ q(0) \end{bmatrix}$$

$$u(0.5) = \left[0.5 \quad 0.5 \right] \begin{bmatrix} c \\ 100 + c \end{bmatrix} - \left[0.25 \quad -0.25 \right] \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \end{bmatrix} = 50 + c$$

恰為正解。

(b). L, M 核函數解法

由前面邊界積分方程式所推導的

$$u(x) = u \frac{dG(s, x)}{ds} \Big|_0^1 - \frac{du}{ds} G(s, x) \Big|_0^1$$

可寫成

$$u(x) = 0.5 u(1) - 0.5 |1 - x| q(1) + 0.5 u(0) + 0.5 |x| q(0), \quad 0 < x < 1$$

上式已將 $s = 0, 1$ 分別代入。對 x 微分，可得

$$\frac{du(x)}{dx} = 0.5q(1) + 0.5q(0)$$

所以， $q(x) = (q(0) + q(1))/2$ 。當 $x \rightarrow 0$ 時， $q(0) = (q(0) + q(1))/2$ ，當 $x \rightarrow 1$ 時， $q(1) = (q(0) + q(1))/2$ 。上式代表了 $q(0) = q(1) = b$ ，其中， b 表某常數，故一般解為 $u(x) = a + bx$ 。

若直接在域內方程式時即以微分運算，可得

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x} = u(s) \frac{\partial^2 G(s, x)}{\partial s \partial x} \Big|_0^1 - \frac{du}{ds} \frac{\partial G(s, x)}{\partial x} \Big|_0^1$$

可寫成

$$q(x) = u(s) \frac{\partial^2 G(s, x)}{\partial s \partial x} \Big|_{s=1} - u(s) \frac{\partial^2 G(s, x)}{\partial s \partial x} \Big|_{s=0} \quad (3-39)$$

$$- \frac{du}{ds} \frac{\partial G(s, x)}{\partial x} \Big|_{s=1} + \frac{du}{ds} \frac{\partial G(s, x)}{\partial x} \Big|_{s=0} \quad (3-40)$$

$$= 0.5(q(0) + q(1)) \quad (3-41)$$

當 $x \rightarrow 0$, 時, $q(0) = (q(0) + q(1))/2$, 當 $x \rightarrow 1$, 時, $q(1) = (q(0) + q(1))/2$ 。

上式代表了 $q(0) = q(1) = b$ 。故一般解為 $u(x) = a + bx$ 。

若欲求得域內解 $u(x)$, $0 < x < 1$, 則需代入 U, T 核函數的域內點邊界積分式可得

$$u(x) = bx + (u(0) + u(1) - b)/2$$

case 1. (混合型)

$$u(x) = 1/2(100 + u(1)) \rightarrow u(1) = 100$$

$$u(x) \equiv 100$$

case 2. (Dirichlet 型)

$$u(x) = bx + (100 - b)/2$$

$$u(0) = 100 = 50 - 0.5b$$

$$u(1) = 0 = b + 50 - 0.5b$$

可導得, $b = -100$, 其解為

$$u(x) \equiv -100x + 100$$

case 3. (Neumann 型)

$$u(x) = 100x + 1/2(u(0) + u(1) - 100)$$

$$u(x) \equiv 100x + c$$

由以上例子之說明可得如下結論:

(1). 本例題可以只用 U, T 核函數之邊界積分式直接來求解邊界未知量與域內解，而不需使用到 L, M 邊界積分式。

(2). L, M 邊界積分式無法單獨求得 $u(x)$ 場，而需使用到 U, T 邊界積分式，亦即 L, M 邊界積分式無法唯一定義出 $u(x)$ 場（如上例說明）。

綜合上述，吾人可想像是否有某個物理問題，以 U, T 邊界積分式來求解時，會有解不唯一的情況發生，而應配合 L, M 邊界積分式以定出唯一解？這情形恰與上述例 (2) 之說明互補。然而這問題在實際應用會遇到嗎？答案是肯定的，當吾人考慮的定義域含退化邊界時，即需以上述方式解之，因退化邊界物理量為多值雙邊函數，故需同時以對偶邊界積分式 U, T, L, M 解之，方能定出唯一解，參見下表 3.8：

表 3.8 U, T, L, M 核函數與解之唯一性

加入	
L, M 邊界積分式	$\rightarrow U, T$ 邊界積分式 可定出唯一場解 (本例一維問題)
加入	
U, T 邊界積分式	$\rightarrow L, M$ 邊界積分式 可定出唯一場解 (含退化邊界問題)

3.8 二維 Laplace 方程邊界積分法程式設計

本節將就前述之邊界元素法的解析流程，以二維 Laplace 方程為例，物理量採用常數邊界元素模擬，撰寫成 BEPO2D(Boundary Element Potential flow 2-D) 程式，可求解含退化邊界（如阻水牆）之流場問題。有關本程式架構、輸入出格式與變數說明如下：

(a). 程式架構

BEM —— U, T, L, M 程式設計

主程式 —— Main Program

副程式 —— 分別說明於下

GEOM —— 結點，元素幾何資料讀取

UKERNEL — 算出 $U(s, x)$ 的積分值
TKERNEL — 算出 $T(s, x)$ 的積分值
LKERNEL — 算出 $L(s, x)$ 的積分值
MKERNEL — 算出 $M(s, x)$ 的積分值
GRULE — 求高斯積分點與權值
ARANGE — 高斯積分點與權值的重排
LUPPDC - $Ax = b$ 分解 $A = LU$, U, L 代表上、下三角矩陣
LUPPSB — 求未知向量 x
INTER — 求域內點之 u, t 值
主程式 — Main Program
CALL GEOM
CALL UKERNEL — CALL GRULE AND ARANGE
CALL TKERNEL — CALL GRULE AND ARANGE
CALL LKERNEL — CALL GRULE AND ARANGE
CALL MKERNEL — CALL GRULE AND ARANGE
CALL LUPPDC
CALL LUPPSB
CALL INTER
STOP
END

(b). 程式流程圖

(c). 程式變數說明:

NNODE ————— 結點數目
 NELM ————— 元素數目
 NINDEX(NELM) ————— 元素排列編號指標
 X(NNODE),Y(NNODE),Z(NNODE)— 結點幾何坐標
 INC(1,NELM),INC(2,NELM) - 元素起始與終端結點編號
 XNORMAL(NELM) ————— 元素法向量 (x 方向)
 YNORMAL(NELM) ————— 元素法向量 (y 方向)
 ELENGTH(NELM) ————— 元素長度
 THETA(NELM) ————— 元素走向角度
 COLX(NELM),COLY(NELM) - 積分方程式配置點幾何坐標
 U(I,J) —— 在 I 點第 J 個常數元素 $U(s, x)$ 之積分值
 T(I,J) —— 在 I 點第 J 個常數元素 $T(s, x)$ 之積分值
 VL(I,J) —— 在 I 點第 J 個常數元素 $L(s, x)$ 之積分值
 VM(I,J) —— 在 I 點第 J 個常數元素 $M(s, x)$ 之積分值

(d). 輸入資料 (RUN BEPO2D)

NELM ————— 元素數目
 NU ————— 已知基本邊界條件數目
 NT ————— 已知自然邊界條件數目
 NELM,NNODE ————— 元素數目，結點數目
 FOR001.DAT ————— 已知基本邊界條件 u_n set (K,BCU(K))
 FOR002.DAT ————— 已知自然邊界條件 t_m set (J,BCT(J))
 FOR003.DAT ————— 已知自然與基本邊界條件
 FOR015.DAT ————— 幾何檔案 (通用格式 ***.unv)
 FOR080.DAT ————— 欲求物理量的內點座標

$$\begin{bmatrix} t_m \\ u_n \end{bmatrix}$$

以上註標係由元素編號排起。

(e). 輸出資料

FOR016.DAT ———— 邊界未知量 u, t 值

FOR077.DAT ———— 域內物理量 u 值

FOR078.DAT ———— 域內物理量 t 值

(程式請參考附錄 I)

為驗證本程式及讓讀者熟悉輸入與輸出格式，在附錄中含有本書止水牆的範例資料。

3.8.1 邊界元素離散與核函數積分

對偶邊界積分方程式，在幾何邊界線性內插與常數元素物理量離散後，可化成如下代數方程

$$[\bar{T}_{ij}]\{u\} = [U_{ij}]\left\{\frac{\partial u}{\partial n}\right\} \quad (3-42)$$

$$[M_{ij}]\{u\} = [\bar{L}_{ij}]\left\{\frac{\partial u}{\partial n}\right\} \quad (3-43)$$

其中

$$U_{ij} = R.P.V. \int U(s_j, x_i) dB(s_j) \quad (3-44)$$

$$\bar{T}_{ij} = -\pi\delta_{ij} + C.P.V. \int T(s_j, x_i) dB(s_j) \quad (3-45)$$

$$\bar{L}_{ij} = \pi\delta_{ij} + C.P.V. \int L(s_j, x_i) dB(s_j) \quad (3-46)$$

$$M_{ij} = H.P.V. \int M(s_j, x_i) dB(s_j) \quad (3-47)$$

以上積分公式均可導得解析式，說明如下

參考下圖，首先定義源點與場點的法向量為

$$n_1(s) = \sin(\theta), \quad n_2(s) = -\cos(\theta) \quad (3-48)$$

$$\bar{n}_1(x) = \sin(\phi), \quad \bar{n}_2(x) = -\cos(\phi) \quad (3-49)$$

邊界元素離散與座標轉換示意圖

並定義，源點法向量與場點法向量之內積與外積分別如下

$$\mathbf{n}(x) \cdot \mathbf{n}(s) = \cos(\phi - \theta) = \cos(\phi)\cos(\theta) + \sin(\phi)\sin(\theta) = n_2\bar{n}_2 + n_1\bar{n}_1 \quad (3-50)$$

$$\mathbf{n}(s) \times \mathbf{n}(x)\mathbf{k} = \sin(\phi - \theta) = \sin(\phi)\cos(\theta) - \cos(\phi)\sin(\theta) = -\bar{n}_1n_2 + \bar{n}_2n_1 \quad (3-51)$$

經過如上圖示之座標轉換，可變換座標如下

$$\begin{Bmatrix} x_r \\ y_r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 - s_1 \\ x_2 - s_2 \end{Bmatrix} \quad (3-52)$$

對正規元素的非奇異積分，其解析式為

$$U_{ij} = v \log \sqrt{v^2 + y_r^2} - v + y_r \tan^{-1}(v/y_r) \Big|_{v=-0.5L_j-x_r}^{v=0.5L_j-x_r} \quad (3-53)$$

$$T_{ij} = \tan^{-1}(v/y_r) \Big|_{v=-0.5L_j-x_r}^{v=0.5L_j-x_r} \quad (3-54)$$

$$L_{ij} = -\cos(\phi - \theta) \tan^{-1}(v/y_r) - 0.5 \sin(\phi - \theta) \log(v^2 + y_r^2) \Big|_{v=-0.5L_j-x_r}^{v=0.5L_j-x_r} \quad (3-55)$$

$$M_{ij} = \cos(\phi - \theta) \left[\frac{\tan^{-1}(v/y_r)}{y_r} + \frac{v}{v^2 + y_r^2} \right] - y_r \sin(\phi - \theta) \frac{1}{v^2 + y_r^2} - \cos(\phi - \theta) \frac{\tan^{-1}(v/y_r)}{y_r} \Big|_{v=-0.5L_j-x_r}^{v=0.5L_j-x_r} \quad (3-56)$$

而對奇異元素而言，需很小心的將上式的場點逼近源點，亦即

$$x_r \rightarrow 0, \quad y_r \rightarrow 0$$

再應用 l'Hospital rule 與如下三角關係，

$$\tan^{-1}(x) + \tan^{-1}(1/x) = \pi/2 \quad (3-57)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan^{-1}(x)} = 1 \quad (3-58)$$

即可得到奇異積分值。為使讀者更加了解勢論中各種勢能的行為，特將其繪圖如下

(1) 奇異源陣列分佈

(2) 偶極陣列分佈

· (3) 陣列奇異源之 $U(s, x)$ 場

(4) 偶極陣列之 $T(s, x)$ 場

(5) 陣列奇異源之 $L^n(s, x)$ 場

(6) 偶極陣列之 $M^n(s, x)$ 場

(7) 陣列奇異源之 $L^t(s, x)$ 場

(8) 偶極陣列之 $M^t(s, x)$ 場

以上勢能圖的奇異點如下

(1) 陣列奇異源之 $U(s, x)$ 奇異點 (2) 偶極陣列之 $T(s, x)$ 奇異點

(3) 陣列奇異源之 $L^n(s, x)$ 奇異點 (4) 偶極陣列之 $M^n(s, x)$ 奇異點

(5) 陣列奇異源之 $L^t(s, x)$ 奇異點 (6) 偶極陣列之 $M^t(s, x)$ 奇異點

上述 (1) ~ (8) 圖中也可以附以彈力反平面問題力學行為的物理意義。在此換以等高線來表示如下

(1) 陣列集中之位移場 (2) 力偶陣列之位移場

(3) 陣列集中力之 τ_{yz} 場

(4) 力偶陣列之 τ_{xz} 場

(5) 陣列集中力之 τ_{yz} 場

(6) 力偶陣列之 τ_{xz} 場

由上圖可驗證本書所提各種勢能的連續特性。這種特性，如 L, M 核函數在法向或切向的跳躍行為，即靠 $\sin(\phi - \theta)$ 和 $\cos(\phi - \theta)$ 來反應其勢能場於橫躍邊界時的連續與不連續性質。當 $\phi = \theta$ 時，表場量之邊界法向梯度行為。當 $\phi = \theta + \pi/2$ 時，表場量之邊界切向梯度行為。於 T_{ij}, L_{ij} 中含有跳躍函數 $\tan^{-1}(y/v)$ ，因此可稱 T, L 為跳躍核函數。但當 $\phi = \theta + \pi/2$ 時， $L^t(s, x)$ 的跳躍函數前面之係數 $\cos(\phi - \theta)$ 為 0，因此於橫越邊界反而變成連續，這在 § 1.9.2 亦曾述及，由圖上亦可看出。

3.9 二維 Laplace 方程邊界積分程式範例驗證

為驗證 BEPO2D 程式之準確性，特以 § 1.2 的解析例測試之，所得結果與 § 1.2 節手算相同。今特舉三例說明於後：

範例一：無限域含阻水牆均勻流之正解推導

(a). 題目描述：

一無限域流場，內含一阻水牆於 $-1 < x < 1, y = 0$ 處，試問對以 α 攻角的流場之影響為何？其數學模式見下圖。

無限域含阻水牆均勻流場數學模式

(b). 解析解推導

首先將解分為補解與特解兩部份如下

$$u = -A x \cos(\alpha) - A y \sin(\alpha) + u_h \quad (3-59)$$

其中， u_h 為含未定係數之補解， A 表無限遠處的入射流速。因此，原問題可改寫成控制方程

$$\nabla^2 u_h(x) = 0, \quad x \text{ in } D$$

由阻水牆流切條件 $\nabla u \cdot n = 0$ ，可得如下邊界條件

$$\frac{\partial u_h(x^+)}{\partial n_{x^+}} = -A \sin(\alpha), \quad x \text{ on } C^+ \quad (3-60)$$

$$\frac{\partial u_h(x^-)}{\partial n_{x^-}} = A \sin(\alpha), \quad x \text{ on } C^- \quad (3-61)$$

以上兩個邊界法向勢位微分之條件，由於其對應的核函數 $U(s, x)$ 與 $L(s, x)$ 和法向量有表 3.6 的關係，因此考慮以上兩式之和，可得

$$\Sigma \frac{\partial u_h(s)}{\partial n_s} = 0, \quad s \text{ on } C^+$$

將上式代入 § 3.5.2 節之廣義對偶邊界積分式可得

$$\pi \Sigma u_h(x) = C.P.V. \int_{C^+} T(s, x) \Delta u_h(s) dB(s) \quad (3-62)$$

$$\pi \Delta \frac{\partial u_h(x)}{\partial n_x} = H.P.V. \int_{C^+} M(s, x) \Delta u_h(s) dB(s) \quad (3-63)$$

其中

$$\Sigma u(s) = u(s^+) + u(s^-) \quad (3-64)$$

$$\Delta u(s) = u(s^+) - u(s^-) \quad (3-65)$$

$$\Delta \frac{\partial u}{\partial n}(s) = \frac{\partial u}{\partial n}(s^+) - \frac{\partial u}{\partial n}(s^-) \quad (3-66)$$

由 $T(s, x)$ 之定義知

$$T(s, x) = \frac{\partial U(s, x)}{\partial n_s} = \nabla U \cdot n_s$$

$$\nabla U = \frac{\partial}{\partial r} \ln(r) \hat{e}_r = \frac{1}{r} \hat{e}_r$$

於此例 $dB(s)$ 為直線段 $-1 < s < 1$ ，且

$$\hat{e}_r \perp n_s$$

所以

$$\nabla U \perp n_s \rightarrow \nabla U \cdot n_s = 0$$

因此廣義對偶邊界積分式第一式的右邊可整理得

$$\begin{aligned} C.P.V. \int_{C^+} \frac{\partial U(s, x)}{\partial n_s} \Delta u_h(s) dB(s) &= C.P.V. \int_{C^+} \nabla U(s, x) \cdot n_s \Delta u_h(s) dB(s) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3-67)$$

意即

$$\Sigma u(s) = 0$$

再由表 3.7 中 $\Sigma u(s)$ 的定義

$$\Sigma \frac{\partial u}{\partial n}(s) = \frac{\partial u}{\partial n}(s^+) + \frac{\partial u}{\partial n}(s^-) \quad (3-68)$$

可導得

$$u_h(x^-) = -u_h(x^+)$$

所以

$$\Delta u_h = 2u_h(x^+)$$

於此例 $M(s, x)$ 之源點與場點的法向量分別為

$$n(s) = n(x) = (0, -1)$$

因此廣義對偶邊界積分式的第二式可化簡成

$$-2A\pi \sin(\alpha) = H.P.V. \int_C \frac{-1}{(x-s)^2} 2u_h(s) dB(s) \quad (3-69)$$

由於 u_h 在阻水牆尖端是以 $\sqrt{r}$ 的方式漸近之，另由 $1/r^2$ 核函數之補解如 § 1.3.8 節所示，因此可將此解以正交函數之級數表示如下

$$u_h(s^+) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i U_i(s) \sqrt{1-s^2} + C \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} + D \frac{s}{\sqrt{1-s^2}} \quad (3-70)$$

其中， $U_i(t)$ 為擦皮鞋 (Chebyshev) 第二類 i 階多項式， C, D 為補解中的未定係數 (當考慮 Kutta 條件時， u_h 為有限值，故 $C = D = 0$)。

故原積分式最後化簡為

$$-A\pi \sin(\alpha) = H.P.V. \int_{-1}^1 \frac{-1}{(x-s)^2} \sum_{i=0}^{\infty} a_i U_i(s) \sqrt{1-s^2} ds \quad (3-71)$$

根據 § 1.10.5 節所提主值與正交函數的關係知

$$H.P.V. \int_{-1}^1 \frac{1}{(x-s)^2} U_i(s) \sqrt{1-s^2} ds = -\pi(i+1)U_i(x) \quad (3-72)$$

因此可得

$$-A \sin(\alpha) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (i+1) U_i(x) \quad (3-73)$$

由正交函數級數表示式，可算得

$$a_i = -\delta_{i0} A \sin(\alpha) \quad (3-74)$$

因此勢位場解析解可寫成積分表示式 (integral representation)

$$u = -Ax \cos(\alpha) - Ay \sin(\alpha) + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 -2 T(s, x) A \sin(\alpha) \sqrt{1-s^2} ds \quad (3-75)$$

積分後，勢位場與速度場解析解分別可寫成如下型式

$$u = -A(x \cos(\alpha) + \sqrt{r_1 r_2} \sin(\alpha) \sin(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2})) \quad (3-76)$$

$$u = A[\cos(\alpha) + \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} \sin(\alpha) \sin(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}) - \frac{\sin \alpha}{\sqrt{r_1 r_2}} \sin(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2})] \quad (3-77)$$

$$v = A \sin(\alpha) [\sqrt{\frac{r_1}{r_2}} \cos(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}) + \frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}} \cos(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2})] \quad (3-78)$$

其中， $r_1, r_2, \theta_1, \theta_2$ 如圖示。

$$r_1 = \sqrt{(x_1 - 1)^2 + x_2^2}$$

$$r_2 = \sqrt{(x_1 + 1)^2 + x_2^2}$$

$$\theta_1 = \tan^{-1} \frac{x_2}{(x_1 - 1)}$$

$$\theta_2 = \tan^{-1} \frac{x_2}{(x_1 + 1)}$$

(c). 分析結果

速度場解析解圖示如下

$\alpha = 30$ 度

流場分佈圖

$\alpha = 60$ 度

流場分佈圖

$$\alpha = 90 \text{ 度}$$

流場分佈圖

範例二: 有限域均勻流之數值解析

(a). 題目描述:

範例一為無限域含阻水牆問題，本例擬考慮不含阻水牆之有限域流場，其數學模式如下

有限域均勻流場之數學模式

(b). 邊界元素網目

本問題採用了 24 個常數元素，參考下圖

邊界元素網目圖

(c). 分析結果: 本問題因無退化邊界而僅含正規邊界，定義域為簡單連接區域 (simply-connected domain)，可以 U, T 或 L, M 核函數個別求得，並不需同時予以考慮，茲將結果綜整如下表:

有限域均勻流之數值解 . 流場分佈圖

範例三：含阻水牆之有限域流場

(a). 題目描述：

同範例二，唯獨若中間存在退化邊界的阻水牆於 $x = 0$, $0 < y < 0.5$ 處，則流場分佈為何？

含阻水牆之有限域流場數學模式示意圖

(b). 邊界元素網目

本問題含阻水牆的退化邊界，除對正規邊界離散 30 個元素外，亦需對退化邊界作 10 個元素離散，參見下圖：

邊界元素網目圖 40 個常數元素，40 個結點

為驗證邊界元素法之準確度，本例亦以 MSC/NASTRAN 之有限元素程式分析之。有限元素網目如下：

(c). 有限元素網目

本數值模式取 200 個 CQUAD8 元素，871 個結點，參考下圖。

有限元素網目圖

(d). 分析結果

茲將有限元素與邊界元素所得結果，圖示於下

. 勢位分佈圖

流場分佈圖

在 $x = 0$, $y = -0.5 \sim 0$. 之 x 方向流速分佈圖

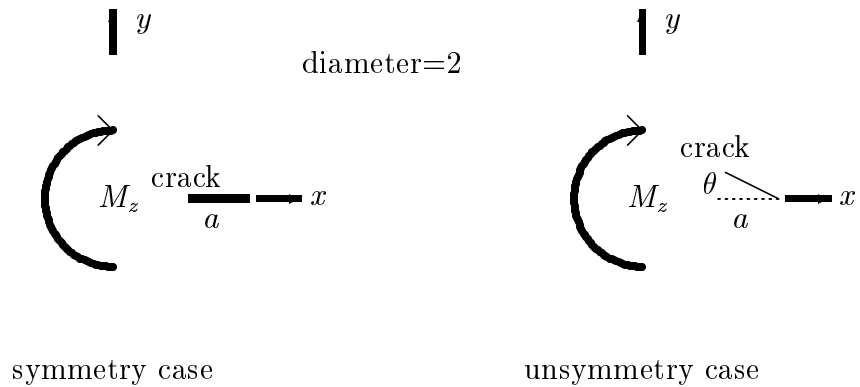
(e). 有限元素與邊界元素方法之比較

	有限元素法	邊界元素法
阻水樁數	1	2
結點數目	40	871
元素數目	40	200
CPU on VAX	2:56:88	1:54:75
CPU on CRAY	×	0:00:17

×：因為台灣 CRAY 系統尚未裝上 MSC/NASTRAN 程式，故無此資料。

邊界元素與有限元素分析系統之比較圖

範例四：含裂縫桿之扭曲分析



(a). 題目描述:

控制方程:

$$\nabla^2 \Psi(x, y) = -2, \quad (x, y) \in D$$

邊界條件:

$$\Psi(x, y) = 0, \quad (x, y) \text{ on } B$$

變數變換，可得

$$\nabla^2 \Psi^*(x, y) = 0, \quad (x, y) \in D$$

$$\Psi^*(x, y) = (x^2 + y^2)/2, \quad (x, y) \text{ on the boundary}$$

其中 $\Psi = \Psi^* - (x^2 + y^2)/2$

扭力可由下式求得:

$$M_z = \iint_A (x\tau_{yz} - y\tau_{zx}) dx dy$$

其中， $\tau_{yz} = -\alpha G \frac{\partial \Psi}{\partial x}$, $\tau_{zx} = \alpha G \frac{\partial \Psi}{\partial y}$ ， G 為剪力模數， α 為單位長度的轉角。參考解析解如下:

$$\Psi(r, u) = 32 \frac{a^2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{r}{a}\right)^{(2n+1)/2} - \left(\frac{r}{a}\right)^2}{(2n+1)[16 - (2n+1)^2]} \sin \frac{(2n+1)u}{2}, \quad T = 0.878 G a^4 \theta$$

扭轉剛度 C ($= G\pi a^4/2$, 圓) 可寫成

$$C = Ga^4 \left\{ \frac{512}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2(2n+5)[16-(2n+1)^2]} - \frac{\pi}{2} \right\} = 0.878Ga^4$$

習題 1 :

試以 BEPO2D 程式，分析如下壩體下的四個板樁設計，並討論其優缺點。

壩體下四個板樁設計圖

(a) 無樁型

(b) 單左樁型

(a) 單右樁型

(b) 雙樁型

習題 2 :

試以 BEPO2D 程式，分析斜裂縫桿的扭曲剛度。

3.1○ 數值邊界層效應的探討

邊界元素法只用了邊界量為基本描述變數，因此誤差也局限在邊界，這和 Saint venant 原則的道理是相通的。為探討邊界層效應，舉一具解析解 $u(x) = 0.5$ 的例子說明，考慮使用每邊 3, 5, 7, 9 個常數邊界元素分析之，其勢位分佈如下圖示

邊界層效應的探討

(a). 4×3 個邊界元素

(b). 4×5 個邊界元素

(a). 4×7 個邊界元素

(a). 4×9 個邊界元素

3.11 結論

本章已就對偶積分式應用於 Laplace 方程進行說明，並發展一套模擬二維 Laplace 方程的程式，此程式係根據對偶積分式的架構寫的，相信對初學者應是一個最好的入門橋樑。依據這個道理，讀者可將其應用於三維 Laplace 方程、熱傳、彈力、音波、破壞力學、氣動力、板彎曲、彈性波... 等，其物理數學之邏輯相同，勢能的特性亦類似，唯一有異乃是對應的核函數 $U(s, x)$, $T(s, x)$, $L(s, x)$, $M(s, x)$ 的表示型式不同而已。為說明此點，將在下一章以彈力問題的應用進行說明；而第三、四章最大的不同在於筆者希望將此套理論由純量場拓廣到向量場。讀者可比較後，當可了解整個邊界元素法的精神與解題邏輯。

3.12 參考文獻

- 1 J. T. Chen, H.-K. Hong and S. W. Chyuan, Boundary Element Analysis and Design in Seepage Problems Using Dual Integral Formulations, Finite Elements in Analysis and Design, Vol.17, No.1, pp.1-20, 1994.
- 2 J. T. Chen and H.-K. Hong, Dual Boundary Integral Equations at a Corner Using Contour Approach around Singularity, Advances in Engineering Software, Vol.21, No.3, pp.169-178, 1994.
- 3 J. T. Chen, K. H. Chen, W. Yeih and N. C. Shieh, Dual Boundary Element Analysis for Cracked Bars under Torsion, Engineering Computations, Vol.15, No.6, pp.732-749, 1998.
- 4 J. T. Chen and H.-K. Hong, Review of dual boundary element methods with emphasis on hypersingular integrals and divergent series, Applied Mechanics Reviews, ASME, Vol.52, No.1, pp.17-33, 1999.
- 5 J. T. Chen, S. R. Kuo, W. C. Chen and L. W. Liu, On the free terms of the dual BEM for the two and three-dimensional Laplace problems, J. Marine Science and Technology, Vol.8, No.1, pp.1-10, 2000.
- 6 M. T. Liang, J. T. Chen and S. S. Yang, Error Estimation for Boundary Element Method, Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol.23, No.3, pp.257-265, 1999.
- 7 J. T. Chen, M. T. Liang and S. S. Yang, Dual Boundary Integral Equations for Exterior Problems, Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol.16, No.2, pp.333-340,

1995.

- 8 J. T. Chen and H.-K. Hong, On the Dual Integral Representation of Boundary Value Problem in Laplace Equation, Boundary Element Abstracts, Vol.3, pp.114-116, 1993.
- 9 J. T. Chen and Y. W. Chen, Dual boundary element analysis using complex variables for potential problems with or without a degenerate boundary, Engineering Analysis with Boundary Elements, Accepted, 2000.

————— 海大河工研究所陳正宗 對偶邊界元素法 —————

【存檔：c:/dualbem/dbem3.te】【建檔:Sep./06/'2000】

Table 2: *

Table 1 Properties of different kinds of potentials across smooth boundary

Kernel function $K(s, x)$ direct method	$U(s, x)$	$T(s, x)$	$L(s, x)$	$M(s, x)$	$L^t(s, x)$	$M^t(s, x)$
Kernel function $K(x, s)$ indirect method	$U(x, s)$	$U^*(x, s)$	$T(x, s)$	$T^*(x, s)$	$T^t(x, s)$	$T^{*t}(x, s)$
Singularity 1D	$O(r)$	$O(1)$	$O(1)$	$O(\delta(r))$	$O(1)$	$O(\delta(r))$
Singularity 2D	$O(\ln(r))$	$O(1/r)$	$O(1/r)$	$O(1/r^2)$	$O(1/r)$	$O(1/r^2)$
Singularity 3D	$O(1/r)$	$O(1/r^2)$	$O(1/r^2)$	$O(1/r^3)$	$O(1/r^2)$	$O(1/r^3)$
Density function $\mu(s)$	$-t$	u	$-t$	u	$-t$	u
Potential type $\int K(s, x)\mu(s)ds$	single layer	double layer	normal derivative of single layer potential	normal derivative of double layer potential	tangent derivative of single layer potential	tangent derivative of double layer potential
Continuity across boundary	conti- nuous	disconti- nuous	disconti- nuous	pseudo conti- nuous	conti- nuous	disconti- nuous
Free term method(1) [?]	no jump	πu	$-\pi t$	no jump	no jump	$\pi u'$
Free term method(2)	no jump	πu	$-\frac{1}{2}\pi t$	$-\frac{1}{2}\pi t$	$-\frac{1}{2}\pi u'$	$-\frac{1}{2}\pi u'$
Jump term method(1)	no jump	$2\pi u$	$-2\pi t$	no jump	no jump	$2\pi u'$
Jump term method(2)	no jump	$2\pi u$	$-\pi t$	$-\pi t$	$\pi u'$	$\pi u'$
Principal value sense	R.P.V.	C.P.V.	C.P.V.	H.P.V.	C.P.V.	H.P.V.