第 六 章

聲波數值共振問題之探討

6.1　簡介

前面幾章均討論積分方程在純空間問題的應用，亦即與時間無關。然而實際的工程或物理問題常是時空的問題 (space and time) ，例如波動現象即是一例。而聲波問題則為典型的純量波，目前邊界元素法在此方面的應用仍偏重於均勻場介質的線性化問題。如前所說，聲波為依時而變的問題。但對某一單頻簡諧波動而言，在某種觀點而言，可視為與時間無關。頻率域的解析法就是這個想法的推廣。但由於聲波頻率範圍偏高（和結構系統相比而言），因此頻率域解法較為普遍，而時間域數值解析仍存在著許多困難。聲波內外域問題均被成功地用積分方程解決了。本章重點將不在贅述對偶積分式在聲波的應用，因為這方面日本學者 Terai 曾於 1980 年將其應用在含退化邊界的障屏或螢幕 (screen or barrier) 聲波問題上。而陳與陳亦分析過含不完全隔間室內空間的自然聲頻與聲模問題。最近幾年，仍有這方面實際工程應用的文章發表，讀者可參考之。筆者倒是想介紹在外域聲波問題所多衍生的虛擬頻率的問題，因為這在前幾章並不會發生。本章主要探討以對偶積分方程解外域之聲波輻射或散射問題之虛擬頻率現象。經由對偶積分式理論中拿不同的核函數來求解此類問題時，將伴隨著不同的虛擬頻率。為驗證此點，首先以一維聲波問題說明之，再以具解析解的的二維圓柱與三維球狀輻射與散射體為例說明之。由此兩例均證實了問題所給的邊界條件型式並不影響虛擬頻率的值，而是由所使用解的積分表示式中核函數與奇異源分佈的邊界而定。於實際解析推導並無此問題，此因數值處理才產生的虛擬頻率，其實是等於在處理一不定型極限的 0/0 問題。因未定係數僅含分子部份，無法反應出此存在的有限值，且因為要造成分母為零的頻率為無理數，於電腦運算時，雖不會有數值無效情

形，但於虛擬頻率附近其數值敏感度很大，易造成偏離正解的誤差。若改以束制條件的另一觀點而言，此現象在不可壓縮之靜彈力應力分析與含近乎剛性元素之結構分析時均會有類似的機制發生，在本文也將予以討論。經由本章的介紹，將更可看出對偶架構中第二式，即俗稱的超奇異積分方程式所扮演的角色。在靜問力問題它是退化邊界問題的解題之鑰。在動態外域問題則是確立唯一解的不二法寶。當然對於動態外域的退化邊界問題更是不可或缺的。有關對偶積分方程理論，在 ASME Applied Mechanics Review 有一詳盡的回顧文章可參考。

6.2　虛擬頻率問題之介紹

當一單自由度振動系統，承受含自然頻率之外力激發時，會產生振動放大的現象，稱為共振，此為自然發生之物理現象。此現象在數學與物理上均可反應此事實。但於積分方程求解外域之散射或輻射問題時，當入射波頻率或輻射頻率與對應之內域相關頻率相同時，則其數值結果將呈現不穩定而偏離正解，吾人可稱此為“ 數值共振”。此非自然現象，而是因採取的數值方法過程中所衍生的問題，此頻率寄生於所使用的方法中，可稱為寄生頻率，一般文獻稱為虛擬頻率 (fictitious frequency) 或不正常頻率 (irregular frequency) ，此乃因純解析推導不會有此問題的。在以頻率域求解聲波或彈性波問題時，亦有此現象。於暫態反應分析之應用時，若以快速富立葉轉換 (FFT) 之反轉換求解，更需特別留意，否則將導致很大的誤差。綜觀文獻上克服此問題的作法，可歸納如下 [4]:

(1) 內域補助束制條件法 (CHIEF)、 (2) 對偶積分式法、 (3) 合成對偶積分式法 (Burton 與 Miller 法)、 (4) 複合勢能法、 (5) 修正基本解法與 (6) 數值內插後處理法。以上方法，各有其優缺點，在此不作贅述。在對偶積分方程的架構中，均可看出其相互間的關係及虛擬頻率發生的機制。

6.3　聲波對偶積分式的推導

線性化聲波方程式的控制方程式為

$$\nabla^2 u = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Q(x,t) \tag{6.1}$$

其中， u 為速度勢位， c 為波速， $Q(x,t)$ 為聲源項。在頻率域的控制方程可改寫成

$$\nabla^2 u + k^2 u = Q(x) \tag{6.2}$$

其中，k 為波數，$k=\omega/c$ 。定義基本解 $U(s,x)$ 滿足下式

$$\nabla^2 U(x,s)+k^2U(x,s)=-4\pi\ \delta(x-s) \tag{6.3}$$

其中，

$$U(x,s)=\frac{e^{-ikr}}{r},\quad r=\mid x-s\mid \tag{6.4}$$

上式當 $k\rightarrow 0$ 時，則會變成 Laplace 的三維基本解。引入格林第三定理，可得域內點對偶積分式的第一式

$$4\pi\ u(x)=\int_B\{U(s,x)t(s)-T(s,x)u(s)\}dB(s) \tag{6.5}$$

將法向微分運算子作用到上式後，可得

$$4\pi\ t(x)=\int_B\{L(s,x)t(s)-M(s,x)u(s)\}dB(s) \tag{6.6}$$

其中，U,T,L,M 核函數分別為

一維時，對偶積分式的四個核函數分別為

$$U(s,x)=\frac{sin(kr)}{2k} \tag{6.7}$$

$$T(s,x)=\frac{\partial U}{\partial s} \tag{6.8}$$

$$L(s,x)=\frac{\partial U}{\partial x} \tag{6.9}$$

$$M(s,x)=\frac{\partial^2 U}{\partial s\partial x} \tag{6.10}$$

二維時，對偶積分式的四個核函數分別為

$$U(s,x)=\frac{H_0^2(kr)}{4i} \tag{6.11}$$

$$T(s,x)=\frac{-ik}{4}\frac{\partial H_0(kr)}{\partial(kr)}\frac{y_in_i}{r} \tag{6.12}$$

$$L(s,x)=\frac{ik}{4}\frac{\partial H_0(kr)}{\partial(kr)}\frac{y_i\bar{n}_i}{r} \tag{6.13}$$

$$M(s,x)=\frac{-ik^2}{4}\frac{\partial^2 H_0(kr)}{\partial(kr)^2}\frac{y_iy_j}{r^2}n_i\bar{n}_j-[\frac{-y_iy_j}{r^3}+\frac{\delta_{ij}}{r}]\frac{\partial H_0(kr)}{\partial(kr)}n_i\bar{n}_j \tag{6.14}$$

三維時，對偶積分式的四個核函數分別為

$$U(x,s)=\frac{e^{ikr}}{r} \tag{6.15}$$

$$T(s,x)=(ikr+1)y_in_ie^{-ikr}/r^3 \tag{6.16}$$

$$L(s,x)=-(ikr+1)y_i\bar{n}_ie^{-ikr}/r^3 \tag{6.17}$$

$$M(s,x)=\{\frac{ik\delta_{ij}}{r^2}+\frac{\delta_{ij}}{r^3}+[\frac{k^2}{r^3}-\frac{3ik}{r^4}-\frac{3}{r^5}]y_iy_j\}n_i\bar{n}_je^{-ikr} \tag{6.18}$$

以上核函數間滿足勢論中的對偶關係，

$$U(s,x) = U(x,s) \tag{6.19}$$

$$T(s,x) = -L(x,s) \tag{6.20}$$

$$M(s,x) = M(x,s) \tag{6.21}$$

6.4 一維聲波問題之解析

本節將考慮一維半無限聲波傳遞問題，其控制方程式如下 [3]：

$$\{\frac{d^2}{dx^2} + k^2\}u(x) = 0,\ \ x\ \in\ D \tag{6.22}$$

邊界條件可為如下任一種

$$(1)\quad t(x) = \bar{t},\ \ x = x_0 \tag{6.23}$$

$$(2)\quad u(x) = \bar{u},\ \ x = x_0 \tag{6.24}$$

$$(3)\quad au(x) + bt(x) = \bar{m},\ \ x = x_0 \tag{6.25}$$

吾人若取一半無限域的格林解 $U(s,x)$ 如圖 6.1 ，其滿足如下控制方程式與邊界條件

$$\{\frac{d^2}{dx^2} + k^2\}U(x,s) = \delta(x-s),\ \ x\ \in\ D$$

$$T(x,s)\ |_{x=0}\ \ = 0 \tag{6.26}$$

圖 6.1 一維聲波問題的基本解

根據對偶積分式的理論架構，因此可將基本解寫成如下型式

$$U(s,x) = \begin{cases} \frac{i}{k}e^{-ikx}cos(ks), & 0 < s < x \\ \frac{i}{k}e^{-iks}cos(kx), & s > x \end{cases} \tag{6.27}$$

$$T(s,x)=\begin{cases} -ie^{-ikx}sin(ks), & 0<s<x \\ e^{-iks}cos(kx), & s>x \end{cases} \tag{6.28}$$

$$L(s,x)=\begin{cases} e^{-ikx}cos(ks), & 0<s<x \\ -ie^{-iks}sin(kx), & s>x \end{cases} \tag{6.29}$$

$$M(s,x)=\begin{cases} -ke^{-ikx}sin(ks), & 0<s<x \\ -ke^{-iks}sin(kx), & s>x \end{cases} \tag{6.30}$$

實虛部經整理如下表

	interior $(0<s<x)$	exterior $(s>x)$
U	$\frac{1}{k}sin(kx)cos(ks)$	$\frac{1}{k}sin(ks)cos(kx)$
	$i\frac{1}{k}cos(kx)cos(ks)$	$i\frac{1}{k}cos(ks)cos(kx)$
T	$-sin(kx)sin(ks)$	$cos(ks)cos(kx)$
	$-icos(kx)sin(ks)$	$-isin(ks)cos(kx)$
L	$cos(kx)cos(ks)$	$-sin(ks)sin(kx)$
	$-isin(kx)cos(ks)$	$-icos(ks)sin(kx)$
M	$-kcos(kx)sin(ks)$	$-kcos(ks)sin(kx)$
	$isin(kx)sin(ks)$	$iksin(ks)sin(kx)$

則本問題之一般解可透過格林第三定理，表成下式

$$u(x)=p\ U(s,x)+q\ T(s,x) \tag{6.31}$$

上式，實源於邊界僅為兩個端點，故無需積分。當 $x>s$ 時，可寫成

$$u(x)=p\frac{i}{k}e^{-ikx}cos(ks)-qie^{-ikx}sin(ks) \tag{6.32}$$

由上式可看出 $U(s,x)$ 與 $T(s,x)$ 對 x 而言是相依的。這關係亦可由式 (6.8) 看出，故未定係數可看成一個。當 $x>s$ 時，可寫成

$$u(x)=we^{-ikx}(cos(ks)-sin(ks)) \tag{6.33}$$

再套入邊界條件後，即當 $x=x_0>s$ ，則未定係數 w 可由下式求得

$$\bar{u}=we^{-ikx_0}(cos(ks)-sin(ks)) \tag{6.34}$$

此時的虛擬頻率，發生在

$$cos(ks)-sin(ks)=0 \tag{6.35}$$

意即

$$ks=n\pi+\frac{\pi}{4}\ \ ,\ \ n=0,1,2,3\cdots \tag{6.36}$$

因為此時無法決定出未定係數 p 。當僅選用單層勢能時，於 $x > s$ 時，可寫成

$$u(x) = p\frac{i}{k}e^{-ikx}cos(ks) \tag{6.37}$$

再套入邊界條件後，當 $x = x_0 > s$ ，則未定係數 p 可由下式求得

$$\bar{u} = pe^{-ikx_0}cos(ks)\frac{i}{k} \tag{6.38}$$

此時的虛擬頻率，發生在

$$cos(ks) = 0 \tag{6.39}$$

意即

$$ks = (n+\frac{1}{2})\pi \quad , \quad n = 0,1,2,3\cdots \tag{6.40}$$

當僅選用雙層勢能時，於 $x > s$ 時，可寫成

$$u(x) = -qe^{-ikx}sin(ks) \tag{6.41}$$

再套入邊界條件後，當 $x = x_0 > s$ ，則未定係數 q 可由下式求得

$$\bar{u} = -qe^{-ikx_0}sin(ks) \tag{6.42}$$

此時的虛擬頻率，發生在

$$sin(ks) = 0 \tag{6.43}$$

意即

$$ks = n\pi \quad , \quad n = 0,1,2,3\cdots \tag{6.44}$$

因 $u(x)$ 為複數解，可技巧地取解的積分表示為

$$u(x) = pe^{-ikx}(cos(ks) + i\ \eta\ sin(ks)) \tag{6.45}$$

其中， η 為一常數。上式滿足控制方程與遠域輻射條件，故為一般解的表示式。再套入邊界條件後，當 $x = x_0 > s$ ，則未定係數 p 為

$$\bar{u} = pe^{-ikx_0}(cos(ks) + i\ \eta\ sin(ks)) \tag{6.46}$$

此時只要 $\eta \neq 0$ ，則將不會產生虛擬頻率。因為不管任何 ks 的組合， $cos(ks) + i\ sin(ks)$ 絕不可能為 $0 + 0i$ ，因此未定係數即可精確求得，這個方法叫複合勢能法 [3] 。此即為 Burton 與 Miller 的精神。

****

問題: 若將半無限域格林解改成全域基本解，亦即輔助系統 $U(s,x) = sin(kr)/2k$ ，則直接法中虛擬頻率會有什麼變化?

****

6.5　二維圓柱体幅射與散射之外域解析解

(一) 輻射聲場解析解的理論推導

我們考慮圓柱體不均勻輻射問題如下：

圖 6.2 非均勻輻射場

(A) Dirichlet 問題 (如圖 6.2 所示)，其控制方程與邊界條件分別如下：

$$\text{控制方程：}\quad (\nabla^2 + k^2)u(r,\theta) = 0,\ (r,\theta) \in D \tag{6.47}$$

$$\text{邊界條件：}\quad u(a,\theta) = \begin{cases} 1, & -\alpha < \theta < \alpha \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{6.48}$$

其中，k 為波數 (ω/c)，D 為定義域，u 為聲壓，a 為圓柱半徑，α 為圓柱體輻射區的夾角。我們可利用 Fourier 級數求解。首先將解寫成

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n H_n^{(1)}(kr)\cos(n\theta) = p_0 H_0^{(1)}(kr) + \sum_{n=1}^{\infty} p_n H_n^{(1)}(kr)\cos(n\theta) \tag{6.49}$$

其中，$p_n (n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$ 為未定係數。代入 Dirichlet 邊界條件，可得

$$u(a,\theta) = p_0 H_0^{(1)}(kr) + \sum_{n=1}^{\infty} p_n H_n^{(1)}(kr)\cos(n\theta) = \begin{cases} 1, & -\alpha < \theta < \alpha \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{6.50}$$

(6.50) 式等號兩端同乘以 $\cos(m\theta)$， $m = 0, 1, 2, 3, \cdots$，並從 $-\pi$ 積分到 π 。透過正交關係，

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\theta)\cos(m\theta)d\theta = \pi\delta_{mn}, \tag{6.51}$$

其中, $\delta_{mn} = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & m \neq n \\ 0, & m = n \end{array} \right\}$, 可得 p_0, p_n 分別如下：

$$p_0 = \frac{\alpha}{\pi H_0^{(1)}(ka)} \tag{6.52}$$

$$p_n = \frac{2}{n\pi}\sin(n\alpha)\frac{1}{H_n^{(1)}(ka)} \tag{6.53}$$

將式 (6.52)(6.53) 代入式 (6.49) 得

$$u(r,\theta) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}{}' \frac{\sin(n\alpha)}{n}\frac{H_n^{(1)}(kr)}{H_n^{(1)}(ka)}\cos(n\theta) \tag{6.54}$$

其中 $'$ 為 Neumann 因子，表示第一項 $(n = 0)$ 需取一半值。此問題之不均勻輻射的全場解析解等高線圖如圖 6.3 所示。

圖 6.3 非均勻輻射場解析解 (Dirichlet 問題)

(B) Neumann 問題，其控制方程與邊界條件分別如下：

$$\text{控制方程：}\quad (\nabla^2 + k^2)u(r,\theta) = 0,\ (r,\theta) \in D \tag{6.55}$$

$$\text{邊界條件：}\quad t(a,\theta) = \begin{cases} 1, & -\alpha < \theta < \alpha \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{6.56}$$

其中， $t(r,\theta)$ 為音壓 $u(r,\theta)$ 的法向導微。我們可利用 Fourier 級數求解。首先由 (6.49) 式，我們可得到

$$t(r,\theta) = -\sum_{n=0}^{\infty} p_n k H_n^{(1)\prime}(kr)\cos(n\theta) = -p_0 k H_0^{(1)\prime}(kr) - \sum_{n=1}^{\infty} p_n k H_n^{(1)\prime}(kr)\cos(n\theta) \tag{6.57}$$

其中， p_n 為未定係數。代入 Neumann 邊界條件，可得

$$t(a,\theta) = -p_0 k H_0^{(1)\prime}(ka) - \sum_{n=1}^{\infty} p_n k H_n^{(1)\prime}(ka)\cos(n\theta) = \begin{cases} 1, & -\alpha < \theta < \alpha \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{6.58}$$

(6.58) 式等號兩端同乘以 $\cos(m\theta)$，$(m = 0,1,2,3,\cdots)$ ，並從 $-\pi$ 積分到 π 。透過正交關係，可得 p_0, p_n 分別如下：

$$p_0 = -\frac{\alpha}{\pi k H_0^{(1)\prime}(ka)} \tag{6.59}$$

$$p_n = -\frac{2}{\pi k}\frac{\sin(n\alpha)}{n}\frac{1}{H_n^{(1)\prime}(ka)} \tag{6.60}$$

將式 (6.59)(6.60) 代入式 (6.49) 得

$$u(r,\theta) = -\frac{2}{\pi k}\sum_{n=0}^{\infty}{}' \frac{\sin(n\alpha)}{n}\frac{H_n^{(1)}(kr)}{H_n^{(1)\prime}(ka)}\cos(n\theta) \tag{6.61}$$

其不均勻輻射的全場解析解等高線圖如圖 6.4 所示。

圖 6.4 非均勻輻射場解析解 (Neumann 問題)

(二) 散射問題解析解的理論推導

我們考慮圓柱體的散射問題 (如圖 6.5 所示)，當散射體為軟性或剛性時，可分述如下：

圖 6.5 散射問題

(A) Dirichlet 問題，其控制方程、邊界條件分別如下：

$$\text{控制方程：}\quad (\nabla^2+k^2)u(r,\theta)=0,\ (r,\theta)\in D \tag{6.62}$$

$$\text{邊界條件：}\quad \begin{cases} u(r,\theta)=e^{ikr\cos\theta}, & r\to\infty \\ u(r,\theta)|_{r=a}=0 \end{cases} \tag{6.63}$$

我們以疊加原理，將散射問題轉成輻射的問題。由於散射體為軟性體，可以 Dirichlet 邊界條件加以模擬，故可得

$$\begin{aligned} u^{(r)}(a,\theta) &= -u(a,\theta) \\ &= -J_0(ka)-2\sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(ka)\cos(n\theta) \end{aligned} \tag{6.64}$$

其中， $u^{(r)}(a,\theta)$ 為輻射場在圓柱體的邊界條件。由上節輻射場的推導，其解如 (6.49) 式。將 (6.49) 式代入 Dirichlet 邊界條件，其解可寫成

$$p_0H_0^{(1)}(ka)+\sum_{n=1}^{\infty} p_nH_n^{(1)}(ka)\cos(n\theta)=-J_0(ka)-2\sum_{n=1}^{\infty} i^nJ_n(ka)\cos(n\theta) \tag{6.65}$$

(6.65) 式等號兩端同乘以 $\cos(m\theta)$ ， $m=0,1,2,3,\cdots$ ，並從 $-\pi$ 積分到 π 。透過正交關係，可得 p_0,p_n 分別如下：

$$p_0=-\frac{J_0(ka)}{H_0^{(1)}(ka)} \tag{6.66}$$

$$p_n=-\frac{2i^nJ_n(ka)}{H_n^{(1)}(ka)} \tag{6.67}$$

將式 (6.66)(6.67) 代入式 (6.49) 得

$$u^{(r)}(r,\theta)=-\frac{J_0(ka)}{H_0^{(1)}(ka)}H_0^{(1)}(kr)-2\sum_{n=1}^{\infty} i^n\frac{J_n(ka)}{H_n^{(1)}(ka)}H_n^{(1)}(kr)\cos(n\theta) \tag{6.68}$$

散射場 $u^{(s)}(r,\theta)$ ，可表為下式：

$$u^{(s)}(r,\theta)=u^{(r)}(r,\theta)=-\frac{J_0(ka)}{H_0^{(1)}(ka)}H_0^{(1)}(kr)-2\sum_{n=1}^{\infty} i^n\frac{J_n(ka)}{H_n^{(1)}(ka)}H_n^{(1)}(kr)\cos(n\theta) \tag{6.69}$$

其散射場 $u^{(s)}(r,\theta)$ 的解析解等高線圖如圖 6.6 所示。若要求得全場 $u(r,\theta)$ ，必須入射場 $u^{(i)}(r,\theta)$ 再加上散射場 $u^{(s)}(r,\theta)$ 可得

$$u(r,\theta)=u^{(i)}(r,\theta)+u^{(s)}(r,\theta) \tag{6.70}$$

圖 6.6 散射場解析解 (Dirichlet 問題, $n = 20, ka = \pi$)

(B) Neumann 問題，其控制方程與邊界條件分別如下：

$$\text{控制方程：}\quad (\nabla^2 + k^2)u(r,\theta) = 0,\ (r,\theta) \in D \tag{6.71}$$

$$\text{邊界條件：}\quad \begin{cases} u(r,\theta) = e^{ikr\cos\theta}, & r \to \infty \\ t(r,\theta)|_{r=a} = 0 \end{cases} \tag{6.72}$$

我們利用 Fourier 級數求解，且由入射邊界條件 $u^{(i)}(r,\theta)$ 可得

$$t^{(i)}(r,\theta) = -kJ_0(kr) - 2k\sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n'(kr)\cos(n\theta) \tag{6.73}$$

我們以疊加原理，將散射問題轉成輻射的問題，其原理如圖 6.7 所示。

圖 6.7 輻射與散射場分解圖

由於散射體為剛性體，可以 Neumann 邊界條件加以模擬，故可得

$$t^{(r)}(a,\theta) = -t^{(i)}(a,\theta) = kJ_0(ka) + 2k\sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n'(ka)\cos(n\theta) \tag{6.74}$$

由上節輻射場的推導，其解如 (6.49) 式可推得

$$t^{(r)}(r,\theta) = -p_0 k H_0^{(1)\prime}(kr) - \sum_{n=1}^{\infty} p_n k H_n^{(1)\prime}(kr)\cos(n\theta) \tag{6.75}$$

(6.75) 代入 Neumann 邊界條件，可得

$$\begin{aligned} t^{(r)}(a,\theta) &= -p_0 k H_0^{(1)\prime}(ka) - \sum_{n=1}^{\infty} p_n k H_n^{(1)\prime}(ka) cos(n\theta) \\ &= kJ_0(ka) + 2k\sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n'(ka)\cos(n\theta) \end{aligned} \tag{6.76}$$

上式等號兩端同乘以 $\cos(m\theta)$ ，$m = 0, 1, 2, 3, \cdots$ ，並從 $-\pi$ 積分到 π 。透過正交關係，可得 p_0, p_n 分別如下：

$$p_0 = -\frac{J_0'(ka)}{H_0^{(1)\prime}(ka)} \tag{6.77}$$

$$p_n = -2\frac{i^n J_n'(ka)}{H_n^{(1)\prime}(ka)} \tag{6.78}$$

將式 (6.77)(6.78) 代入式 (6.49) 得

$$u^{(r)}(r,\theta) = -\frac{J_0'(ka)}{H_0^{(1)\prime}(ka)} H_0^{(1)}(kr) - 2\sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{J_n'(ka)}{H_n^{(1)\prime}(ka)}(kr)\cos(n\theta) \tag{6.79}$$

散射場 $u^{(s)}(r,\theta)$ ，可表為下式：

$$u^{(s)}(r,\theta) = u^{(r)}(r,\theta) = -\frac{J_0'(ka)}{H_0^{(1)\prime}(ka)} H_0^{(1)} - 2\sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{J_n'(ka)}{H_n^{(1)\prime}(kr)}\cos(n\theta) \tag{6.80}$$

其散射場 $u^{(s)}(r,\theta)$ 的解析解等高線圖如圖 6.8 所示。若要求得全場 $u(r,\theta)$ ，必須入射場 $u^{(i)}(r,\theta)$ 再加上散射場 $u^{(s)}(r,\theta)$ 可得

$$u(r,\theta) = u^{(i)}(r,\theta) + u^{(s)}(r,\theta) \tag{6.81}$$

圖 6.8 散射射場解析解 (Neumann 問題, $n = 20, ka = 4\pi$)

6.5.1 虛擬頻率的機制探討 - 離散系統

於積分方程求解外域之輻射或散射問題時，當入射波頻率或輻射頻率對應到內域相關頻率時，則其數值結果將不唯一並呈現不穩定而偏離正解，我們稱此為“數值共振”。此

非自然現象，而是因採取的數值方法過程中所衍生的問題，此頻率寄生於所使用的方法中，可稱為寄生頻率。一般文獻稱為虛擬頻率 (fictitious frequency) ，此乃因純解析推導不會有此問題。為了解析的方便，我們分析圓形邊界的問題，因為圓形邊界等間距離散後的影響係數矩陣，具有循環對稱的特性。其分析如下（陳與郭， 2000 ）：

圖6.8 R, θ, ρ 與 ϕ 之定義

核函數 U 為

$$U(s,x) = \frac{-i\pi}{2} H_0^{(1)}(kr) = \frac{\pi}{2}(-iJ_0(kr) + Y_0(kr)) \tag{6.82}$$

其中， $x = (\rho, \phi)$ ， $s = (R, \theta)$ ， ρ, R, ϕ, θ 及 r 之關係如圖 6.8 所示。因為 x 與 s 分別在半徑為 ρ 與 R 的邊界上，基於核函數可分離特性 (Jackson, 1986) ，藉兩基底 $J_m(kx)$ 與 $Y_m(kx)$ 將對偶架構四個核函數展開為

$$U(s,x) = \begin{cases} U^i(R,\theta;\rho,\phi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{2}[-iJ_m(kR) + Y_m(kR)]J_m(k\rho)cos(m(\theta-\phi)), R > \rho \\ U^e(R,\theta;\rho,\phi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{2}[-iJ_m(k\rho) + Y_m(k\rho)]J_m(kR)cos(m(\theta-\phi)), R < \rho \end{cases} \tag{6.83}$$

$$T(s,x) = \begin{cases} T^i(R,\theta;\rho,\phi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{2}[-iJ'_m(kR) + Y'_m(kR)]J_m(k\rho)cos(m(\theta-\phi)), R > \rho \\ T^e(R,\theta;\rho,\phi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{2}[-iJ_m(k\rho) + Y_m(k\rho)]J'_m(kR)cos(m(\theta-\phi)), R < \rho \end{cases} \tag{6.84}$$

$$L(s,x) = \begin{cases} L^i(R,\theta;\rho,\phi) = \sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{2}[-iJ_m(kR) + Y_m(kR)]J'_m(k\rho)cos(m(\theta-\phi)), R > \rho \\ L^e(R,\theta;\rho,\phi) = \sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{2}[-iJ'_m(k\rho) + Y'_m(k\rho)]J_m(kR)cos(m(\theta-\phi)), R < \rho \end{cases} \tag{6.85}$$

$$M(s,x) = \begin{cases} M^i(R,\theta;\rho,\phi) = \sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{2}[-iJ'_m(kR) + Y'_m(kR)]J'_m(k\rho)cos(m(\theta-\phi)), R > \rho \\ M^e(R,\theta;\rho,\phi) = \sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{2}[-iJ'_m(k\rho) + Y'_m(k\rho)]J'_m(kR)cos(m(\theta-\phi)), R < \rho \end{cases} \tag{6.86}$$

兩點函數 $U(s,x)$ 在源點 s 與場點 x 是可分離的， J_m 與 Y_m 分別為 m 階第一類與第二類 $Bessel$ 函數。藉由沿著半徑 R 之真實邊界上分佈 $2N$ 個常數源點 u 或 t 且在半徑 ρ 之邊界上分佈 $2N$ 個點，我們可以得到內外域影響係數矩陣,

$$[U^i] = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{2N-2} & a_{2N-1} \\ a_{2N-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{2N-3} & a_{2N-2} \\ a_{2N-2} & a_{2N-1} & a_0 & \cdots & a_{2N-4} & a_{2N-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{2N-1} & a_0 \end{bmatrix} \tag{6.87}$$

$$[T^i] = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{2N-2} & b_{2N-1} \\ b_{2N-1} & b_0 & b_1 & \cdots & b_{2N-3} & b_{2N-2} \\ b_{2N-2} & b_{2N-1} & b_0 & \cdots & b_{2N-4} & b_{2N-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_{2N-1} & b_0 \end{bmatrix} \tag{6.88}$$

$$[L^i] = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{2N-2} & c_{2N-1} \\ c_{2N-1} & c_0 & c_1 & \cdots & c_{2N-3} & c_{2N-2} \\ c_{2N-2} & c_{2N-1} & c_0 & \cdots & c_{2N-4} & c_{2N-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_{2N-1} & c_0 \end{bmatrix} \tag{6.89}$$

$$[M^i] = \begin{bmatrix} d_0 & d_1 & d_2 & \cdots & d_{2N-2} & d_{2N-1} \\ d_{2N-1} & d_0 & d_1 & \cdots & d_{2N-3} & d_{2N-2} \\ d_{2N-2} & d_{2N-1} & d_0 & \cdots & d_{2N-4} & d_{2N-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & d_{2N-1} & d_0 \end{bmatrix} \tag{6.90}$$

$$[U^e] = \begin{bmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \cdots & p_{2N-2} & p_{2N-1} \\ p_{2N-1} & p_0 & p_1 & \cdots & p_{2N-3} & p_{2N-2} \\ p_{2N-2} & p_{2N-1} & p_0 & \cdots & p_{2N-4} & p_{2N-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_{2N-1} & p_0 \end{bmatrix} \tag{6.91}$$

$$[T^e] = \begin{bmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & \cdots & q_{2N-2} & q_{2N-1} \\ q_{2N-1} & q_0 & q_1 & \cdots & q_{2N-3} & q_{2N-2} \\ q_{2N-2} & q_{2N-1} & q_0 & \cdots & q_{2N-4} & q_{2N-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ q_1 & q_2 & q_3 & \cdots & q_{2N-1} & q_0 \end{bmatrix} \tag{6.92}$$

$$[L^e] = \begin{bmatrix} v_0 & v_1 & v_2 & \cdots & v_{2N-2} & v_{2N-1} \\ v_{2N-1} & v_0 & v_1 & \cdots & v_{2N-3} & v_{2N-2} \\ v_{2N-2} & v_{2N-1} & v_0 & \cdots & v_{2N-4} & v_{2N-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ v_1 & v_2 & v_3 & \cdots & v_{2N-1} & v_0 \end{bmatrix} \tag{6.93}$$

$$[M^e] = \begin{bmatrix} w_0 & w_1 & w_2 & \cdots & w_{2N-2} & w_{2N-1} \\ w_{2N-1} & w_0 & w_1 & \cdots & w_{2N-3} & w_{2N-2} \\ w_{2N-2} & w_{2N-1} & w_0 & \cdots & w_{2N-4} & w_{2N-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ w_1 & w_2 & w_3 & \cdots & w_{2N-1} & w_0 \end{bmatrix} \tag{6.94}$$

其中，影響係數矩陣之元素分別為

$$a_m = \int_{(m-\frac{1}{2})\Delta\theta}^{(m+\frac{1}{2})\Delta\theta} U^e(\theta,0)\rho\, d\theta \approx U^e(\theta_m,0)\rho\,\Delta\theta, \quad m = 0,1,2,\cdots,2N-1 \tag{6.95}$$

$$b_m = \int_{(m-\frac{1}{2})\Delta\theta}^{(m+\frac{1}{2})\Delta\theta} T^e(\theta,0)\rho\, d\theta \approx T^e(\theta_m,0)\rho\,\Delta\theta, \quad m = 0,1,2,\cdots,2N-1 \tag{6.96}$$

$$c_m = \int_{(m-\frac{1}{2})\Delta\theta}^{(m+\frac{1}{2})\Delta\theta} L^e(\theta,0)\rho\, d\theta \approx L^e(\theta_m,0)\rho\,\Delta\theta, \quad m = 0,1,2,\cdots,2N-1 \tag{6.97}$$

$$d_m = \int_{(m-\frac{1}{2})\Delta\theta}^{(m+\frac{1}{2})\Delta\theta} M^e(\theta,0)\rho\, d\theta \approx M^e(\theta_m,0)\rho\,\Delta\theta, \quad m = 0,1,2,\cdots,2N-1 \tag{6.98}$$

$$p_m = \int_{(m-\frac{1}{2})\Delta\theta}^{(m+\frac{1}{2})\Delta\theta} U^i(\theta,0)\rho\, d\theta \approx U^i(\theta_m,0)\rho\,\Delta\theta, \quad m=0,1,2,\cdots,2N-1 \tag{6.99}$$

$$q_m = \int_{(m-\frac{1}{2})\Delta\theta}^{(m+\frac{1}{2})\Delta\theta} T^i(\theta,0)\rho\, d\theta \approx T^i(\theta_m,0)\rho\,\Delta\theta, \quad m=0,1,2,\cdots,2N-1 \tag{6.100}$$

$$v_m = \int_{(m-\frac{1}{2})\Delta\theta}^{(m+\frac{1}{2})\Delta\theta} L^i(\theta,0)\rho\, d\theta \approx L^i(\theta_m,0)\rho\,\Delta\theta, \quad m=0,1,2,\cdots,2N-1 \tag{6.101}$$

$$w_m = \int_{(m-\frac{1}{2})\Delta\theta}^{(m+\frac{1}{2})\Delta\theta} M^i(\theta,0)\rho\, d\theta \approx M^i(\theta_m,0)\rho\,\Delta\theta, \quad m=0,1,2,\cdots,2N-1 \tag{6.102}$$

其中，$\Delta\theta = \frac{2\pi}{2N}$ 且 $\theta_m = m\Delta\theta$。影響係數矩陣 $[U],[T],[L]$ 與 $[M]$ 是圓形循環矩陣，因為影響係數存在著旋轉對稱。現引進圓形循環矩陣基底：$I, C_{2N}^1, C_{2N}^2, C_{2N}^{2N-1}$，可將 $[U],[T],[L]$ 與 $[M]$ 展開成 (Goldberg, 1991)

$$[U^i] = a_0 I + a_1 C_{2N}^1 + a_2 C_{2N}^2 + \cdots + a_{2N-1} C_{2N}^{2N-1} \tag{6.103}$$

$$[T^i] = b_0 I + b_1 C_{2N}^1 + a_2 C_{2N}^2 + \cdots + b_{2N-1} C_{2N}^{2N-1} \tag{6.104}$$

$$[L^i] = c_0 I + c_1 C_{2N}^1 + c_2 C_{2N}^2 + \cdots + c_{2N-1} C_{2N}^{2N-1} \tag{6.105}$$

$$[M^i] = d_0 I + d_1 C_{2N}^1 + d_2 C_{2N}^2 + \cdots + d_{2N-1} C_{2N}^{2N-1} \tag{6.106}$$

$$[U^e] = p_0 I + p_1 C_{2N}^1 + p_2 C_{2N}^2 + \cdots + p_{2N-1} C_{2N}^{2N-1} \tag{6.107}$$

$$[T^e] = q_0 I + q_1 C_{2N}^1 + q_2 C_{2N}^2 + \cdots + q_{2N-1} C_{2N}^{2N-1} \tag{6.108}$$

$$[L^e] = v_0 I + v_1 C_{2N}^1 + v_2 C_{2N}^2 + \cdots + v_{2N-1} C_{2N}^{2N-1} \tag{6.109}$$

$$[M^e] = w_0 I + w_1 C_{2N}^1 + w_2 C_{2N}^2 + \cdots + w_{2N-1} C_{2N}^{2N-1} \tag{6.110}$$

其中，I 是單位矩陣，而 C_{2N} 為單位循環矩陣如下所示:

$$C_{2N}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2N\times 2N} \tag{6.111}$$

根據循環矩陣理論，矩陣 $[U],[T],[L],[M]$ 與 $[C_{2N}]$ 具相似性，其特徵值可表示如下：

$$\lambda_\ell = a_0 + a_1\alpha_\ell^1 + a_2\alpha_\ell^2 + \cdots + a_{2N-1}\alpha_\ell^{2N-1}, \ell = 0, \pm1, \pm2, \cdots, \pm(N-1), N \tag{6.112}$$

$$\mu_\ell = b_0 + b_1\alpha_\ell^1 + b_2\alpha_\ell^2 + \cdots + b_{2N-1}\alpha_\ell^{2N-1}, \ell = 0, \pm1, \pm2, \cdots, \pm(N-1), N \tag{6.113}$$

$$\nu_\ell = c_0 + c_1\alpha_\ell^1 + c_2\alpha_\ell^2 + \cdots + c_{2N-1}\alpha_\ell^{2N-1}, \ell = 0, \pm1, \pm2, \cdots, \pm(N-1), N \tag{6.114}$$

$$\kappa_\ell = d_0 + d_1\alpha_\ell^1 + d_2\alpha_\ell^2 + \cdots + d_{2N-1}\alpha_\ell^{2N-1}, \ell = 0, \pm1, \pm2, \cdots, \pm(N-1), N \tag{6.115}$$

其中， $\lambda_\ell, \mu_\ell, \nu_\ell, \kappa_\ell$ 與 α_ℓ 分別為矩陣 $[U], [T], [L], [M]$ 與 $[C_{2N}]$ 的特徵值。我們可以很容易的找出 $[C_{2N}]$ 的特徵值 α_ℓ 是 $\alpha^{2N-1} = 1$ 的根，如下所示：

$$\alpha_\ell = e^{i\frac{2\pi\ell}{2N}}, \ell = 0, \pm1, \pm2, \cdots, \pm(N-1), N \quad \text{或}\, \ell = 0, 1, 2, \cdots, 2N-1 \tag{6.116}$$

其所對應特徵向量 $\{\phi_\ell\}$ 為

$$\{\phi_\ell\} = \left\{\begin{array}{c} 1 \\ \alpha_\ell^1 \\ \alpha_\ell^2 \\ \alpha_\ell^3 \\ \vdots \\ \alpha_\ell^{2N-1} \end{array}\right\}, \ell = 0, \pm1, \pm2, \cdots, \pm(N-1), N \quad \text{或}\, \ell = 0, 1, 2, \cdots, 2N-1 \tag{6.117}$$

將 $\alpha_\ell = e^{i\frac{2\pi\ell}{2N}}$ 代入 λ_ℓ ，得到

$$\lambda_\ell = \sum_{m=0}^{2N-1} a_m\alpha_\ell^m = \sum_{m=0}^{2N-1} a_m e^{i\frac{2\pi}{2n}m\ell}, \ell = 0, \pm1, \pm2, \cdots, \pm(2N-1), N \tag{6.118}$$

且根據 a_m 定義， $a_m = a_{2N-m}, m = 0, 1, 2, \cdots, 2N-1$ 代入上式，得到

$$\lambda_\ell = a_0 + (-1)^\ell a_N + \sum_{m=1}^{N-1}(\alpha_\ell^m + \alpha_\ell^{2N-m})a_m = \sum_{m=0}^{2N-1}\cos(m\ell\Delta\theta)a_m \tag{6.119}$$

再將 $a_m = U(\theta_m, 0)R\Delta\theta$ 代入上式，得到

$$\lambda_\ell \approx \sum_{m=0}^{2N-1}\cos(m\ell\Delta\theta)U(m\Delta\theta, 0)\rho\Delta\theta \tag{6.120}$$

將 N 趨近於無限大，黎曼和可化為積分式

$$\begin{aligned} \lambda_\ell = & \int_0^{2\pi}\cos(\ell\theta)U(\theta_m, 0)\rho d\theta \\ = & \int_0^{2\pi}\cos(\ell\theta)[\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}\tfrac{\pi}{2}(-iJ_\ell(k\rho) + Y_\ell(k\rho))J_\ell(k\rho)\cos(m\theta)]\rho d\theta \\ = & \pi^2\rho(-iJ_\ell(k\rho) + Y_\ell(k\rho))J_\ell(k\rho), \ell = 0, \pm1, \pm2, \cdots, \pm(N-1), N \end{aligned} \tag{6.121}$$

同理

$$\mu_\ell = \pi^2 k\rho(-iJ'_\ell(k\rho)) + Y'_\ell(k\rho))J_\ell(k\rho), \ell = 0, \pm1, \pm2, \cdots, \pm(N-1), N \tag{6.122}$$

$$\nu_\ell = \pi^2 k\rho(-iJ_\ell(k\rho)) + Y_\ell(k\rho))J'_\ell(k\rho), \ell = 0, \pm1, \pm2, \cdots, \pm(N-1), N \tag{6.123}$$

$$\kappa_\ell = \pi^2 k\rho(-iJ'_\ell(k\rho)) + Y'_\ell(k\rho))J'_\ell(k\rho), \ell = 0, \pm1, \pm2, \cdots, \pm(N-1), N \tag{6.124}$$

因為波數 k 藏於矩陣 $[U], [T], [L]$ 與 $[M]$ 中的每一元素中，所以對應的特徵值也是 k 的函數。尋找 Hemholtz 方程式的特徵值（內域）與虛擬值（外域）或尋找矩陣 $[U], [T], [L]$ 與 $[M]$ 的行列式為零的 k 值，相當於尋找 k 使 $[U], [T], [L]$ 與 $[M]$ 的特徵值相乘之零點，說明如下：

$$det[U^i] = \lambda_0\lambda_N(\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{N-1})(\lambda_{-1}\lambda_{-2}\cdots\lambda_{-(N-1)}) \tag{6.125}$$

$$det[U^e] = \lambda_0\lambda_N(\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{N-1})(\lambda_{-1}\lambda_{-2}\cdots\lambda_{-(N-1)}) \tag{6.126}$$

$$det[T^e] = \mu_0\mu_N(\mu_1\mu_2\cdots\mu_{N-1})(\mu_{-1}\mu_{-2}\cdots\mu_{-(N-1)}) \tag{6.127}$$

$$det[L^i] = \mu_0\mu_N(\mu_1\mu_2\cdots\mu_{N-1})(\mu_{-1}\mu_{-2}\cdots\mu_{-(N-1)}) \tag{6.128}$$

$$det[T^i] = \nu_0\nu_N(\nu_1\nu_2\cdots\nu_{N-1})(\nu_{-1}\nu_{-2}\cdots\nu_{-(N-1)}) \tag{6.129}$$

$$det[L^e] = \nu_0\nu_N(\nu_1\nu_2\cdots\nu_{N-1})(\nu_{-1}\nu_{-2}\cdots\nu_{-(N-1)}) \tag{6.130}$$

$$det[M^i] = \kappa_0\kappa_N(\kappa_1\kappa_2\cdots\kappa_{N-1})(\kappa_{-1}\kappa_{-2}\cdots\kappa_{-(N-1)}) \tag{6.131}$$

$$det[M^e] = \kappa_0\kappa_N(\kappa_1\kappa_2\cdots\kappa_{N-1})(\kappa_{-1}\kappa_{-2}\cdots\kappa_{-(N-1)}) \tag{6.132}$$

內域問題之共振頻率或外域問題之虛擬頻率可能發生在

$$\lambda_\ell = \pi^2\rho(-iJ_\ell(k\rho) + Y_\ell(k\rho))J_\ell(k\rho) = 0, \ell = 0, \pm1, \pm2, \cdots, \pm(N-1) \tag{6.133}$$

$$\mu_\ell = \pi^2 k\rho(-iJ'_\ell(k\rho) + Y'_\ell(k\rho))J_\ell(k\rho) = 0, \ell = 0, \pm1, \pm2, \cdots, \pm(N-1) \tag{6.134}$$

$$\nu_\ell = \pi^2 k\rho(-iJ_\ell(k\rho) + Y_\ell(k\rho))J'_\ell(k\rho) = 0, \ell = 0, \pm1, \pm2, \cdots, \pm(N-1) \tag{6.135}$$

$$\kappa_\ell = \pi^2 k^2\rho(-iJ'_\ell(k\rho) + Y'_\ell(k\rho))J'_\ell(k\rho) = 0, \ell = 0, \pm1, \pm2, \cdots, \pm(N-1) \tag{6.136}$$

即 $[U]^i, [U]^e, [T]^e, [L]^i$ 的虛擬頻率或共振頻率可能發生在 $J_m(ka) = 0$，而 $[M]^i, [M]^e, [T]^i, [L]^e$ 的虛擬頻率或共振頻率可能發生在 $J'_m(ka) = 0$。所以滿足上式的 k 值使 $J_\ell(k\rho) = 0$ 或 $J'_\ell(k\rho) = 0$，此即為虛擬頻率或共振頻率的指示方程式。

6.5.2 虛擬頻率的機制探討—連續系統

若將核函數以退化核展開如下：

$$U(s,x)=\begin{cases} U^i(R,\theta;\rho,\phi)=-\frac{i\pi}{2}H_0(kR)J_0(k\rho)-i\pi\sum\limits_{m=1}^{\infty}H_m(kR)J_m(k\rho)\cos(m(\theta-\phi)), \\ \qquad R>\rho \\ U^e(R,\theta;\rho,\phi)=-\frac{i\pi}{2}H_0(kR)J_0(k\rho)-i\pi\sum\limits_{m=1}^{\infty}H_m(kR)J_m(k\rho)\cos(m(\theta-\phi)), \\ \qquad R<\rho \end{cases} \tag{6.137}$$

$$T(s,x)=\begin{cases} T^i(R,\theta;\rho,\phi)=-\frac{i\pi}{2}H_0'(kR)J_0(k\rho)-i\pi k\sum\limits_{m=1}^{\infty}H_m'(kR)J_m(k\rho)\cos(m(\theta-\phi)), \\ \qquad R>\rho \\ T^e(R,\theta;\rho,\phi)=-\frac{i\pi}{2}H_0(kR)J_m'(k\rho)-i\pi k\sum\limits_{m=1}^{\infty}H_m(kR)J_m'(k\rho)\cos(m(\theta-\phi)), \\ \qquad R<\rho \end{cases} \tag{6.138}$$

對於 Dirichlet 問題，給定邊界 u 可以級數形式表為

$$u(\theta)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta),\ \ 0\le\theta<2\pi \tag{6.139}$$

上式等號兩端同乘以 $\cos(m\theta), m=0,1,2,3,\cdots$ ，並從 0 積分到 2π 。透過正交關係，可得 a_0,a_n,b_n ，而未知邊界量 t 可表為

$$t(\theta)=p_0+\sum_{n=1}^{\infty}(p_n\cos n\theta+q_n\sin n\theta) \tag{6.140}$$

取內點代入邊界對偶邊界積分方程式如下：

$$0=\int_B T^i(s,x)u(s)dB(s)-\int_B U^i(s,x)t(s)dB(s), \tag{6.141}$$

且將以級數形式表示的 $u(s)$ 、$t(s)$ 、$U^i(s,x)$ 和 $T^i(s,x)$ 代入，可得

$$\begin{aligned} 0=-\ &\textstyle\int_0^{2\pi}[\frac{i\pi k}{2}H_0'(kR)J_0(k\rho)+i\pi k\sum\limits_{m=1}^{\infty}H_m'(kR)J_m(k\rho)\cos(m(\theta-\phi))] \\ &[a_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(n\theta)+b_n\sin(n\theta))]Rd\theta \\ &-\textstyle\int_0^{2\pi}[-\frac{i\pi}{2}H_0(kR)J_0(k\rho)-i\pi\sum\limits_{m=1}^{\infty}H_m(kR)J_m(k\rho)\cos(m(\theta-\phi))] \\ &[p_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(p_n\cos(n\theta)+q_n sin(n\theta))]Rd\theta \end{aligned} \tag{6.142}$$

再透過和差化積， $\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$ ，與正交關係，化簡可得

$$\begin{aligned} &i\pi^2kR[a_0H_0'(kR)J_0(k\rho)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}H_n'(kR)J_n(k\rho)(a_n\cos(n\phi)+b_n\sin(n\phi))] \\ =&-i\pi^2R[p_0H_0(kR)J_0(k\rho)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}H_n(kR)J_n(k\rho)(p_n\cos(n\phi)+q_n\sin(n\phi))] \end{aligned} \tag{6.143}$$

比較兩邊係數，可得以下關係

$$p_0 = -\frac{H_0'(kR)J_0(k\rho)}{H_0(kR)J_0(k\rho)}a_0 k \tag{6.144}$$

$$p_n = -\frac{H_n'(kR)J_n(k\rho)}{H_n(kR)J_n(k\rho)}a_n k \tag{6.145}$$

$$q_n = -\frac{H_n'(kR)J_n(k\rho)}{H_n(kR)J_n(k\rho)}b_n k \tag{6.146}$$

再將邊界量 $u(s), t(s)$ 與外點座標代入整個場的對偶邊界積分方程式如下：

$$2\pi u(x) = \int_B T^e(s,x)u(s)dB(s) - \int_B U^e(s,x)t(s)dB(s) \tag{6.147}$$

且將以級數形式表示的 $u(s)$ 、 $t(s)$ 、 $U^e(s,x)$ 和 $T^e(s,x)$ 代入，可得

$$\begin{aligned}2\pi u(x) = \; & \textstyle\int_0^{2\pi}[\frac{i\pi k}{2}H_0(k\rho)J_0'(kR) + i\pi k\sum\limits_{n=1}^{\infty}H_m(k\rho)J_0'(kR)\cos m(\theta-\phi)] \\ & [a_0 + \textstyle\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\theta + b_n\sin(n\theta)]Rd\theta \\ & - \textstyle\int_0^{2\pi}[-\frac{i\pi}{2}H_0(k\rho)J_0(kR) - \sum\limits_{m=1}^{\infty}i\pi H_m(k\rho)J_m(kR)\cos m(\theta-\phi)] \\ & [p_0 + \textstyle\sum\limits_{n=1}^{\infty}(p_n\cos(n\theta) + q_n\sin(n\theta))]Rd\theta\end{aligned} \tag{6.148}$$

化簡可得

$$\begin{aligned}& u(x) = i\tfrac{\pi}{2}Ra_0kH_0(k\rho)[\tfrac{H_0(kR)J_0'(kR)-H_0'(kR)J_0(kR)}{H_0(kR)}]\tfrac{J_0(kR)}{J_0(kR)} \\ & +i\tfrac{\pi}{2}Rk\textstyle\sum\limits_{m=1}^{\infty}H_m(k\rho)[(\tfrac{H_m(kR)J_m'(kR)-H_m'(kR)J_m(kR)}{H_m(kR)})\tfrac{J_m(kR)}{J_m(kR)}(a_m\cos(m\phi)+b_m\sin(m\phi))\end{aligned} \tag{6.149}$$

透過

$$H_m(kR) = J_m(kR) + iY_m(kR) \tag{6.150}$$

$$H_m'(kR) = J_m'(kR) + iY_m'(kR) \tag{6.151}$$

$$Y_m'(kR)J_m(kR) - iY_m(kR)J_m'(kR) = \frac{2}{\pi kR} \tag{6.152}$$

可得

$$u(\rho,\phi) = \sum_{m=0}^{\infty}[(\frac{H_m(k\rho)}{H_m(kR)})(a_m\cos(m\phi)+b_m\sin(m\phi))],\ \rho\geq R, 0\leq\phi<2\pi \tag{6.153}$$

其中，定義 $\dfrac{H_m(k\rho)}{H_m(kR)}(a_m\cos(m\phi)+b_m\sin(m\phi))$ 為 $\dfrac{J_m(kR)}{J_m(kR)}$ 的虛擬現象參與係數。
特例驗證：均勻輻射邊界量 $u(R,\theta) = \cos(4\theta)$ ，可得

$$u(\rho,\phi) = \frac{H_4(k\rho)}{H_4(kR)}\cos(4\phi),\ \rho\geq R, 0\leq\phi<2\pi \tag{6.154}$$

同理，對於 LM 式而言， Dirichlet 的問題，給定 u 可以級數形式表為

$$u(\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_m \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta) \tag{6.155}$$

而未知邊界量可表為

$$t(\theta) = p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n \cos(n\theta) + q_n \sin(n\theta) \tag{6.156}$$

取內點代入邊界對偶邊界積分方程式如下：

$$0 = \int_B M^i(s,x)u(s)dB(s) - \int_B L^i(s,x)t(s)dB(s), \tag{6.157}$$

可導得

$$p_0 = -\frac{H_0'(kR)J_0'(k\rho)}{H_0(kR)J_0'(k\rho)}a_0 k \tag{6.158}$$

$$p_n = -\frac{H_n'(kR)J_n'(k\rho)}{H_n(kR)J_n'(k\rho)}a_n k \tag{6.159}$$

$$q_n = -\frac{H_n'(kR)J_n'(k\rho)}{H_n(kR)J_n'(k\rho)}b_n k \tag{6.160}$$

代入邊界量，可得

$$u(\rho,\phi) = \sum_{m=0}^{\infty}[(\frac{H_m(k\rho)}{H_m(kR)})\frac{J_m'(kR)}{J_m'(kR)}(a_m\cos(m\phi)+b_m\sin(m\phi))],\ \ \rho \geq R, 0 \leq \phi < 2\pi \tag{6.161}$$

其中，定義 $\frac{H_m(k\rho)}{H_m(kR)}(a_m\cos(m\phi)+b_m\sin(m\phi))$ 為 $\frac{J_m'(kR)}{J_m'(kR)}$ 的虛擬現象參與係數。

6.5.3　克服虛擬頻率問題的幾個方案

經由前節解析的方法，證實邊界元素法產生的虛擬頻率，與所使用的邊界積分方程有關，而與給定的邊界條件無關，並且發現此現象，在數學本質是 $\frac{0}{0}$ 的不定型式。這種由數值方法所導致的虛擬頻率的現象，可以藉由解析推導來徹底瞭解。 Burton & Miller 及 Lee & Sclavounos(1989) ，提出合成奇異積分方程與超強奇異積分方程的純虛數倍的方法，此方法有對偶邊界元素法的架構，是以奇異積分方程加上超強奇異積分方程乘上純虛數常數的組合式。陳等 (1999) 提出對偶邊界元素法，此法是將奇異積分方程得到的值與超強奇異積分方程得到的結果予以比較，可有效的過濾虛擬頻率，對偶邊界元素法可更有效地解含退化邊界的問題。 Schenck(1968)， Benthien & Schenck(1997) 則使用 CHIEF(Combined Helmoltz Integral Equation Formulation) 法，以域內點邊界積分方程為輔助條件，補足不

夠的束制條件。此法所選取的點若不巧為內域模態的節點 (node) 時則將會失效，亦即得到的是無效的方程式，此問題在愈高頻時發生的可能性就愈高 (Seybert & Rengarajan(1989)) 。而近年來奇異值分解法 (SVD) 已被發展成線性代數之最重要的工具， Francis(1989) 應用此法來解電磁場共振的問題，陳等 (1999) 、陳等 (1999) 及葉等 (1998、 1999) 亦應用此法有效的過濾內域問題的假特徵值 (spurious eigenvalues) 。Juhl(1994) 與 Poulin(1997) 將 CHIEF 配合 SVD 的技巧有效的過濾虛擬頻率。

本文採用 Burton & Miller 方法去除虛擬頻率，其方法如下：

對於 Dirichlet 問題，給定邊界 u 值，要求邊界 t 值，為避免 UT 式中 $\det([U])=0$，所以將 UT 式與 LM 式合併，得到下式

$$([U]+\frac{i}{k}[\bar{L}])\{t\}=([\bar{T}]+\frac{i}{k}[M])\{u\} \tag{6.162}$$

因 $det([U]+\frac{i}{k}[\bar{L}])\neq 0$ ，則解 $\{t\}$ 時就不會遇到 0/0 的情況，虛擬頻率的問題自然就迎刃而解。而引入 $\frac{1}{k}$ 的量，係考慮要使因次一致，如此於較低頻率或 k 值較小時，經數值離散後影響矩陣元素之數值差異不大而得較佳的數值結果。

◐.◐　三維球狀幅射體之外域解析解

本節將考慮一圓球半徑為 a 之外域輻射問題如圖 6.9 所示 [1,2]：

圖 6.9　三維球體聲波之輻射

控制方程式如下

$$(\nabla^2+k^2)u(x)=0,\ \ x\ in\ D_e \tag{6.163}$$

邊界條件為

$$t(s)=i\omega\rho v_n\ \ ,\ \ x\ \ on\ \ B \tag{6.164}$$

首先將四個核函數以級數展開可寫成

$$U(s,x)=\frac{e^{-ikr}}{4\pi r}=\frac{-ik}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\sum_{m=0}^{n}\epsilon_m\frac{(n-m)!}{(n+m)!}cos[m(\phi-\phi')]$$
$$P_n^m(cos\theta)P_n^m(cos\theta')j_n(ka)h_n^{(2)}(kr) \tag{6.165}$$

其中， $r=|x-s|$ ， ϵ_m 為 Neumann 因數，當 $m=0$ 時，其值為 1 。當 $m\geq 0$ 時，其值為 2 。 P_n^m 、 j_n 與 $h_n^{(2)}$ 分別代表相伴的 Legendre 多項式，第一類球面 Bessel 函數與第二類的球面 Hankel 函數。同理，根據定義可知

$$T(s,x)=\frac{-ik^2}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(2n+1)\epsilon_m\frac{(n-m)!}{(n+m)!}cos[m(\phi-\phi')]P_n^m(cos\theta)P_n^m(cos\theta')j_n'(ka)h_n^{(2)}(kr) \tag{6.166}$$

其中， j_n' 表 j_n 對 s 之法向微分，在此即 $d\,j_n(ka)/d(ka)$ 。而 L 與 M 核函數則可表為

$$L(s,x)=\frac{-ik^2}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\sum_{m=0}^{n}\epsilon_m\frac{(n-m)!}{(n+m)!}cos[m(\phi-\phi')]P_n^m(cos\theta)P_n^m(cos\theta')j_n(ka)h_n^{(2)'}(kr) \tag{6.167}$$

$$M(s,x)=\frac{-ik^3}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(2n+1)\epsilon_m\frac{(n-m)!}{(n+m)!}cos[m(\phi-\phi')]P_n^m(cos\theta)P_n^m(cos\theta')j_n'(ka)h_n^{(2)'}(kr) \tag{6.168}$$

由以上 U,T 核函數的變數 (r,θ) 分離表示式可看出對 r 變數而言是相依的。同理， L,M 核函數表示式對 r 而言，亦是相依的，這和一維的例子，頗有異曲同工之妙。

將 $u(s)$ 與 $v_n(s)$ 可分別假設成如下級數

$$u(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}u_{mn}(a)P_n^m(cos\theta')cos(m\phi') \tag{6.169}$$

$$v_n(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}V_{mn}(a)P_n^m(cos\theta')cos(m\phi') \tag{6.170}$$

其中， u_{mn} 為未知， V_{mn} 為已知，可表示如下

$$V_{mn}=\frac{\epsilon_m}{2\pi}(\frac{2n+1}{2})\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}P_n^m(cos\theta)cos(m\phi)v_n(x)sin(\theta)d\theta d\phi \tag{6.171}$$

已知邊界條件為

$$\begin{aligned} t(s) &= i\rho\omega\ v_n(s) \\ &= i\rho\omega\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}V_{mn}(a)P_n^m(cos\theta')cos(m\phi') \end{aligned} \tag{6.172}$$

將以上級數表示式代入邊界點的邊界積分式的第一式與第二式時，由於核函數和密度函數均以級數表示時，不易看出其各類勢能的跳躍行為，為避開此問題，吾人改用如下複合勢

能表示法，併配合奇異源分佈在域外的技巧(所謂廣義間接法)，則場解的積分表示式可寫成

$$u(x) = \int_{B'} \{\eta_1 U(s,x) + i\eta_2 T(s,x)\} h(s) dB(s) \tag{6.173}$$

$$t(x) = -i\rho\omega v_n(x) = \int_{B'} \{\eta_1 L(s,x) + i\eta_2 M(s,x)\} h(s) dB(s) \tag{6.174}$$

其中， η_1, η_2 為實參數， B' 表內縮半徑 a' 之球面，為一虛擬邊界。此外域問題，取內縮邊界，所以 $a' < a$ 。

同理，未知複合密度源也可表成

$$h(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} h_{mn}(ka') P_n^m(cos\theta') cos(m\phi') \tag{6.175}$$

代入 $t(x)$ 之積分表示式後，再利用如下正交關係

$$\int_0^{\pi} P_n^m(cos\theta') P_q^r(cos\theta') sin(\theta') d\theta' = (\frac{2}{2n+1}) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \delta_{nq} \delta_{mr} \tag{6.176}$$

$$\int_0^{2\pi} cos[m(\phi - \phi')] cos(r\phi') d\phi' = \frac{2}{\epsilon_m} \delta_{mr} \pi cos(m\phi) \tag{6.177}$$

可導得，待定係數為

$$h_{mn}(ka') = \frac{\rho\omega V_{mn}(a)}{(ka')^2[\eta_1 j_n(ka') + i\,\eta_2 k j_{n'}(ka')] h_{n'}^{(2)}(ka)} \tag{6.178}$$

代回 $u(x)$ 場，可得

$$\begin{aligned} u(x) = u(r,\theta,\phi) &= -ik(a')^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} h_{mn}(a')[\eta_1 j_n(ka) + i\eta_2 k\ j_n'(ka')] \\ &\quad h_n^2(kr) P_n^m(cos\theta) cos(m\phi) \\ &= -i\rho c \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{V_{mn}(a)}{h_n^{(2)'}(ka)} h_n^{(2)}(kr) P_n^m(cos\theta) cos(m\phi) \end{aligned} \tag{6.179}$$

由上式可驗證滿足邊界條件式 (6.53) 。

若對平面聲波入射散射問題而言，如圖 6.10 所示，其解的積分表示式，若使用 Helmholtz 積分式，則可將場解表為

圖6.10　三維球體聲波之入射與散射

$$\int_B \{\eta_1 T(s,x) + i\eta_2 M(s,x)\} u(s) dB(s) - \int_B \{\eta_1 U(s,x) + i\eta_2 L(s,x)\} t(s) dB(s)$$
$$+[\eta_1 u_i(x) + i\eta_2 t_i(x)] = [\eta_1 u(x) + i\eta_2 t(x)], \ \ x \in D \qquad (6.180)$$

，以上係合成對偶積分式的結果。

若將 x 推到虛擬邊界 B' ，則

$$\int_B \{\eta_1 T(s,x) + i\eta_2 M(s,x)\} u(s) dB(s) - \int_B \{\eta_1 U(s,x) + i\eta_2 L(s,x)\} t(s) dB(s)$$
$$= -[\eta_1 u_i(x) + i\eta_2 t_i(x)], \ \ x \ on \ B' \qquad (6.181)$$

其中， u_i 表入射波壓，而

$$t_i = \frac{\partial u_i}{\partial n}$$

首先，將入射波壓以級數展開如下

$$u_i(x) = P_I e^{-ikrcos(\theta)} = P_I \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)(-i)^n P_n(cos\theta) j_n(kr) \qquad (6.182)$$

其中， P_I 為入射平面波的振幅。若 x 在退縮邊界 B' 上，則

$$u_i(s') = P_I \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)(-i)^n P_n(cos\theta') j_n(ka') \qquad (6.183)$$

$$t_i(s') = P_I k \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)(-i)^n P_n(cos\theta') j_n'(ka') \qquad (6.184)$$

由於入射波壓為軸對稱，因此可在球面邊界 B 上以級數展開來表示表面壓力如下

$$u_i(s) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(a)} P_n(cos\theta) \qquad (6.185)$$

若假設圓球為剛體，則

$$t_i(s) = 0 \qquad (6.186)$$

將以上之級數表示式 (65) $\sim$ (68) 代入式 (63) ，可得

$$i(ka)^2 \sum_{n=0}^{\infty} P_n^a h_n^{(2)'} P_n cos(\theta')[\eta_1 j_n(ka') + i\eta_2 k j_n'(ka')]$$
$$= -P_I \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)(-i)^n P_n cos(\theta')[\eta_1 j_n(ka') + i\eta_2 k j_n'(ka')] \qquad (6.187)$$

可得

$$P_n^{(a)} = \frac{P_I(2n+1)(-i)^{n+1}}{(ka)^2 h_n^{(2)'}(ka)} \tag{6.188}$$

因此，球面波壓為

$$P(a,\theta) = \frac{-iP_I(2n+1)(-i)^n P_n(cos(\theta))}{(ka)^2 h_n^{(2)'}(ka)} \tag{6.189}$$

以上之結果討論如下:

(1). 對輻射問題而言，當取 $\eta_2 = 0$ 時，而 $\eta_1 \neq 0$ 時，即取單層勢能的積分表示式如下

$$u(x) = \int_{B'} U(s,x)\phi(s)dB(s) \tag{6.190}$$

則虛擬頻率發生在 $j_n(ka') = 0$ 。

(2). 對輻射問題而言，當取 $\eta_1 = 0$ 時，而 $\eta_2 \neq 0$ 時，亦即只取雙層勢能的積分表示式如下

$$u(x) = \int_{B'} T(s,x)\psi(s)dB(s) \tag{6.191}$$

則虛擬頻率發生在 $j_n'(ka') = 0$ 。

(3). 由 (1),(2) 的結果，可知虛擬頻率係依解的積分表示式中的核函數與奇異源分佈邊界 B' 或 a' 而定。而與真正問題的邊界條件型式無關。

(4). 對散射問題而言，當取 $\eta_2 = 0$ 時，而 $\eta_1 \neq 0$ 時，即取對偶積分式的第一式求解，則虛擬頻率發生在 $j_n(ka') = 0$ 。

(5). 對散射問題而言，當取 $\eta_1 = 0$ 時，而 $\eta_2 \neq 0$ 時，亦即即取對偶積分式的第二式求解，則虛擬頻率發生在 $j_n'(ka') = 0$ 。

(6). 由 (4),(5) 的結果，可知虛擬頻率係依解的積分表示式中的核函數而定。而與真正問題的邊界條件型式無關。

(7). 虛擬頻率的產生，對入射波產生散射，其發生的機制類同，均是使得待定係數乘上 0 值後，便無法算出，但實際上可說成是 0/0 的問題。

(8). 虛擬頻率的產生，亦可解釋成如下的問題

當 k 為任意值時，

$$j_n(ka') + i\,\eta\, j_n'(ka') \neq 0 + 0i \tag{6.192}$$

但當 $k = k_{cr}$ 時，滿足 $j_n(ka') = 0$ ，且 $\eta_2 = 0$ ，會使得

$$\lim_{k\to k_{cr}} h_{mn}(ka') = \infty \tag{6.193}$$

$$\lim_{k\to k_{cr}} j_n(ka') = 0 \tag{6.194}$$

由解析的角度來看，對輻射問題而言，未定係數 h_{mn} 滿足下式

$$\lim_{k\to k_{cr}} h_{mn}(ka')j_n(ka') = \frac{\rho\omega V_{mn}(a)}{(ka'^2)h^{(2)}_{n'}(ka)} \tag{6.195}$$

為一有限值。不巧的是，此不定型 $0\cdot\infty$ 的極限值問題在使用邊界元素法數值求解時，其未定係數 h_{mn} 是為 (6.60) 式。而由核函數及 B' 得來的是

$$h_{mn}(k_{cr}a') = \infty \tag{6.196}$$

可視為勁度無限大，會造成數值不穩定。

(9). 在近乎不可壓縮性材料之應力分析數值模擬時，會遭遇到當包生比 $\nu \to 0.5$ ，亦呈現數值不穩定的問題。經探究其原因，其本質是和虛擬頻率的產生是雷同的。說明如下:

由有限元素法的變分推導，可知導得的代數方程式為

$$Ku = P \tag{6.197}$$

其中

$$K = K_1 + \alpha K_2 \tag{6.198}$$

其中， K_1 表示扭曲勁度矩陣 (distorsion stiffness) ， K_2 表示脹縮勁度矩陣 (dilatation stiffness) ，而 $\alpha = \frac{1}{1-2\nu}$ 。當包生比 $\nu \to 0.5$ ，則 $\alpha \to \infty$ ，表示近乎不可壓縮。若純以解析的極限行為，仍可導得一穩定解。唯數值模擬時，當 α 大到某值時，會呈現數值不穩定的問題，甚至會使計算機當機。針對這個問題，文獻使用了降階積分法，使得

$$det\ \ K_2 = 0 \tag{6.199}$$

若 K_2 的奇異度越高，可使得剪變形或扭曲變形的行為更能反應出來，而解決了數值剪變鎖定 (shear locking) 的行為。但若矯往過正，則將產生沙漏剪變形，此即所謂 hourglass 行為。要使其奇異度升高多少，除了和負荷與與邊界型態有關外，吾人認為負荷對系統特性模態的參與因子，實為重要的參數。這種問題，在結構系統亦有類似的問題，以下特舉一結構例說明如下，若一雙自由度靜力系統，如圖 6.11 所示內含一剛性彈簧，試求其變位。

圖 6.11 雙自由度結構系統

此結構系統的力與位移關係為

$$Ku = P \tag{6.200}$$

其中，

$$K = K_1 + \alpha K_2 \tag{6.201}$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} cos^2(\beta) & -sin(\beta)cos(\beta) \\ -sin(\beta)cos(\beta) & sin^2(\beta) \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

若斜桿為剛桿，則變位場可由如下極限過程求得

$$u = \lim_{\alpha \to \infty} K^{-1} P \tag{6.202}$$

上式，利用 L'Hospital's rule 可導得正解如下

$$u = \begin{cases} u_1 = \frac{P_1 sin^2(\beta) + P_2 sin(\beta) cos(\beta)}{k_1 sin^2(\beta) + k_2 cos^2(\beta)} \\ u_2 = \frac{P_1 sin(\beta) cos(\beta) + P_2 cos^2(\beta)}{k_1 sin^2(\beta) + k_2 cos^2(\beta)} \end{cases} \tag{6.203}$$

但於數值模擬時，當 α 大到某值時，即出現數值不穩的發散問題。為驗證此點，吾人作一數值實驗，取參數如下

$$k_1 = k_2 = 1.0, \;\; P_1 = 1, \;\; P_2 = -0.5, \;\; \beta = 45^o$$

以 VAX 8650 單精度與雙精度分別執行之，所得結果如下圖 6.12 與圖 6.13 ，可看出在數值無效之前，會有一不穩定現象。

圖6.12　VAX 8650 單精度收斂結果

圖6.13　VAX 8650 雙精度收斂結果

為避開以上問題，可改從束制方程的觀點下手，當 $\alpha \rightarrow \infty$ 時，束制方程如下

$$cos(\beta)u_1 - sin(\beta)u_2 = 0$$

則代數方程可利用 Langrange 乘子的觀念，由能量式可導得

$$\begin{bmatrix} k_1 & 0 & cos(\beta) \\ 0 & k_2 & -sin(\beta) \\ cos(\beta) & -sin(\beta) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

可輕易算得正解

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.25 \\ 1.5/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

因此，主要對應的有效且獨立的束制方程找得出來如下，

$$K_c u_m = 0 \tag{6.204}$$

以上的方法，不失為解題之鑰。其代數方程則可改寫成下式

$$\begin{bmatrix} K & K_c^T \\ K_c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_m \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_m \\ P_n \end{bmatrix}$$

林 [7] 已將此問題作過詳細探討，並利用虛擬彈簧的等效束制觀念，可有效處理大型稀疏奇異矩陣的分解，並建立程式庫，對此類問題已提供解決之道。

****

習題:

若將三維球改為二維圓柱体時，仍考慮同樣的輻射與散射問題，依上述類似方法推導，並比較其虛擬頻率的不同?

****

6.7 結語

本文章已就聲波的虛擬頻率問題，作一探討。得知虛擬頻率係依解的積分表示式中的核函數與奇異源分佈區域 B' 或 a' 而定，而與真正問題的邊界條件型式無關，糾正了一些文獻上錯誤的看法。而本問題的發生機制是和近乎不可壓縮性材料之之應力分析的數值模擬，所遭遇到當包生比 $\nu \to 0.5$ ，會呈現數值不穩定，是一樣的。

由本章吾人可看出，計算力學發生誤差的機制 (mechanism) 常隨著不同的推導方式而有所不同，這和數值穩定的寄生根問題相類似。因此，從這個角度而言，虛擬頻率亦可看成寄生頻率!

6.8 參考文獻

1 黃志勇，流體— 結構動力互制問題之三維解析，台大應力所博士論文，1989 。

2 J. Y. Hwang and S.C. Chang, A Retracted Boundary Integral Equation for Exterior Acoustic Problem with Unique Solution for All Wave Numbers, J. Acoust. Soc. Am. 90 (2), pp.1167-1180, 1991.

3 李洋傑，私下討論， 1992 。

4 D. E. Beskos, Boundary Element Method in Mechanics, Amsterdam, Elsevier Science Publ., 1987.

5 O. C. Zienkiewicz and K. Morgan, Finite Elements and Approximation, John Wiley, 1983.

6 林聰悟，私下討論， 1992 。

7 Tsung-Wu Lin, Hsing-Tai Shiau and Jin-Ten Huang, Singular Decomposition by Adding Dummy Links and Dummy Degrees, The Second Computer Application in Civil and Hydraulic Engineering, Chung-Li, Taiwan, 1991.

8 S. Kobayashi and N. Nishimura, On the Indeterminancy of BIE Solutions for the Exterior Problems of Time Harmonic Boundary Element Method , BEM4, 1982.

9 H. A. Schenk, Improved Integral Formulation for Acoustic Radiation Problems, JASA , Vol.44, pp.45-58, 1968.

9 J. T. Chen, C. T. Chen, K. H. Chen and I. L. Chen, On fictitious frequencies using dual bem for non-uniform radiation problems of a cylinder, Mechanics Research Communications, Revised, 2000.

10 J. T. Chen, On fictitious frequencies using dual series representation, Mechanics Research Communications, Vol.25, No.5, pp.529-534, 1998.

11 J. T. Chen and S. R. Kuo, On fictitious frequencies using circulants for radiation problems of a cylinder, Mechanics Research Communications, Vol.27, No.1, pp.49-58, 2000.

12 J. T. Chen and H.-K. Hong, Review of dual boundary element methods with emphasis on hypersingular integrals and divergent series, Applied Mechanics Reviews, ASME, Vol.52, No.1, pp.17-33, 1999.

13 陳誠宗，邊界元素法在外域輻射與散射聲場之研究—自適性網格切割技術，海大海洋科學所碩士論文，基隆， 2000。

海大河工研究所陳正宗　對偶邊界元素法

【存檔：e:/dualbem/dbem6.te】【建檔:AUG./15/'2000】