第 七 章

時變邊界條件問題的應用

7.1 簡介

前面一章已提及在頻率域解析與時間有關的問題，本章將在時間域探討時變邊界條件問題 (time-dependent boundary condition) 。此類問題存在於一般振動問題上，舉凡飛彈飛行與橋梁受震等問題皆是，尤其在機械與土木上的應用而言，與時間相關邊界條件的振動問題均相當普遍。這些問題的特性在於邊界條件是時變的，因此解也是與時間相關的。本章將對此類問題以積分方程解的表示式 (integral representation) 來描述。本文主要舉橋梁承受複輸入 (multi-input) 的地震負荷，來進行動力反應分析。首先將反應以變數分離成時間與空間兩部份，對空間部份再以特徵函數展開，最後解的型式僅是含系統特性的核函數與密度函數對時間的廣義 Duhamel 積分而已。其中，積分表示式中的核函數就隱含了系統的自然振頻與阻尼等特性，而密度函數則含有給定的邊界運動歷程與特徵系統在邊界點上的廣義力與廣義位移等資料，此種解法也承襲了第五章塑力積分組成律的解法精神與邏輯。本章的推導過程僅需對邊界作積分，而不需對定義域作積分，此乃邊界元素法的精神，因此放在本書予以討論。

7.2 時變邊界條件問題之文獻回顧

時變的邊界條件問題在工程應用上常會碰到，例如地震時核電廠的管線或長跨徑的橋梁的反應，就是最典型的例子。當支承點的跨徑跟地震波的波長比起來很小時，此依時而變的邊界條件可視為相同，這就是所謂的單輸入 (single input) 的邊界支承條件。但當跨

徑很長時，由於地形條件與震波的關係，如振幅衰減與相差，不同的支承邊界就有不同的支承運動 (support motion) ，這就是所謂的複輸入的運動。當然上述的說法是在忽略了結構土壤互制的效應下才成立的。對航空或航天結構而言，當飛行器於飛行過程中，也是典型的時變邊界條件問題。兩者所不同的是，前者是給定邊界位移歷程，係由地震記錄資料而得; 後者給定的是邊界小板壓力歷程，係由遙測資料而得。對於後者問題的解決，有一簡化方法，稱為慣性釋放的觀念 (inertia relief) ，在 MSC/NASTRAN 程式中即有此功能，它是將已知的外力加諸於假設剛體的結構上，再求得其加速度反應後，以慣性力當成靜力負荷，求其相對於虛擬支承點的變形。而此虛擬支承點的自由度乃是提供剛體運動所需要的基本自由度集合。這個觀念，並沒有真正考慮動態的慣性行為，只是一種近似的方法，因此常被稱為擬靜力分析 (quasi-static) 。基於這個觀念來了解為何 Mindlin 會將問題的解分成兩部份 — 擬靜力解與動態解是可以想像的。當結構勁度很大時，靜態解掌握了主要的部份。但對長跨徑的柔性結構而言，動態解則佔重要的角色，不可忽略。擬靜力解雖不考慮慣性效應，但仍為時間的函數，動態解部份則考慮慣性效應並滿足齊次邊界條件。在文獻上，均先求得擬靜力解後，再利用它求動態解的廣義座標係數，最後再合併擬靜態解與動態解而得全解。 Berry 與 Naghdi 亦曾就其在彈性體的應用作過討論。此種算法，需先算擬靜態解，於計算廣義座標時，又得計算定義域的積分，雖然比較麻煩，但後來 Masri 在 1976 年仍將這一套作法成功地應用到具傳遞邊界激發的暫態與散漫振動的問題上。在 1982 年， Abdel-Ghaffar 更將其實際應用到舊金山金門大橋 (Golden Gate Bridge) 的橋塔地震反應分析上。但是吾人或許會懷疑，將解拆成兩部份再合併是否有必要? 葉與廖在國內第十五屆力學會議中，曾就類似問題以多孔介質有限彈性體的動態解作過探討，發現此擬靜態解理論上可以不用算出，而仍能將整個全解簡單地表示出來。其實這種處理方法可直接應用於橋梁的地震反應分析。經由這個方法可將解以 Duhamel integral 表示，推導過程雖有擬靜態解的引入，但最後並不需要真正計算此擬靜態解。如此更可省去定義域的積分，而變成邊界積分。若為一維的梁問題，則僅需邊界物理量而連積分都不用。當然這是使用了 Betti's law 的結果。然而於實際數值計算時，其收斂行為為何，則需加注意。陳等在 Earthquake Engineering and Strutural Dynamics 文章中即使用六種方法討論，分別是 (1). 特徵函數展開法、 (2). 擬靜態解展開法、 (3). Stokes' 轉換法、 (4). Cesaro 和法、 (5). 大質量技巧與 (6). 大彈簧技巧。以下吾人將探討這種時空分離的推導方法。

7.3　時變邊界條件之梁數學模式推導

考慮如下數學模式，參考圖 7.1 [1]

圖 7.1　典型時變邊界條件之數學模式

控制方程式

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2}(EI\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}) - P\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t) = \rho(x)\,\ddot{u}(x,t) \;\;,\;\; 0 < x < l \tag{7-1}$$

邊界條件

$$u(0,t) = g(t) \tag{7-2}$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\;|_{x=0} = h(t) \tag{7-3}$$

$$EI\frac{\partial^2 u(l,t)}{\partial x^2} = k_\theta\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} + m(t) \tag{7-4}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(EI\frac{\partial^2 u(l,t)}{\partial x^2}) + P\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = k_e u(l,t) + s(t) \tag{7-5}$$

初始條件（含初位移與初速度）

$$u(x,0) = u_0(x), \;\; \dot{u}(x,0) = v_0(x) \tag{7-6}$$

其中， EI 表示梁的彎曲剛度， ρ 為梁單位長度的質量密度， $f(x,t)$ 為梁單位長度所受的外力函數， $u(x,t)$ 為位移， P 表示軸力， k_e 與 k_θ 分別表示線性與彎曲彈簧常數，而 $g(t), h(t), m(t), s(t)$ 為給定的邊界支承運動歷程。

首先將解分成擬靜態解與動態解兩部份如下，

$$u(x,t) = U(x,t) + \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) u_n(x) \tag{7-7}$$

其中 $U(x,t)$ 表示擬靜態解，而 $q_n(t),(n=1,2,3,...)$ 僅與時間有關而已，可視為一種廣義座標。擬靜態解 $U(x,t)$ 需滿足

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(EI\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}) + P\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0 \tag{7-8}$$

與非齊次的邊界條件

$$U(0,t) = g(t) \tag{7-9}$$

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial x}\ |_{x=0} = h(t) \tag{7-10}$$

$$EI\frac{\partial^2 U(l,t)}{\partial x^2} - k_\theta \frac{\partial U(l,t)}{\partial x} = m(t) \tag{7-11}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(EI\frac{\partial^2 U(l,t)}{\partial x^2}) + P\frac{\partial U(l,t)}{\partial x} - k_e U(l,t) = s(t) \tag{7-12}$$

上式中 $u_n(x)$, $(n=1,2,3,...)$ 表示特徵函數，滿足第 n 個模式的控制方程

$$\frac{d^2}{dx^2}(\frac{EId^2u_n(x)}{dx^2}) + P\frac{d^2u_n(x)}{dx^2} = \rho(x)\ \omega_n^2 u_n(x), n=1,2,3,...,\ \ 0<x<l \tag{7-13}$$

及齊次邊界條件

$$u_n(0) = 0 \tag{7-14}$$

$$u_n'(0) = 0 \tag{7-15}$$

$$EIu_n''(l) - k_\theta u_n'(l) = 0 \tag{7-16}$$

$$[EIu_n''(l)]' + Pu_n'(l) - k_e u_n(l) = 0 \tag{7-17}$$

其中， ω_n 為特徵頻率。

而正交性關係（ 參閱 § 7.8 節），可知

$$\int_0^l \rho(x) u_n(x) u_m(x) dx = \delta_{mn} N_m \tag{7-18}$$

其中， N_m 表示第 m 個模態的有效質量。式 (7.7) 基於式 (7.9-7.12,7.14-7.17) 可滿足式 (7.2-7.5) ，因此式 (7.1) 可簡化成

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho(x)[\ddot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t)] u_n(x) = f(x,t) - \rho(x)\ddot{U}(x,t) \tag{7-19}$$

對上式兩邊同時乘上 $u_m(x)$，且由 $(0,l)$ 積分，再使用式 (7.18) 的正交關係，可得

$$\ddot{q}_m(t)+\omega_m^2 q_m(t)=\frac{1}{N_m}[B_m(t)+\ddot{F}_m(t)],\ \ m=1,2,3...(no\ sum\ on\ m) \tag{7-20}$$

其中，有效分佈外力為

$$B_m(t)=\int_0^l f(x,t)u_m(x)dx \tag{7-21}$$

而擬靜態貢獻的部份為

$$F_m(t)=-\int_0^l \rho(x)U(x,t)u_m(x)dx \tag{7-22}$$

其實， $F_m(t)$ 為 $U(x,t)$ 的 Fourier 級數展開的係數，即

$$U(x,t)=-\sum_{m=1}^{\infty}F_m(t)u_m(x)/N_m \tag{7-23}$$

上式級數解收斂到均值 (converge in the mean) 。

式 (7.20) 的全解可寫成

$$q_m(t)=q_m(0)cos(\omega_m t)+\frac{\dot{q}_m(0)}{\omega_m}sin(\omega_m t)+\frac{1}{\omega_m N_m}\int_0^t[B_m(\tau)+\ddot{F}_m(\tau)]sin(\omega_m(t-\tau))d\tau \tag{7-24}$$

其中， $q_m(0)$ 和 $\dot{q}_m(0)$ 可依式 (7.6) 之初始條件，寫成

$$U(x,0)+\sum_{n=1}^{\infty}q_n(0)u_n(x)=u_0(x) \tag{7-25}$$

$$\dot{U}(x,0)+\sum_{n=1}^{\infty}\dot{q}_n(0)u_n(x)=v_0(x) \tag{7-26}$$

上式兩邊同時乘上 $\rho(x)\,u_m(x)$，由 $(0,l)$ 的積分，並使用式 (7.18) 的正交關係，可得

$$q_m(0)=\frac{1}{N_m}F_m(0)+\frac{1}{N_m}\lambda_m \tag{7-27}$$

$$\dot{q}_m(0)=\frac{1}{N_m}\dot{F}_m(0)+\frac{1}{N_m}\kappa_m \tag{7-28}$$

其中

$$\lambda_m=\int_0^l \rho(x)u_0(x)u_m(x)dx \tag{7-29}$$

$$\kappa_m=\int_0^l \rho(x)v_0(x)u_m(x)dx \tag{7-30}$$

則式 (7.24) 可寫成

$$\begin{aligned}q_m(t)=&\frac{1}{N_m}F_m(0)cos(\omega_m t)+\frac{1}{N_m}\lambda_m cos(\omega_m t)\\&+\frac{1}{N_m\omega_m}\dot{F}_m(0)sin(\omega_m t)+\frac{1}{N_m\omega_m}\kappa_m sin(\omega_m t)\\&+\frac{1}{\omega_m N_m}\int_0^t[B_m(\tau)+\ddot{F}_m(\tau)]sin(\omega_m(t-\tau))d\tau\end{aligned} \tag{7-31}$$

又因為

$$
\begin{aligned}
&\int_0^l U[(EIu_m'')'' + Pu_m'']dx - \int_0^l u_m[(EIU'')'' + PU'']dx \\
=& -\int_0^l U'[(EIu_m'')' + Pu_m']dx + U(EIu_m'')' \mid_0^l + UPu_m' \mid_0^l \\
&+ \int_0^l u_m'[(EIU'')' + PU']dx - u_m(EIU'')' \mid_0^l - u_m PU' \mid_0^l \\
=& \int_0^l U''EIu_m''dx - \int_0^l u_m''EIU''dx \\
&- U'EIu_m'' \mid_0^l + U[(EIu_m'')' + Pu_m'] \mid_0^l + u_m'EIU'' \mid_0^l - u_m[(EIU'')' + PU'] \mid_0^l \\
=& -U'(l)k_\theta u_m'(l) + h(t)EIu_m''(0) + U(l)k_e u_m(l) - g(t)[(EIu_m''(0))' + Pu_m'(0)] \\
&+ u_m'(l)EIU''(l) - 0 - u_m(l)[(EIU''(l))' + PU'(l)] + 0 \\
=& h(t)EIu_m''(0) - g(t)[(EIu_m''(0))' + Pu_m'(0)] + m(t)u_m'(l) - s(t)u_m(l) \qquad (7\text{-}32)
\end{aligned}
$$

表明了功能互換的物理現象。所以

$$
\begin{aligned}
-\omega_m^2 F_m(t) &= \omega_m^2 \int_0^l \rho(x)\ U(x,t)u_m(x)dx \\
&= h(t)EIu_m''(0) - g(t)[(EIu_m''(0))' + Pu_m'(0)] + m(t)u_m'(l) - s(t)u_m(l) \qquad (7\text{-}33)
\end{aligned}
$$

式 (7.31) 經部份積分兩次且套用式 (7.33) ，可簡化成

$$
\begin{aligned}
q_m(t) =& \frac{\lambda_m}{N_m}cos(\omega_m t) + \frac{\kappa_m}{N_m\omega_m}sin(\omega_m t) + \frac{1}{N_m}F_m(t) \\
&+ \frac{1}{\omega_m N_m}\int_0^t [B_m(\tau) - \omega_m^2 F_m(\tau)]sin(\omega_m(t-\tau))d\tau \\
=& \frac{\lambda_m}{N_m}cos(\omega_m t) + \frac{\kappa_m}{N_m\omega_m}sin(\omega_m t) + \frac{1}{N_m}F_m(t) \\
&+ \frac{1}{\omega_m N_m}\int_0^t \{B_m(\tau) - g(\tau)[(EIu_m''(0))' + Pu_m'(0)] \qquad (7\text{-}34) \\
&+ h(\tau)EIu_m''(0) + m(\tau)u_m'(l) - s(\tau)u_m(l)\}sin(\omega_m(t-\tau))d\tau
\end{aligned}
$$

則 $u(x,t)$ 的級數解經合併整理後，可得

$$
\begin{aligned}
u(x,t) =& \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x)\frac{1}{N_m}\{\lambda_m cos(\omega_m t) + \frac{\kappa_m}{\omega_m}sin(\omega_m t) \\
&+ \frac{1}{\omega_m}\int_0^t \{B_m(\tau) - g(\tau)[(EIu_m''(0))' + Pu_m'(0)] \qquad (7\text{-}35) \\
&+ h(\tau)EIu_m''(0) + m(\tau)u_m'(l) - s(\tau)u_m(l)\}sin(\omega_m(t-\tau))d\tau\}
\end{aligned}
$$

上式表明了解的積分表示式已被寫出，可看成廣義的 Duhamel 積分式，其核函數 $sin(\omega_m(t-\tau))$ 含有 ω_m，透露了系統特性的訊息。而密度函數則含有支承運動的歷程，如 $g(\tau), h(\tau), m(\tau)$

與 $s(\tau)$ 等，另亦含有外力項，如 $B_m(\tau)$ ，而初始條件則在積分方程之外的自由項中，如 λ_m 與 κ_m ，這種看法可適用任何結構動態系統上。

7.4　梁受地震複輸入運動之解析解與有限元素模擬

為研究長跨徑橋梁承受地震之多重輸入反應分析，可以如下數學模式模擬之，參見圖 7.2

控制方程式為

$$-EI\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} = \rho(x)\,\ddot{u}(x,t)\ \ ,0 < x < l \tag{7-36}$$

在此，外力 $f(x,t)$ 已假設為 0 。

邊界條件

$$u''(0,t) = u''(l,t) = 0 \tag{7-37}$$

$$u(0,t) = a(t),\ \ u(l,t) = b(t) \tag{7-38}$$

初始條件，假設由靜止開始，因此

$$u(x,0) = 0,\ \ \dot{u}(x,0) = 0 \tag{7-39}$$

圖7.2　多重輸入地震反應模型

同樣地，將解分成兩部份

$$u(x,t) = U(x,t) + \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t)u_n(x) \tag{7-40}$$

前者 $U(x,t)$ 為擬靜態解，後者為動態解。此兩力系分述如下

(1) 力系一: $U(x,t)$

擬靜態解之控制方程式

$$-EI\frac{\partial^4 U(x,t)}{\partial x^4}=0 \tag{7-41}$$

非齊次邊界條件

$$U''(0,t)=U''(l,t)=0 \tag{7-42}$$

$$U(0,t)=a(t),\;\; U(l,t)=b(t) \tag{7-43}$$

(2) 力系二 ：$u_n(x)$

$u_n(x)$ 為特徵函數，滿足

$$-EI\frac{\partial^4 u_n(x)}{\partial x^4}=-\rho(x)\,\omega_n^2 u_n(x) \tag{7-44}$$

與齊次邊界條件

$$u_n''(0)=u_n''(l)=0 \tag{7-45}$$

$$u_n(0)=u_n(l)=0 \tag{7-46}$$

此為典型的特徵值問題，可寫成

$$\frac{\partial^4 u_n(x)}{\partial x^4}=\lambda_n u_n(x) \tag{7-47}$$

特徵值為

$$\lambda_n=\frac{\rho\,\omega_n^2}{EI} \tag{7-48}$$

特徵函數為

$$u_n(x)=sin(n\pi x/l),\;\; n=1,2,3\cdots \tag{7-49}$$

第 n 個自然頻率為

$$\omega_n=(n\pi/l)^2\sqrt{EI/\rho} \tag{7-50}$$

特徵函數滿足正交關係

$$\int_0^l \rho u_n(x)u_k(x)dx=\delta_{nk}N_n \tag{7-51}$$

其中 $N_n=\rho l/2$ 。將式 (7.40) 代入式 (7.1) ，則 $q_n(t)$ 滿足

$$\sum_{n=1}^{\infty}[\ddot{q}_n(t)+\omega_n^2 q_n(t)]u_n(x)=-\ddot{U}(x,t) \tag{7-52}$$

根據 Fourier 級數展開，可得

$$\ddot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t) = \ddot{F}_n(t)/N_n \tag{7-53}$$

其中

$$F_n(t) = -\int_0^l \rho\ U(x,t)u_n(x)dx \tag{7-54}$$

為求解式 (7.53) ，$q_n(0)$ 和 $\dot{q}_n(0)$ 需先知道，根據初始條件式 (7.39) ，可得

$$U(x,0) + \sum_{n=1}^{\infty} q_n(0)u_n(x) = 0 \tag{7-55}$$

$$\dot{U}(x,0) + \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_n(0)u_n(x) = 0 \tag{7-56}$$

根據 Fourier 級數展開，可得

$$N_n q_n(0) = -\int_0^l \rho\ U(x,0)u_n(x)dx = F_n(0) \tag{7-57}$$

$$N_n \dot{q}_n(0) = -\int_0^l \rho\ \dot{U}(x,0)u_n(x)dx = \dot{F}_n(0) \tag{7-58}$$

而 $U(x,t)$ 可由 $F_n(t)$ 和 $u_n(x)$ 合成表示如下

$$U(x,t) = -\sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)u_n(x)/N_n \tag{7-59}$$

如果知道 $F_n(t)$ ，則式 (7.40) 的級數解就可求出，因為由式 (7.54),(7.57),(7.58) 和 (7.59) 可知均是和 $F_n(t)$ 有關係。以下提出不需先算出 $U(x,t)$ 而可求得 $F_n(t)$ 的方法。考慮兩個力系，一為擬靜態力系，另一為第 n 個特徵模式力系，透過 Betti's law 後，可得

$$-\omega_n^2 \int_0^l \rho U(x,t)u_n(x)dx = V_n(0)U(0,t) + V_n(l)U(l,t) = V_n(0)a(t) + V_n(l)b(t) \tag{7-60}$$

其中， $V_n(0)$ 和 $V_n(l)$ 為第 n 個特徵模式的端剪力。上式結果可說成體積分已轉換成邊界積分如下

$$+\omega_n^2 F_n(t) = V_n(0)a(t) + V_n(l)b(t) \tag{7-61}$$

上式，因為是一維問題，所以看不到邊界積分。

式 (7.53) 為典型的單自由度振動系統的控制方程，可使用單自由度的 Duhamel 積分表出其解 $q_n(t)$ 如下

$$q_n(t) = \frac{\dot{q}_n(0)sin(\omega_n t)}{\omega_n} + \frac{1}{\omega_n N_n}\int_0^t \frac{1}{\omega_n^2}(V_n(0)\ddot{a}(\tau) + V_n(l)\ddot{b}(\tau))sin(\omega_n(t-\tau))d\tau \tag{7-62}$$

上式已代入 $q_n(0)=0$ 和 $a(0)=0, b(0)=0$ 的條件。因此，級數解可寫成

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(-F_n(t)/N_n \;\; + q_n(t))sin(n\pi x/l) \tag{7-63}$$

其中 $F_n(t)$ 和 $q_n(t)$ 如式 (7.61) 和 (7.62) 所示。

如果直接使用 Laplace 轉換，並使用式 (7.57) 和 (7.58) 的初始條件，則 $q_n(t)$ 為

$$q_n(t)=\frac{F_n(t)}{N_n}-\frac{\omega_n}{N_n}\int_0^t sin(\omega_n(t-\tau))F_n(\tau)d\tau \tag{7-64}$$

因此級數解可寫成更簡潔的式子如下

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{-\omega_n}{N_n}\int_0^t sin(\omega_n(t-\tau))F_n(\tau)d\tau]sin(n\pi x/l) \tag{7-65}$$

使用式 (7.61) ，解析解可得如下

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\{\frac{-1}{\omega_n N_n}\int_0^t sin(\omega_n(t-\tau))[V_n(0)a(\tau)+V_n(l)b(t)]d\tau\}sin(n\pi x/l) \tag{7-66}$$

上式亦為廣義的 Duhamel 積分式。然而在實際應用時，若地震記錄直接量測位移 $a(t)$ 和 $b(t)$，則建議使用上式，一般地震記錄量測加速度 $\ddot{a}(t)$ 和 $\ddot{b}(t)$，因此建議使用式 (7.62) 與式 (7.63) 。

.

****

習題一: 試將以上方法應用來求解如下一維桿於兩端受激發振動問題，參考下圖

一維桿於兩端受激發振動問題

控制方程式 $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=c^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2},\quad 0<x<l$

邊界條件 $u(0,t)=a(t),\;\; u(l,t)=b(t)$

初始條件 $u(x,0)=0,\quad \dot{u}(x,0)=0$

****

****

習題二: 若上式桿同時含內外阻尼且在末端有彈簧如下圖，試導出解析解。

一維桿受激發振動問題

控制方程式　$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = v^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + c_i \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \quad 0 < x < l$

邊界條件　$u(0,t) = a(t), \;\; k\ u(l,t) + c_e\ \dot{u}(l,t) = \frac{\partial u}{\partial x}\ |_{x=l}$

初始條件　$u(x,0) = 0, \quad \dot{u}(x,0) = 0$

****

7.5　範例說明

為驗證上述方法的正確性，以下舉四例進行探討

範例一: 針對以下問題，如圖 7.3 所示，試比較 Mindlin 和本章作法所得結果，是否相同?

圖 7.3　受彎矩激發的時變邊界條件模式

控制方程式　$-\frac{\partial^2}{\partial x^2}(EI\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}) = \rho\ddot{u}(x,t) \;\; ,0 < x < l$

邊界條件　$u(0,t) = 0, \;\; u''(0,t) = 0$

$u(l,t) = 0, \;\; EIu''(l,t) = M(t) = -M\ sin(\omega_f t)$

初始條件　$u(x,0) = 0, \;\; \dot{u}(x,0) = 0$

由功能互換的 Betti 定理，式 (7.61) 變成

$$\omega_n^2 F_n(t) = M(t)\theta_n(l) = M(t)\frac{n\pi}{l}(-1)^n \tag{7-67}$$

其中，$\theta_n(x)$ 為第 n 個模態之斜率。

$$\theta_n(x) = \frac{du_n(x)}{dx} = \frac{n\pi}{l}cos(n\pi x/l) \tag{7-68}$$

因此

$$F_n(t) = \frac{-Msin(\omega_f t)n\pi(-1)^n}{\omega_n^2 l} \tag{7-69}$$

$$F_n(0) = 0 \tag{7-70}$$

$$\dot{F}_n(0) = \frac{-M\omega_f\ n\pi(-1)^n}{\omega_n^2 l} \tag{7-71}$$

$$q_n(0) = 0 \tag{7-72}$$

$$\dot{q}_n(0) = \frac{M\omega_f n\pi(-1)^n}{\omega_n^2 l N_n} \tag{7-73}$$

由式 (7.69) ，式 (7.62) 中 $q_n(t)$ 可寫成

$$q_n(t) = \frac{M\omega_f n\pi(-1)^n}{\omega_n^3 l N_n} sin(\omega_n t) + \frac{\omega_f^2}{\omega_n^3 N_n}\int_0^t -M sin(\omega_f t)\frac{n\pi}{l}(-1)^n sin(\omega_n(t-\tau))d\tau \quad (7\text{-}74)$$

$$q_n(t) = \frac{M\omega_f n\pi(-1)^n}{\omega_n^3 l N_n} sin(\omega_n t) - \frac{n\pi(-1)^n M\omega_f^2}{\omega_n^3 N_n l}\int_0^t sin(\omega_f t) sin(\omega_n(t-\tau))d\tau \quad (7\text{-}75)$$

$$q_n(t) = \frac{M\omega_f n\pi(-1)^n}{\omega_n^3 l N_n} sin(\omega_n t) - \frac{n\pi(-1)^n M\omega_f^2}{\omega_n^3 N_n l}\frac{\omega_n\omega_f}{(\omega_n^2-\omega_f^2)}(\frac{sin(\omega_f t)}{\omega_f} - \frac{sin(\omega_n t)}{\omega_n}) \quad (7\text{-}76)$$

$$q_n(t) = \frac{M\omega_f n\pi(-1)^n}{\omega_n^3 l N_n} sin(\omega_n t) - \frac{n\pi(-1)^n M\omega_f^3}{\omega_n^2 N_n l(\omega_n^2-\omega_f^2)}(\frac{sin(\omega_f t)}{\omega_f} - \frac{sin(\omega_n t)}{\omega_n}) \quad (7\text{-}77)$$

$$q_n(t) = \frac{M\omega_f n\pi(-1)^n}{\omega_n^3 l N_n} sin(\omega_n t) - \frac{n\pi(-1)^n M\omega_f^2}{\omega_n^2 N_n l(\omega_n^2-\omega_f^2)}(sin(\omega_f t) - \frac{\omega_f}{\omega_n} sin(\omega_n t)) \quad (7\text{-}78)$$

全解為

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}(F_n(t)/N_n \ + q_n(t)) sin(n\pi x/l) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}[\frac{-Mn\pi(-1)^n}{\omega_n^2 l N_n} sin(\omega_f t) + \frac{n\pi(-1)^n M\omega_f}{\omega_n^3 l N_n} sin(\omega_n t) \\ &\quad + \frac{-n\pi(-1)^n M\omega_f^2}{\omega_n^2 l N_n(\omega_n^2-\omega_f^2)}(sin(\omega_f t) - \frac{\omega_f}{\omega_n} sin(\omega_n t)] sin(n\pi x/l) \end{aligned} \quad (7\text{-}79)$$

可簡化為

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}[\frac{-n\pi(-1)^n M}{l N_n(\omega_n^2-\omega_f^2)} sin(\omega_f t) + \frac{n\pi(-1)^n M\omega_f}{\omega_n l N_n(\omega_n^2-\omega_f^2)} sin(\omega_n t)] sin(n\pi x/l) \quad (7\text{-}80)$$

而 Mindlin 的解析解為

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{-Ma}{2EI\omega_f}[sinh\sqrt{(\omega_f/a)}\,x \ \ csch\sqrt{(\omega_f/a)}\,l - sin\sqrt{(\omega_f/a)}\,x \ \ csc\sqrt{(\omega_f/a)}\,l] sin(\omega_f t) \\ &\quad + \frac{4Ma}{2EI\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\omega_f}{(\omega_n^2-\omega_f^2)n} sin(\omega_n t) sin(n\pi x) \end{aligned} \quad (7\text{-}81)$$

其中

$$a = \sqrt{EI/\rho} \quad (7\text{-}82)$$

配合如下的數據

$E = 2.94\times 10^{10}\ N/m^2, I = 1/12\, m^4,\ l = 10\, m, \rho = 2400\, kg/m^3,\ \omega_f = 10\pi\ 1/sec,\ M = 1.0\times 10^6\ N\cdot$

繪出在 $t = 0$, 0.3 , 0.6 , 0.9 , 1.2 sec 整個梁的反應圖，另亦繪出在 $x = 2.5$, 5.0 , 7.5 m 處之位移歷程圖，可看出式 (7.80) 與式 (7.81) 解是相同的，所不同的只是 Mindlin 的擬靜

態解在本法中也為級數所取代。

.

x 固定，t 變動之 $u(x,t)$ 的反應圖

t 固定，x 變動之 $u(x,t)$ 的反應圖

.

範例二: 試求出簡支梁承受多重輸入激發的反應?

.

方法一、解析法

如§ 7.4 章節所述圖 7.2 ，則式 (7.61) 可簡化為

$$\omega_n^2 F_n(t) = EI\frac{(n\pi)^3}{l^3}[a(t) - (-1)^n b(t)] \tag{7-83}$$

上式已代入特徵模式的端剪力場

$$S_n(x) = -EI\frac{d^3u_n(x)}{dx^3} = EI\frac{(n\pi)^3}{l^3}cos(n\pi x/l) \tag{7-84}$$

第 n 個特徵模式的端剪力，在 $x = 0$ 處，為

$$V_n(0) = EI\frac{(n\pi)^3}{l^3} \tag{7-85}$$

第 n 個特徵模式的端剪力，在 $x = l$ 處，為

$$V_n(l) = -EI\frac{(n\pi)^3}{l^3}(-1)^n \tag{7-86}$$

因此

$$-F_n(t) = \frac{EI\frac{(n\pi)^3}{l^3}[a(t) - (-1)^n b(t)]}{\omega_n^2} \tag{7-87}$$

$$F_n(0) = 0 \tag{7-88}$$

$$-\dot{F}_n(0) = \frac{EI\frac{(n\pi)^3}{l^3}[\dot{a}(0) - (-1)^n \dot{b}(0)]}{\omega_n^2} \tag{7-89}$$

代入 $\dot{a}(0) = S_0\Omega$ 和 $\dot{b}(0) = 0$ 後，可得

$$q_n(0) = 0 \tag{7-90}$$

$$\dot{q}_n(0) = \dot{F}_n(0)/N_n = \frac{1}{\omega_n^2 N_n}EI(\frac{n\pi}{l})^3 S_0\Omega \tag{7-91}$$

代入式 (7.85) 與 (7.86) ，則式 (7.62) 可簡化為

$$\begin{aligned} q_n(t) = &\frac{\dot{q}_n(0)sin(\omega_n t)}{\omega_n} \\ &+\frac{1}{\omega_n^3 N_n}\int_0^t (EI(\frac{n\pi}{l})^3\ddot{a}(\tau) - EI(\frac{n\pi}{l})^3(-1)^n\ddot{b}(\tau))sin(\omega_n(t-\tau))d\tau \end{aligned} \tag{7-92}$$

其中 $H(t)$ 為 Heaviside 函數且

$$a(t) = S_0 e^{-\delta t} sin(\Omega t)H(t), b(t) = S_0 e^{-\delta(t-t_d)} sin(\Omega(t-t_d))H(t-t_d)$$

$$a(0) = 0, \dot{a}(0) = S_0, b(0) = 0, \dot{b}(0) = 0$$

$q_n(t)$ 的一般解有四部份

$$\begin{aligned}
\phi^1 &= (re^{-\delta t}cos(\Omega t) + \frac{s}{\Omega}e^{-\delta t}sin(\Omega t) + pcos(\omega_n t) + \frac{q}{\omega_n}sin(\omega_n t)) \\
\phi^2 &= -sin(\omega_n t) \\
\phi^3 &= (re^{-\delta(t-t_d)}cos(\Omega(t-t_d)) + \frac{s}{\Omega}e^{-\delta(t-t_d)}sin(\Omega(t-t_d)) \\
&\quad +p\,cos(\omega_n(t-t_d)) + \frac{q}{\omega_n}sin(\omega_n(t-t_d))U(t-t_d) \\
\phi^4 &= \frac{\dot{q}_n(0)sin(\omega_n t)}{\omega_n}
\end{aligned} \tag{7-93}$$

以上方法經 $q_n(t)$ 求出後，再求 $u(x,t)$ ，較麻煩，就不再如此作下去。若直接由式 (7.66) 出發，則可導得 p,q,r,s 滿足

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2\delta & 1 & \delta & 1 \\ \Omega^2+\delta^2 & 2\delta & \omega_n^2 & 0 \\ 0 & \Omega^2+\delta^2 & \delta\omega_n^2 & \omega_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

解上述代數方程，可得

$$\begin{aligned}
p &= \frac{-2\delta}{(\delta^4+2\delta^2\Omega^2+\Omega^4+2\delta^2\omega_n^2-2\Omega^2\omega_n^2+\omega_n^4)} \\
q &= \frac{(\delta^2+\Omega^2-\omega_n^2)}{(\delta^4+2\delta^2\Omega^2+\Omega^4+2\delta^2\omega_n^2-2\Omega^2\omega_n^2+\omega_n^4)} \\
r &= \frac{2\delta}{(\delta^4+2\delta^2\Omega^2+\Omega^4+2\delta^2\omega_n^2-2\Omega^2\omega_n^2+\omega_n^4)} \\
s &= \frac{(\delta^2-\Omega^2+\omega_n^2)}{(\delta^4+2\delta^2\Omega^2+\Omega^4+2\delta^2\omega_n^2-2\Omega^2\omega_n^2+\omega_n^4)}
\end{aligned}$$

由式 (7.65) 可看出解為

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{EIn^3\pi^3S_0\Omega}{N_nl^3}[\phi^1(t)H(t)-(-1)^n\phi^1(t-t_d)H(t-t_d)]sin(n\pi x/l)$$

上式可再算得支承點的剪力如下

$$\begin{aligned}
V(0,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{E^2I^2n^6\pi^6S_0\Omega}{N_nl^3}[\phi^1(t)H(t)-(-1)^n\phi^1(t-t_d)H(t-t_d)] \\
V(l,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-E^2I^2n^6\pi^6S_0\Omega}{N_nl^3}[\phi^1(t)H(t)-(-1)^n\phi^1(t-t_d)H(t-t_d)](-1)^n
\end{aligned}$$

由以上結果配合如下的數據

$$E = 2.94\times10^{10}\ N/m^2,\ I = 1/12\ m^4,\ l = 60\ m$$

$$\rho = 2400\,kg/m^3,\ S_0 = 0.01\,m,\ \omega_f = 1.2\pi\ 1/sec$$

$$t_d = 0.\ sec\,(in\ phase),\ t_d = 0.2\ sec,(with\ time\ lag)$$

$$\delta = 0.1,\quad N = 200.$$

茲將分析結果繪圖如下 .

同步輸入無時差，x 固定，t 變動之 $u(x,t)$ 的反應圖

同步輸入無時差，t 固定，x 變動之 $u(x,t)$ 的反應圖

.

反步輸入無時差，x 固定，t 變動之 $u(x,t)$ 的反應圖

反步輸入無時差，t 固定，x 變動之 $u(x,t)$ 的反應圖

.

同步輸入，時差 $0.2\,sec$ ，x 固定，t 變動之 $u(x,t)$ 的反應圖

同步輸入，時差 0.2 sec ，t 固定，x 變動之 $u(x,t)$ 的反應圖

.

方法二、有限元素的解法

輸入資料 l ， EI ， ρ ，而 $a(t) = S_0 e^{-\delta t} sin(\Omega t) H(t)$， $b(t) = H(t - T_d) a(t - T_d)$ ，其中 $H(t)$ 為 Heaviside 函數， T_d 表示多支承輸入的時差， δ 表示支承運動的阻尼， Ω 表示激發頻率。

MSC/NASTRAN 為一受肯定的有限元素套裝軟體，對於上述問題的模擬技巧，參考圖 7.4 ，簡述如下:

圖 7.4　有限元素模擬圖

首先，在 $x = 0$ 處的結點，假設一大質量 M ，且 M 最好 $M > 10^4 M_s$，其中 M_s 表示結構總質量，同理在 $x = l$ 處的結點，假設另一大質量 M ，而在 $x = 0, x = l$ 處的結點上，分別施加 $M\ddot{a}(t)$ 和 $M\ddot{b}(t)$ 之外力，加入 support 卡，取 $x = 0, x = l$ 處的自由度為提供剛體運動所需的基本自由度，使其在 $x = 0, l$ 處分別產生等效的 $\ddot{a}(t)$ 和 $\ddot{b}(t)$ 反應歷程，則域內的動態反應即為其解。

茲將所需的卡片簡述如下

對於散漫負荷而言

CMASS2, DAREA, DLOAD, RANDPS, RLOAD1, SUPORT, TABLED1, TABRND1 。

對於暫態負荷而言

CMASS2, DAREA, DLOAD, TLOAD1, SUPORT, TABLED1, TSTEP, TIC, DTI, TABDMP1。

讀者若對此實際工程模擬的技巧有興趣的話，可參閱拙著“ MSC/NASTRAN 使用入門與工程應用”第 11 章之例題或 1996 年的新版書均有述及，在此不再贅述。

範例三: 試分析舊金山金門大橋之橋塔受地震之反應

，如圖 7.5 所示，請考慮阻尼效應。

.

圖 7.5　舊金山金門大橋之橋塔簡化模型

控制方程式

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2}(EI\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}) - P\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t) = \rho \ddot{u}(x,t) + c\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \quad ,0 < x < l \tag{7-94}$$

邊界條件

$$u(0,t) = g(t) \tag{7-95}$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\ |_{x=0} = 0 \tag{7-96}$$

$$EI\frac{\partial^2 u(l,t)}{\partial x^2} = 0 \tag{7-97}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(EI\frac{\partial^2 u(l,t)}{\partial x^2}) + P\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} - k_e u(l,t) = 0 \tag{7-98}$$

初始條件

$$u(x,0) = 0,\ \ \dot{u}(x,0) = 0 \tag{7-99}$$

則廣義座標 $q_n(t)$ 滿足下式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho[\ddot{q}_n(t) + 2\xi_n\omega_n\dot{q}_n + \omega_n^2 q_n(t)]u_n(x) = f(x,t) - \rho\ddot{U}(x,t) - 2\xi_n\omega_n\rho\dot{U}(x,t) \tag{7-100}$$

其中

$$\xi_n = \frac{c}{2\rho\omega_n} \tag{7-101}$$

利用 Fourier 級數特性，上式可簡化為

$$\ddot{q}_n(t) + 2\xi_n\omega_n\dot{q}_n + \omega_n^2 q_n(t) = \frac{1}{N_n}[B_n + 2\xi_n\omega_n\dot{F}_n(t) + \ddot{F}_n(t)] \tag{7-102}$$

同前面的作法，可得 $q_n(t)$ 如下

$$q_n(t) = \frac{F_n(t)}{N_n} - \frac{\omega_n}{N_n\sqrt{1-\xi_n^2}}\int_0^t e^{-\xi_n\omega_n(t-\tau)} sin(\omega_n\sqrt{1-\xi_n^2}(t-\tau))F_n(\tau)d\tau \tag{7-103}$$

則全解的級數解表示式為

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}[\frac{-\omega_n}{N_n\sqrt{1-\xi_n^2}}\int_0^t e^{-\xi_n\omega_n(t-\tau)} sin(\omega_n\sqrt{1-\xi_n^2}(t-\tau))F_n(\tau)d\tau]u_n(x) \tag{7-104}$$

此橋塔動力系統的特徵方程式為

$$\begin{aligned} &2\lambda_n^4 + (2\lambda_n^4 + \alpha^4)cosh(\epsilon)cos(\delta) - \alpha^2\lambda_n^2 sinh(\epsilon)sin(\delta) \\ &+\beta\sqrt{4+(\alpha/\lambda_n)^4}(\epsilon\ cosh(\epsilon)sin(\delta) - \delta\ sinh(\epsilon)cos(\delta)) = 0 \end{aligned} \tag{7-105}$$

其中

$$\delta = l\sqrt{(\lambda^4 + \frac{\alpha^4}{4})^{1/2} + \frac{\alpha^2}{2}},\ \epsilon = l\sqrt{(\lambda^4 + \frac{\alpha^4}{4})^{1/2} - \frac{\alpha^2}{2}},\ \alpha^2 = \frac{P}{EI},\ \beta = \frac{k}{EI}$$

此橋塔動力系統的第 n 個特徵值為

$$\omega_n = \lambda_n^2\sqrt{EI/\rho} \tag{7-106}$$

此橋塔動力系統的第 n 個特徵模式為

$$u_n(x) = [(\frac{\delta^2 sin(\delta) + \epsilon\delta sinh(\epsilon)}{\delta^2 cos(\delta) + \epsilon^2 cosh(\epsilon)})(cosh(\frac{\epsilon}{l})x - cos(\frac{\delta}{l})x) + (sin(\frac{\delta}{l})x - \frac{\delta}{\epsilon}sinh(\frac{\epsilon}{l})x)]$$

此橋塔動力系統的第 n 個模式的斜率場為

$$u_n'(x) = [(\frac{\delta^2 sin(\delta) + \epsilon\delta sinh(\epsilon)}{\delta^2 cos(\delta) + \epsilon^2 cosh(\epsilon)})(\frac{\epsilon}{l}sinh(\frac{\epsilon}{l})x + \frac{\delta}{l}sin(\frac{\delta}{l})x) + (\frac{\delta}{l}cos(\frac{\delta}{l})x - \frac{\delta}{l}cosh(\frac{\epsilon}{l})x)]$$

此橋塔動力系統的第 n 個模式的剪力場為

$$\begin{aligned} EIu_n'''(x) = EI[&(\frac{\delta^2 sin(\delta) + \epsilon\delta sinh(\epsilon)}{\delta^2 cos(\delta) + \epsilon^2 cosh(\epsilon)}) \\ &((\frac{\epsilon}{l})^3 sinh(\frac{\epsilon}{l})x - (\frac{\delta}{l})^2 sin(\frac{\delta}{l})x) + ((-\frac{\delta}{l})^3 cos(\frac{\delta}{l})x - \frac{\delta\epsilon^2}{l^3}cosh(\frac{\epsilon}{l})x)] \end{aligned}$$

當 $x = 0$ 時，則

$$u_n'(0) = [(\frac{\delta^2 sin(\delta) + \epsilon\delta sinh(\epsilon)}{\delta^2 cos(\delta) + \epsilon^2 cosh(\epsilon)})(\frac{\delta}{l})]$$

當 $x = l$ 時，則

$$EIu_n'''(0) = EI[(\frac{\delta^2 sin(\delta) + \epsilon\delta sinh(\epsilon)}{\delta^2 cos(\delta) + \epsilon^2 cosh(\epsilon)})(\frac{-\delta^3 - \epsilon^2\delta}{l^3})]$$

式 (7.35) 代入如下條件

$$h(t) = 0,\ k_\theta = 0,\ \ m(t) = 0,\ \ s(t) = 0,\ \ \lambda_m = 0,\ \kappa_m = 0,\ B_m(t) = 0.$$

則正解為

$$\begin{aligned} u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\{ & \frac{1}{N_n\sqrt{1-\xi_n^2}\omega_n}\int_0^t e^{-\xi_n\omega_n(t-\tau)} sin(\omega_n\sqrt{1-\xi_n^2}(t-\tau)) \\ & -g(\tau)[(EIu_n''(0))' + Pu_n'(0)]d\tau\}u_n(x) \end{aligned} \tag{7-107}$$

其中， $u_n'(0)$ 和 $u_n'''(0)$ 可由已知特徵函數求得。

****

習題: 試將如下實際資料，以理論解和 MSC/NASTRAN 解作比較。

實際舊金山金門大橋資料如下

$$l = 214\,m,\ P = 2.45\times10^8\ N,\ E = 2.0\times10^{10}\ N/m^2,\ I = 39.29\ m^4,\ k = 3.045\times10^8\ N/m,$$

$g(t)$ 請使用 El　Centro 的地震資料。

****

範例四: 試將本章理論由連續系統，延用於離散系統。並討論與傳統方法有何不同?

針對取自由體後的自由體離散系統控制方程如下

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = f(t) \tag{7-108}$$

其中， M 表示 $n\times n$ 質量矩陣， C 表示 $n\times n$ 阻尼矩陣， K 表示 $n\times n$ 勁度矩陣。其中， n 表示所有的自由度總數，含支承自由度。

首先將自由度分成兩個子集之和，

$$u = u_l + u_r\ \ ,\ \ l + r = n \tag{7-109}$$

其中 u_r 為支承自由度子集， $u_l = u - u_r$ ，如圖 7.6 所示，而給定的支承自由度位移運動歷程為

$$u_r = u_r(t) \tag{7-110}$$

圖 7.6　自由度子集示意圖

同樣地，將解分成兩部份，

$$u = U + u_d \tag{7-111}$$

其中， U 表示擬靜態解， u_d 為動態解，若再以自由度子集來分的話，又可寫成

$$u = \begin{bmatrix} u_r \\ u_l \end{bmatrix} \tag{7-112}$$

$$U = \begin{bmatrix} u_r \\ u_l^{qs} \end{bmatrix} \tag{7-113}$$

$$u_d = \begin{bmatrix} 0 \\ u_l^d \end{bmatrix} \tag{7-114}$$

$$KU = \begin{bmatrix} P_r \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7-115}$$

其中， P_r 表示擬靜力解在給定位移自由度上對應的結點力。將動態解以模態展開，表成下式

$$u_l^d = \Phi_{ll} q_l \tag{7-116}$$

其中， Φ_{ll} 表示束制系統特徵函數所構成的 $l \times l$ 模態矩陣 (modal matrix) 。

Φ_{ll} 有如下特性

$$\Phi_{ll}^T M_{ll} \Phi_{ll} = I$$

$$\Phi_{ll}^T C_{ll} \Phi_{ll} = diag(2\xi_i \omega_i)$$

$$\Phi_{ll}^T K_{ll} \Phi_{ll} = diag(\omega_i^2)$$

離散系統的特徵值

$$\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_l\}^T$$

離散系統的特徵模式

$$\Phi_l = \{\Phi_{1l}, \Phi_{2l}, \Phi_{3l}, ..., \Phi_{ll}\}^T$$

則 q_{l1} 滿足

$$\ddot{q}_{l1}(t) + 2\xi_{l1}\omega_l\dot{q}_{l1} + \omega_l^2 q_{l1}(t) = -\Phi_{nl}^T M_{nn}\ddot{U}_{n1} - \Phi_{nn}^T C_{nn}\dot{U}_{n1} \tag{7-117}$$

其中

$$\Phi_{nl} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Phi_{ll} \end{bmatrix} \tag{7-118}$$

傳統方法對 U 實際由下式算出

$$U = u_l^{qs} = K_{ll}^{-1} K_{lr} u_r$$

再算 $\Phi_{nl}^T M_{nn}\ddot{U}_{n1}$。但若由功能互換原理可直接由能量式算得

$$-\omega_i^2 \phi_i^T M_{nn} U = V_r^i \cdot u_r$$

其中，V_r^i 表示第 i 個模態之束制反力，ϕ_i 表示第 i 個模態向量。則上式可寫成矩陣式

$$-D_\omega \Phi_{nl}^T M_{nn} U = V_{rl}^T \cdot u_r = D_\omega F_l \tag{7-119}$$

其中

$$D_\omega = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_l^2 \end{bmatrix}$$

式 (7.119) 亦可由如下特徵代數方程與擬靜態代數方程經由運算導得。

$$-\omega_i^2 \begin{bmatrix} M_{ll} & M_{lr} \\ M_{rl} & M_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_l^i \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{ll} & K_{lr} \\ K_{rl} & K_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_l^i \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ V_r^i \end{bmatrix} \tag{7-120}$$

其中，i　註標表示第 i 個模態向量。

$$\begin{bmatrix} K_{ll} & K_{lr} \\ K_{rl} & K_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_l \\ u_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ P_r \end{bmatrix} \tag{7-121}$$

定義

$$F_l = -\Phi_{nl}^T M_{nn} U$$

因此

$$U = -\Phi_{nl} F_l$$

解的矩陣式為

$$u_l = \Phi_{ll}\bar{q}_l$$

其中，當 $C = 0$ 時

$$\bar{q}_n(t) = \frac{1}{\omega_n N_n}\int_0^t sin(\omega_n(t-\tau))F_n(\tau)d\tau \tag{7-122}$$

全解為

$$u_l = u_l^{qs} + u_l^d = \Phi_{ll}\bar{q}_l \tag{7-123}$$

若欲算內力，則為

$$P_l = Ku_l = K\Phi_{ll}\bar{q}_l \tag{7-124}$$

****

習題: 試將本章理論由連續系統，延用於離散系統。並以下述結構例計算其動力反應?

圖　四柱剛板承受支承運動

[hint]:

J. T. Chen, H.-K. Hong and C. S. Yeh, Modal Reaction Method for Modal Participation Factors in Support Motion Problems, Communications in Numerical Methods in Engineering, Vol.11, No.6, pp.479-490, 1995.

7.6 討論與結論

(1). 本章範例一所導得的級數解收斂到 Mindlin 的解，所不同的是在 $x = 0$ 和 l 處，為點收斂到支承運動。針對此點而言，有人稱傳統法為加速法 (acceleration method) ，乃是此因。這個問題可看成是邊界元素法中的邊界層不準效應。

(2). 本文的實際應用，除了在地震工程外，也可應用於航天及航空工程的慣性釋放的分析。

(3). 對 § 7.4 節模式而言，對稱或反對稱行為均可由解的行為看出如下:　對稱行為是 $a(t)-b(t)=0$，此時 $F_{2k}(t)=q_{2k}=0$；反對稱行為是　$a(t)=-b(t)$，此時 $F_{2k+1}(t)=q_{2k+1}=0$。

(4). 阻尼效應亦可考慮，如 § 7.5 節之範例三所示。

(5). 若考慮激發的散漫頻譜密度為 $S_{aa}(\omega)$ 和 $S_{bb}(\omega)$，則反應的統計值亦可經由散漫振動的理論予以求得，可參考陳等在 Engineering Structures 發表的文章。

(6). 本法並不需先算擬靜態解，亦不需算定義域的體積分。

(7). 本方法在離散系統，可對應導出很簡潔的式子，於實用上可避開求擬靜態解 (U)、反矩陣 (K_{ll}^{-1}) 與矩陣的乘積 $(\Phi_{ll}^{T}M_{ll}K_{ll}^{-1}K_{lb})$ 等複雜計算，而僅需用支承位移向量 (u_r) 與模態廣義力向量 (V) 之內積 $(V\cdot u_r)$ 即可將解算出，唯一較不同的是本法的模態資料庫不只需要位移資料，對於此模式的邊界束制反力，亦需先行求得並存於資料庫中。

(8). 傳統法分成擬靜力解與動態解後，若以 SRSS 法求最大基底剪力值時，當擬靜力解部份除有剛體部份外還含有應變能時，將有問題，但本法已將擬靜力解含入模態解中，套用 SRSS 法求最大值時，將很方便，因此本法比傳統法更適於求反應譜。

本文已導得解的積分方程表示式，在系統的特性資料庫 (含位移與束制力) 已有的情況下，其為一類似 Duhamel integral ，對於與時間有關的問題，均可以這種解題的技巧予以克服。

7.7　參考文獻

1. 葉超雄，彈性力學 II　講義，台大土木研究所， 1991　。
2. R. W. Clough and J. Penzien, Dynamics of Structures, McGraw-Hill, New York, 1975.
3. 陳正宗、林信立、韓文仁、邱垂鉦與秦無忝，“ MSC/NASTRAN 使用入門與工程應用” 良宜圖書公司，台北， 1989。
4. 陳正宗、林信立、邱垂鉦、全湘偉、黃志勇、韓文仁、與秦無忝，“ 有限元素法分析與工程實例— MSC/NASTRAN 軟體應用” 北門圖書公司，台北， 1996。
5. S. F. Masri, Response of Beams to Propagating Boundary Excitation, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.4, pp.497-509, 1976.
6. S. F. Masri and F. Udwadia, Transient Response of Shear Beam to Correlated Random

Boundary Excitation, J. App. Mech., ASME, Vol.44, pp.487-491, 1977.

7. R. D. Mindlin and L. E. Goodman, Beam Vibrations with Time-Dependent Boundary Conditions, J. Appl. Mech., pp.377-380, 1950.
8. C. S. Yeh and J. W. Liao, On the Dynamic Solutions for a Finite Porous Elastic Saturated Body, 15^{th} National Conference on Theoretical and Applied Mechanics, Tainan, Taiwan, R.O.C., 1991.
9. A. M. Abdel-Ghaffar and J. D. Rood, Simplified Earthquake Analysis of Suspension Bridge Towers, Vol.108,No. EM2, pp.291-308,ASCE, 1982.
10. J. G. Berry and P. M. Naghdi, On the Vibration of Elastic Bodies Having Time Dependent Boundary Conditions, Q. Appl. Math., Vol.14, No.1,pp.43-50, 1956.
11. M. P. Singh, R. A. Burdisso and G. O. Maldonado, Methods Used for Calculating Seismic Response of Multiply Supported Piping Systems, Trans. ASME, J. Pressure and Vessel, Vol.114,pp.46-52, 1992.
12. J. T. Chen, H.-K. Hong and C. S. Yeh, Modal Reaction Method for Modal Participation Factors in Support Motion Problems, Communications in Numerical Methods in Engineering, Vol.11, No.6, pp.479-490, 1995.
13. J. T. Chen and Y. S. Jeng, Dual Series Representation and Its Applications to a String Subjected to Support Motions, Advances in Engineering Software, Vol.27, No.3, pp.227-238, 1996.
14. J. T. Chen, H.-K. Hong, C. S. Yeh and S. W. Chyuan, Integral Representations and Regularizations for a Divergent Series Solution of a Beam Subjected to Support Motions, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.25, No.9, pp.909-925, 1996.
15. J. T. Chen, S. W. Chyuan, D. W. You and F. C. Wong, Normalized Quasi-static Mass — A New Definition for Multi-support Motion Problems, Finite Elements in Analysis and Design, Vol.26, pp.129-142, 1997.
16. L.Y. Chen, J. T. Chen, H.-K. Hong and C. H. Chen, Application of Cesaro Mean and the L-curve for the Deconvolution Problem, Soil Dynamics and Earthquake Engineering, Vol.14, No.5, pp.361-373, 1994.
17. J. T. Chen and D. W. You, Integral-differential Equation Approach for the Free Vibration of a SDOF System with Hysteretic Damping, Advances in Engineering Softwares, Vol.30, No.1, pp43-48, 1999.

18. J. T. Chen and D. W. You, Hysteretic Damping Revisited, Advances in Engineering Software, Vol.28, No.3, pp.165-171, 1997.
19. L. Y. Chen, J. T. Chen, C. H. Chen and H.-K. Hong, Free Vibration of a SDOF System with Hysteretic Damping, Mechanics Research Communications, Vol.21, pp.599-604, 1994.
20. J. T. Chen, D. H. Tsaur and H.-K. Hong, An Alternative Method for Transient and Random Responses Subjected to Support Motions, Engineering Structures, Vol.19, No.2, pp.162-172, 1997.

7.8 附錄

由式 (7.13) ，可得

$$
\begin{aligned}
&(\omega_n^2-\omega_m^2)\int_0^l \rho u_m u_n dx \\
&=\int_0^l \{u_m[EIu_n'']''+u_mPu_n''\}dx-\int_0^l \{u_n[EIu_m'']''+u_nPu_m''\}dx \\
&=-\int_0^l \{u_m'[EIu_n'']'+u_m'Pu_n'\}dx+u_m(EIu_n'')'\,|_0^l+u_mPu_n'\,|_0^l \\
&\quad+\int_0^l \{u_n'[EIu_m'']'+u_n'Pu_m'\}dx-u_n(EIu_m'')'\,|_0^l-u_nPu_m'\,|_0^l \\
&=\int_0^l u_m''EIu_n''dx-u_m'(EIu_n'')\,|_0^l+u_m[(EIu_n'')'+Pu_n']\,|_0^l \\
&\quad-\int_0^l u_n''EIu_m''dx+u_n'(EIu_m'')\,|_0^l-u_n[(EIu_m'')'+Pu_m']\,|_0^l \\
&=-u_m'(l)[EIu_n''(l))]+u_m'(0)[EIu_n''(0)] \\
&\quad+u_m(l)[(EIu_n''(l))'+Pu_n'(l)]-u_m(0)[(EIu_n''(0))'+Pu_n'(0)] \\
&\quad+u_n'(l)[EIu_m''(l))]-u_n'(0)[EIu_m''(0)] \\
&\quad-u_n(l)[(EIu_m''(l))'+Pu_m'(l)]+u_n(0)[(EIu_m''(0))'+Pu_m'(0)] \\
&=-u_m'(l)k_\theta u_n'(l)+u_m(l)k_eu_n(l)+u_n'(l)k_\theta u_m'(l)-u_n(l)k_eu_m(l) \\
&=0
\end{aligned}
\tag{7-125}
$$

正交條件滿足

$$(\omega_n^2-\omega_m^2)\int_0^l \rho u_m u_n dx=0 \tag{7-126}$$

亦即

$$\int_0^l \rho u_n(x) u_m(x) dx = \delta_{mn} N_m \tag{7-127}$$

上述之正交條件可視為兩個力系 $u_m(x)$，$u_n(x)$ 經由功能互換原理導得的結果。

【存檔：e:/bemprimer/dbem7.te】【建檔:Aug./01/'2006】