第 五 章
彈塑性問題的探討

5.1 簡介

邊界元素法在線性橢圓型邊界值問題的應用已被肯定。而材料非線性的彈塑性分析，也漸受重視。本章將對此方面的文獻作一回顧，並以勢論之對偶積分式為架構，針對應力與應變空間之組成律模式，說明彈塑性力學問題的積分方程和靜彈力之不同處及其所多衍生的問題。本章中，對於塑性力學積分組成律的材料本構系統與力學平衡系統均以解的積分表示式描述之。在未作時間 (材料本構系統) 與空間 (力學平衡系統) 的離散前，皆為正解，亦即充份滿足控制方程式，甚具一致性。所不同的是，前者是初始值問題，其解的積分表示式為現時輸出物理量 (如應力) ，可用以前的輸入物理量 (如應變) 透過核函數疊加而成; 而後者為邊界值問題，其解的積分表示式為場內物理量 (如位移或曳引力) ，可用邊界物理量 (含位移與曳引力) 透過核函數疊加而成。前者核函數不具奇異性，後者則有。在本文均可看出此數學架構。而此種描述系統的方法，不管對實驗或計算方面的應用，均有其優點，不失為研究系統反應的一良好途徑。

5.2 塑性力學的邊界積分解法文獻回顧

彈性問題的邊界元素法分析，始於 1967 年 Rizzo 的靜彈力應用。而彈塑性問題則在 1970 年代由 Swedlow, Cruse 和 Mendelson 提出其邊界積分推導。爾後， Mukherjee 和 Kumar 更對 Mendelson 的二維平面問題做一修正。由於塑性應變或鬆弛應力的產生，使得內域之體積分不可免。因此，三維元素的分割是需要的。現今文獻上，為區別和有限

元素的不同，稱此具邊界元素與域內 cell 離散的方法為場域邊界元素法 (Field boundary element method) 。於計算此體積分時，若為域內位移，則此體積分屬弱奇異，但於計算域內應力的體積分時，則此體積分屬強奇異，會有跳躍項。 Bui 在 1978 亦曾克服這個問題。若欲求邊界點的切向應力時，將使問題更為複雜，其解決之道，仍需由勢論中的對偶積分式的架構解之。

本章擬以三維彈塑問題為例，首先介紹應力與應變空間彈塑性理論再由彈塑性的積分組成律出發，給出力平衡對應的積分方程，即可導得邊界未知量的代數方程，通過對邊界面和內部局部塑性區的離散化，以形成應力疊代公式，並給出了對應的數值處理技術。而二維問題也可類似處理。

5.3 彈塑性組成律

在組成律模式中，真正的物理現象應是能量的儲存與消散。前者主要由彈簧機械模型來儲存，後者則由阻尼器予以消散。若由黏彈性力學的廣義複數彈簧觀念來看，實部為儲存，虛部則為消散。而消散能一般是和外力激發的頻率相關的。對結構阻尼 (Structural damping) 模式而言，消散能是和頻率無關的; 但對黏滯阻尼 (Viscous damping) 模式而言，則是和頻率有關的。然而吾人對組成律的了解為應力 — 應變關係，為描述儲存與消散，對應力或應變的分解是必需。因此在本節中，我們將以 J_2 變率型式彈塑性模式為對象，回顧應力空間與應變空間的彈塑性組成律。

5.4 應力空間彈塑性理論

在應力空間理論中，是將應力保持全量型式，而應變 (ϵ_{ij}) 則分為彈性部份 $(\epsilon_{ij})^e$ 與塑性部份 $(\epsilon_{ij})^p$

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^p, \tag{5.1}$$

此分法可想成類似等效的黏彈馬克斯威模式 (Maxwell model) 。其中，彈性部份的組成律可以寫成

$$e_{ij}^e = \frac{1}{2G} s_{ij}, \quad \epsilon_{kk}^e = \frac{1}{3\mathcal{V}} \sigma_{ll}, \tag{5.2}$$

其中， G 為剪切模數， $\mathcal{V}$ 為體積模數， s_{ij} 與 e_{ij} 分別為偏差應力與應變而 σ_{ll} 為平均應力。塑性部份則可分別表示成塑應變 (plastic strain, e_{ij}^p) 與回應力 (back stress, α_{ij}) 的演化

方程式，即

流動規則：

$$\dot{e}^p_{ij} = \dot{\bar{e}}^p \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \dot{\bar{e}}^p \frac{3}{2h} r_{ij}, \qquad \epsilon^p_{kk} = 0, \tag{5.3}$$

硬化規則：

$$\dot{\alpha}_{ij} = \frac{2}{3} k'(\bar{e}^p) \dot{e}^p_{ij}, \quad \alpha_{kk} = 0, \tag{5.4}$$

在此

$$r_{ij} = s_{ij} - \alpha_{ij} \tag{5.5}$$

稱為主動應力 (active stress) ，$\bar{e}^p$ 表示等效塑性應變， $k'(\bar{e}^p)$ 表示材料函數。

$$\dot{\bar{e}}^p \begin{cases} > 0 & \text{如果 } \bar{r} = h \text{ 且 } r_{ij}\dot{s}_{ij} = \frac{2\bar{r}}{3}(\dot{h} + \dot{k}) \\ = 0 & \text{其他} \end{cases}, \tag{5.6}$$

其中 $\bar{r} = h$ ，也就是

$$f = \bar{r} - h = 0 \tag{5.7}$$

稱為降伏條件 (yield condition) ，而 $r_{ij}\dot{s}_{ij} = \frac{2\bar{r}}{3}(h' + k')\dot{\bar{e}}^p$，也就是 $\dot{f} = 0$ ，稱為加載條件 (loading condition) ，其它符號分別為： σ_{ij} 代表應力張量， ϵ_{ij} 代表應變張量， s_{ij} 代表偏差應力 (deviatoric stress) 張量， e_{ij} 則代表偏差應變張量。符號上面一點代表材料時間微分 (material time differential) ，上標 e 與 p 分別指彈性部份與塑性部份。對 ϵ^p_{ij} 而言，在黏塑性力學的解釋，應說成潛變應變 (creep strain) 較妥。等效塑性應變 $\bar{e}^p$ 是塑性應變空間中，路徑弧長的 $\sqrt{\frac{2}{3}}$ 倍，其定義如下

$$\bar{e}^p = \int_0^t \dot{\bar{e}}^p(\tau) d\tau, \quad \dot{\bar{e}}^p = \left(\frac{2}{3}\dot{e}^p_{ij}\dot{e}^p_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{5.8}$$

又等效主動應力 (equivalent active stress)

$$\bar{r} = \left(\frac{3}{2} r_{ij} r_{ij}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{5.9}$$

是降伏半徑的度量， $\bar{r}$ 永遠 $\leq h(\bar{e}^p)$。在此模式中要用到的材料模數和材料函數有剪切模數 (shear modulus) G，體積模數 (bulk modulus) $\mathcal{V}$，降伏應力函數 $h(\bar{e}^p)$ 以及回應力函數 $k(\bar{e}^p)$。而且 $k'(\bar{e}^p)$ 表示 $\frac{dk}{d\bar{e}^p}$ ， $h'(\bar{e}^p)$ 表示 $\frac{dh}{d\bar{e}^p}$ 。

5.5 應變空間彈塑性理論

若從另一個角度而言，吾人可以把應變保持全量型式，而將應力看成彈性應力 (elastic stress, σ_{ij}^e) 減去鬆弛應力 (stress relaxation, σ_{ij}^r) ，即

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^e - \sigma_{ij}^r, \tag{5.10}$$

此分法類似於等效的黏彈凱文模式 (Kelvin model) 。其中，彈性部份的組成律可寫成

$$s_{ij}^e = 2Ge_{ij}, \quad \sigma_{kk}^e = 3\mathcal{V}\epsilon_{ll}, \tag{5.11}$$

鬆弛部份則可分別表示成鬆弛應力與回應變 (back strain, R_{ij}) 的演化方程式

流動規則：

$$\dot{s}_{ij}^r = \dot{\bar{s}}^r \frac{2}{3H} R_{ij}, \qquad \sigma_{kk}^r = 0, \tag{5.12}$$

硬化規則：

$$\dot{A}_{ij} = \frac{3}{2} K'(\bar{s}^r) \dot{s}_{ij}^r, \qquad A_{kk} = 0, \tag{5.13}$$

在此

$$R_{ij} = e_{ij} - A_{ij} \tag{5.14}$$

稱為主動應變 (active strain) ，$K'(\bar{s}^r)$ 為材料函數。

$$\dot{\bar{s}}^r \begin{cases} > 0 & \text{如果 } \bar{R} = H \text{ 且 } R_{ij}\dot{e}_{ij} > 0 \\ = 0 & \text{其他} \end{cases}, \tag{5.15}$$

其中 $\bar{R} = H$，也就是

$$F \equiv \bar{R} - H(\bar{s}^r) = 0 \tag{5.16}$$

稱為應變空間降伏條件或者鬆弛條件 (relaxation condition) ，而 $R_{ij}\dot{e}_{ij} > 0$ 稱為加載條件。等效鬆弛應力 $\bar{s}^r$ 是鬆弛應力空間中，路徑弧長的 $\sqrt{\frac{3}{2}}$ 倍，其定義如下

$$\bar{s}^r = \int_0^t \dot{\bar{s}}^r(\tau) d\tau, \qquad \dot{\bar{s}}^r = \left(\frac{3}{2} \dot{s}_{ij}^r \dot{s}_{ij}^r \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{5.17}$$

又

$$\bar{R} = \left(\frac{2}{3} R_{ij} R_{ij} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{5.18}$$

是應變空間降伏半徑 (或者鬆弛半徑) 的度量， $\bar{R}$ 永遠 $\leq H(\bar{s}^r)$。在此模式中要用到的材料模數和材料函數有剪力模數 G，體積模數 $\mathcal{V}$，鬆弛應力函數 $H(\bar{s}^r)$ 以及回應變函數

$K(\bar{s}^r)$。 $K'(\bar{s}^r)$ 表示 $\frac{dK}{d\bar{s}^r}$，$H'(\bar{s}^r)$ 表示 $\frac{dH}{d\bar{s}^r}$。以上兩種描述彈塑性材料的組成律，已被洪和劉導得其對應的應力與應變間的積分泛函關係。其核函數內則隱含了材料常數或材料函數，而應力與應變空間推導的互通關係，在此架構下，亦被充份討論。這種解的積分表示式的作法不管在計算或實驗上的應用，均有其不可抹滅的貢獻。

這裡僅將解的積分表示式的重要結果，列述於下

(1) 給定應變歷程的應力空間彈塑性積分組成律

偏差應力解的積分表示式為

$$s_{ij}(t) = s_{ij}(\tau) + 2G\{-U(Z(t))\frac{r_{ij}(t)}{2G} + U(Z(\tau))\frac{r_{ij}(\tau)}{2G} + \int_\tau^t [1 + U(Z(\zeta))]\dot{e}_{ij}(\zeta)d\zeta\} \tag{5.19}$$

類時間的記憶函數為

$$Z(t) = Z(\tau) + Y(Z(\tau))[e_{ij}(t) - e_{ij}(\tau)]\frac{r_{ij}(\tau)}{2G} + \int_\tau^t Y(Z(\xi))[e_{ij}(t) - e_{ij}(\xi)]\dot{e}_{ij}(\xi)d\xi \tag{5.20}$$

主動應力可由下式求得

$$\frac{r_{ij}(t)}{2G} = \frac{1}{Y(Z(t))}[Y(Z(\tau))\frac{r_{ij}(\tau)}{2G} + \int_\tau^t Y(Z(\xi))\dot{e}_{ij}(\xi)d\xi] \tag{5.21}$$

(2) 給定應力歷程的應力空間彈塑性積分組成律

偏差應變解的積分表示式為

$$e_{ij}(t) = e_{ij}(\tau) + \frac{1}{2G}\{u(z(t))r_{ij}(t) - u(z(\tau))r_{ij}(\tau) + \int_\tau^t [1 - u(z(\zeta))]\dot{s}_{ij}(\zeta)d\zeta\} \tag{5.22}$$

類時間的記憶函數為

$$z(t) = z(\tau) + y(z(\tau))[s_{ij}(t) - s_{ij}(\tau)]r_{ij}(\tau) + \int_\tau^t y(z(\xi))[s_{ij}(t) - s_{ij}(\xi)]\dot{s}_{ij}(\xi)d\xi \tag{5.23}$$

主動應力可由下式求得

$$r_{ij}(t) = \frac{1}{y(z(t))}[y(z(\tau))r_{ij}(\tau) + \int_\tau^t y(z(\xi))\dot{s}_{ij}(\xi)d\xi] \tag{5.24}$$

(3) 給定應變歷程的應變空間彈塑性積分組成律

偏差應力解的積分表示式為

$$s_{ij}(t) = s_{ij}(\tau) + 2G\{-U(Z(t))R_{ij}(t) + U(Z(\tau))R_{ij}(\tau) + \int_\tau^t [1 + U(Z(\zeta))]\dot{e}_{ij}(\zeta)d\zeta\} \tag{5.25}$$

類時間的記憶函數為

$$Z(t) = Z(\tau) + Y(Z(\tau))[e_{ij}(t) - e_{ij}(\tau)]R_{ij}(\tau) + \int_\tau^t Y(Z(\xi))[e_{ij}(t) - e_{ij}(\xi)]\dot{e}_{ij}(\xi)d\xi \tag{5.26}$$

主動應變可由下式求得

$$R_{ij}(t) = \frac{1}{Y(Z(t))}[Y(Z(\tau))R_{ij}(\tau) + \int_{\tau}^{t} y(z(\xi))\dot{s}_{ij}(\xi)d\xi] \tag{5.27}$$

(4) 給定應力歷程的應變空間彈塑性積分組成律

偏差應變解的積分表示式為

$$e_{ij}(t) = e_{ij}(\tau) + \frac{1}{2G}\{u(z(t))2GR_{ij}(t) - u(z(\tau))2GR_{ij}(\tau) + \int_{\tau}^{t}[1 - u(z(\zeta))]\dot{s}_{ij}(\zeta)d\zeta\} \tag{5.28}$$

類時間的記憶函數為

$$z(t) = z(\tau) + y(z(\tau))[s_{ij}(t) - s_{ij}(\tau)]2GR_{ij}(\tau) + \int_{\tau}^{t} y(z(\xi))[s_{ij}(t) - s_{ij}(\xi)]\dot{s}_{ij}(\xi)d\xi \tag{5.29}$$

主動應變可由下式求得

$$R_{ij}(t) = \frac{1}{y(z(t))}[y(z(\tau))R_{ij}(\tau) + \frac{1}{2G}\int_{\tau}^{t} y(z(\xi))\dot{s}_{ij}(\xi)d\xi] \tag{5.30}$$

以上所用到的材料函數分述如下

$$\tilde{Y}(\bar{e}^p) \equiv exp[\int_0^{\bar{e}^p} \frac{k'(p) + 3G}{h(p)}dp] \tag{5.31}$$

$$\tilde{Z}(\bar{e}^p) \equiv \int_0^{\bar{e}^p} \frac{h'(p) + k'(p) + 3G}{6G^2}h(p)\tilde{Y}(p)dp \tag{5.32}$$

$$\tilde{U}(\bar{e}^p) \equiv 3G\tilde{Y}(\bar{e}^p)\int_0^{\bar{e}^p} \frac{dp}{h(p)\tilde{Y}(p)} \tag{5.33}$$

$$Y(Z) \equiv \tilde{Y}(\tilde{Z}^{-1}(Z)) = \tilde{Y}(\bar{e}^p) \tag{5.34}$$

$$U(Z) \equiv \tilde{U}(\tilde{Z}^{-1}(Z)) = \tilde{U}(\bar{e}^p) \tag{5.35}$$

$$\tilde{y}(\bar{e}^p) \equiv exp[\int_0^{\bar{e}^p} \frac{k'(p)}{h(p)}dp] \tag{5.36}$$

$$\tilde{z}(\bar{e}^p) \equiv \frac{2}{3}\int_0^{\bar{e}^p} [h'(p) + k'(p)]h(p)\tilde{y}(p)dp \tag{5.37}$$

$$\tilde{u}(\bar{e}^p) \equiv 3G\tilde{y}(\bar{e}^p)\int_0^{\bar{e}^p} \frac{dp}{h(p)\tilde{y}(p)} \tag{5.38}$$

$$y(z) \equiv \tilde{y}(\tilde{z}^{-1}(z)) = \tilde{y}(\bar{e}^p) \tag{5.39}$$

$$u(z) \equiv \tilde{u}(\tilde{z}^{-1}(z)) = \tilde{u}(\bar{e}^p) \tag{5.40}$$

$$z(t) = \tilde{z}(\bar{e}^p(t)) \tag{5.41}$$

$$Z(t) = \tilde{Z}(\bar{e}^p(t)) \tag{5.42}$$

5.6　彈塑邊界積分推導

有了以上兩種積分組成律模式後，以下將考慮整個系統的力平衡與位移 — 應變的幾何關係。首先沿用第四章邊界元素法在三維靜彈力的推導，於此不在贅述。

在無徹体力時，靜彈力的問題僅需對邊界作離散，唯於塑性變形或鬆弛應力產生時，則體積分不可免，且平衡方程式需改寫成增量型式，亦即以擬彈性的觀念可作如下改變:

$$u_i \to du_i$$
$$t_i \to dt_i$$
$$b_i \to db_i$$
$$\sigma_{ij} \to d\sigma_{ij}$$

由於彈塑性組成律是寫在增量應力與應變關係上，因此，增量曳引力的求取，可透過法向量特別的選取而得，說明如下:

$$dt_1 = d\sigma_{11},\ \ n = (1,0,0)$$
$$dt_1 = d\sigma_{12},\ \ n = (0,1,0)$$
$$dt_2 = d\sigma_{22},\ \ n = (1,0,0)$$
$$dt_2 = d\sigma_{23},\ \ n = (0,0,1)$$
$$dt_3 = d\sigma_{31},\ \ n = (0,0,1)$$
$$dt_3 = d\sigma_{33},\ \ n = (0,0,1)$$

對於小變形彈塑性問題之平衡方程式，可寫成

$$\frac{\partial(d\sigma_{ij})}{\partial x_i} + db_j = 0 \tag{5.43}$$

而從位移與應變的幾何關係知

$$d\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial(du_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial(du_j)}{\partial x_i}\right) = d\epsilon^e_{ij} + d\epsilon^p_{ij} \tag{5.44}$$

已知邊界條件

$$du_i = d\bar{u}_i,\ \ x\ on\ \ S_u \tag{5.45}$$

$$dt_i = d\bar{t}_i, \;\; x \; on \;\; S_t \tag{5.46}$$

由類虎克定律知

$$d\sigma_{ij} = 2\mu(d\epsilon_{ij} - d\epsilon^p_{ij}) + \lambda d\epsilon_{ll}\delta_{ij} \tag{5.47}$$

上式若以應變空間的推導方式而言，則可寫成

$$d\sigma_{ij} = d\sigma^e_{ij} - d\sigma^r_{ij} \tag{5.48}$$

其中，

$$d\sigma^r_{ij} = 2\mu \; d\epsilon^p_{ij} \tag{5.49}$$

$$d\sigma^e_{ij} = 2\mu \; d\epsilon_{ij} + \lambda \; d\epsilon_{ll} \; \delta_{ij} \tag{5.50}$$

將上式代入平衡方程式可得

$$\mu\frac{\partial^2(du_i)}{\partial x_j\partial x_j} + (\lambda+\mu)\frac{\partial^2(du_j)}{\partial x_i\partial x_j} - (\lambda\delta_{ij}\frac{\partial(d\epsilon^p_{kk})}{\partial x_j} + 2\mu\frac{\partial(d\epsilon^p_{ij})}{\partial x_j}) + db_i = 0 \tag{5.51}$$

邊界條件則可寫成

$$du_i = d\bar{u}_i, \;\; x \; on \;\; S_u \tag{5.52}$$

$$dt_i = dt^*_i = d\bar{t}_i + d\sigma^r_{ij}n_j, \;\; x \; on \;\; S_t \tag{5.53}$$

徹體力寫成

$$db^*_j = -(\lambda\delta_{ij}\frac{\partial(d\epsilon^p_{kk})}{\partial x_j} + 2\mu\frac{\partial(d\epsilon^p_{ij})}{\partial x_j}) + db_i \tag{5.54}$$

因此，只要將靜彈力之 db_i 與 dt_i 作如下之改變

$$db_i \rightarrow db^*_i \tag{5.55}$$

$$dt_i \rightarrow dt^*_i \tag{5.56}$$

即可進行積分方程的推導。再根據 $d\sigma^r_{ij}$ 之定義，配合前節之應變空間彈塑性組成律或稱初應力法，則邊界點的對偶積分方程式可寫為

$$\begin{aligned} c_{ij}\; du_j(x) &= R.P.V.\int_B U_{ki}(s,x)dt_k(s)dB(s) - C.P.V.\int_B T_{ki}(s,x)du_k(s)dB(s) \\ &+ \int_V \frac{\partial U_{ki}(s,x)}{\partial s_j} d\sigma^r_{kj}(s)dV(s) \end{aligned} \tag{5.57}$$

$$\begin{aligned} c_{ij}\; dt^e_j(x) &= C.P.V.\int_B L_{ki}(s,x)dt_k(s)dB(s) - H.P.V.\int_B M_{ki}(s,x)du_k(s)dB(s) \\ &+ \int_V \frac{\partial L_{ki}(s,x)}{\partial s_j} d\sigma^r_{kj}(s)dV(s) \end{aligned} \tag{5.58}$$

以上已假設 $db_k = 0$ 。其中， $dt_j^e(x)$ 代表直接由增量應變以類虎克定律得到的擬增量彈性應力所得的增量彈性曳引力值，此值並非由增量全應力所得的曳引力值。同理，若採用應變空間彈塑性組成律時，則邊界點的對偶邊界積分方程式可寫為

$$c_{ij}\ du_j(x) = R.P.V. \int_B U_{ki}(s,x)dt_k(s)dB(s) - C.P.V. \int_B T_{ki}(s,x)du_k(s)dB(s) + \int_V S_{jki}(s,x)d\epsilon_{jk}^p(s)dV(s) \tag{5.59}$$

$$c_{ij}\ dt_j^e(x) = C.P.V. \int_B L_{ki}(s,x)dt_k(s)dB(s) - H.P.V. \int_B M_{ki}(s,x)du_k(s)dB(s) + \int_V T_{jki}(s,x)d\epsilon_{jk}^p(s)dV(s) \tag{5.60}$$

其中， $S_{jki}(s,x)$ 表示於 x 處受 i 方向之集中力，所產生於 s 處的 σ_{jk} 應力場，而 $T_{kji}(s,x)$ 可視為 $S_{jki}(s,x)$ 中將 x 場 i 方向物理量看成 i 方向位移場再作曳引力運算而得。以上對偶積分式的第二式提供了計算邊界切應力的一條途徑。唯於法向方向的確定與相關主值的計算需格外小心。而目前文獻均以替代方法求得，係將得到的邊界位移予以切向數值導微，再配合求得的邊界曳引力，可求得邊界切應力，此法區域效應很明顯，只用到局部的邊界物理量，而不受全部邊界物理量的影響。若以對偶積分式的第二式解之，則無此問題。

另外值得一提的是，當域內某點產生塑性變形或鬆弛應力時，則將計算體積分。對域內應力計算而言，此體積分的核函數具強奇異的 Cauchy 型式，因此其積分值可分兩部份，一為 Cauchy 主值，另一為跳躍值，說明如下:

(1) 應變空間的推導，體積分之強奇異項為

$$\begin{aligned}&\int_V \frac{\partial L_{ki}(s,x)}{\partial s_j} d\sigma_{kj}^r(s)dV(s)\\ &= C.P.V. \int_V \frac{\partial L_{ki}(s,x)}{\partial s_j} d\sigma_{kj}^r(s)dV(s) + jump\ term\end{aligned}$$

(2) 應力空間的推導，體積分之強奇異項為

$$\begin{aligned}&\int_V T_{ikj}(s,x)d\epsilon_{ik}^p(s)dV(s)\\ &= C.P.V. \int_V T_{ikj}(s,x)d\epsilon_{ik}^p(s)dV(s) + jump\ \ term\end{aligned}$$

取一特例說明如下，當 $n(x) = (0,1,0)$ ， $dt_1^e = d\sigma_{12}^e$ 時，其

$$jump\ term\ of\ d\sigma_{12}^e = \frac{8-10\nu}{15(1-\nu)} d\sigma_{12}^r \tag{5.61}$$

則 $d\sigma_{12}$ 之自由項 (free term) 為

$$free\ term\ of\ d\sigma_{12} = \frac{-7+5\nu}{15(1-\nu)} d\sigma_{12}^{r} \tag{5.62}$$

5.7 數值計算

在實際計算中，係採用增量型式，對每一負荷增量，進行疊代計算，以得到我們所要的塑性增量應變或鬆弛增量應力。邊界元素法與有限元素在彈塑性問題的處理上有若干相同之處，於數值處理時，主要分為兩部份，一為大域的邊界元素與 cell 之分割與力平衡所得的邊界積分方程式的疊代，另一為元素內之組成律模式疊代，可以很有效率的計算塑性應變增量或鬆弛應力增量，進而求得整個系統的反應值。

5.8 結語

本章已就邊界元素法在彈塑性問題的應用作一介紹性探討，並以對偶積分式的架構加以推導，文中涵蓋了應力與應變空間的彈塑性理論，且說明了彈塑性的積分方程和靜彈力之不同處及其所多衍生的問題。文中對小域應力應變組成律與大域的力平衡，均以解的積分表示式來描述。前者的核函數，可稱為材料核函數，因為材料參數與材料函數含在其中。而後者的核函數則為力學平衡下的基本解，這些核函數均充份反應系統的特性，在此一起討論時，主要是想加重其扮演的角色。而這些式子在未作時間 (材料本構系統) 與空間 (力學平衡系統) 離散前，皆為正解。此種描述系統的方法，不管對實驗或計算方面的應用，均有其優點。因此，不失為一種研究系統反應的可行進路。

5.9 參考文獻

1 F. J. Rizzo, An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics, Quarterly J. of Applied Mathematics, Vol.25, pp.83-95, 1967.

2 J. L. Swedlow, and T. A. Cruse, Formulation of Boundary Integral Equations for Three Dimensional Elastoplastic Flow, Vol.7, No.12, pp.1673-1683, 1971.

3 A. Mendelson, Boundary Integral Methods in Elasticity and Plasticity, NASA TN-D-7418, 1973.

4 H. D. Bui, Some Remarks about the Formulation of Three Dimensional Thermoelastoplastic Problems by Integral Equations, Int. J. Solids Struc., Vol.14, pp.935-939, 1978.

5 杜慶華等編著，邊界積分方程方法— 邊界元法，高等教育出版社，北京，1989。

6 D. E. Beskos, Boundary Element Method in Mechanics, Amsterdam, Elsevier Science Publ., 1987.

7 H.-K. Hong and J. K. Liou, Integral Equation Representation of Flow Elastoplasticty derived from Rate Equation Models, ACTA Mechanica, Vol.96, pp.181-202, 1993.

8 H.-K. Hong, H. S. Lan and J. K. Liou, Study of integration strategy for thermal-elastic-plastic models, J. Pressure and Vessel Technology, Transactions of ASME, Vol.114, No.1, pp.39-45, 1992.

9 劉錦坤，熱黏彈塑性積分組成律之研究，台大應力所博士論文，台北，1990 。

10 S. Mukherjee, Boundary Element Methods in Creep and Fracture, Applied Science Publisher, New York, 1982.

【存檔：e:/dualbem/dbem5.te】【建檔:Oct./2/’2000】