

第八章

有限元素法與邊界元素法

8.1 引言

當工程師或科學家面對一個問題時，首先即針對此一問題特性，設法尋找一合理的數學模式來描述該問題。以結構力學為例，通常會針對該結構體的一個無限小的元素，由其力平衡條件或宇宙定律來建立出描述該問題的一控制方程式，接下來就是使用各種方法去解這個控制方程式，然由於一般工程問題之幾何形狀與初始及或邊界條件，均很複雜，勢必很難求得其解析解，因此訴諸於數值分析乃是必需的。現行之數值分析方法中，較常被使用的方法不外三種——有限差分法 (Finite Difference Method, FDM)，有限元素法 (Finite Element Method, FEM) 和邊界元素法 (Boundary Element Method, BEM)。不管使用何種方法，以 BEM, FEM 模式進行數值模擬時，均有以下幾個問題？

- (1) 做網目分割時，疏密程度應如何考慮？
- (2) 用什麼元素來模擬？
- (3) 元素該取多少？
- (4) 邊界條件與負荷條件如何模擬？
- (5) 如何模擬出應力劇烈變化的臨界區？
- (6) 所能提供前後處理的程式為何，有何界面問題？
- (7) 誤差大概有多少？
- (8) 結果如何研判？

諸如以上種種問題的解決，除了需要靠工程判斷 (Engineering Judgement) 的經驗累積外，最根本的還是有限元素法與邊界元素法學理的素養，如此方能運用之妙存乎一心。

本章即針對有限元素法與邊界元素法進行說明比較，並探討兩者聯用的可行性。最後，並對模擬技巧與程式撰寫作一概述。

8.2 有限元素法與邊界元素法歷史發展

有限元素法並非什麼新奇的方法，就以古代數學家計算圓周長所使用的分段法而言，其實就已隱含有限元素法的意味在裡面。因此，若要回顧有限元素法的發展，應有兩個觀點：一為數學家的觀點，一為工程師的觀點，前者關心的是有限元素法解析結果的存在與唯一問題，後者則關心收斂與誤差控制的問題。為讓讀者對有限元素法與邊界元素法的歷史發展有一深切之體認，特將有限元素法與邊界元素法實際應用發展之年代先後簡述如下：

表 8.1. 有限元素法發展 (邊界元素法請參閱 § 0.3 表 0.1)

表 8.1 有限元素法發展年鑑

年 代	學 者	創 見
很久前	數學研究者	將圓周分成有限線段，來計算圓周率 π 值。
1850-1875	St.Venant, Navier	有限元素法的力學基礎 (最低勢能法) 建立。
1875-1892	Castigliano Maxwell, Mohr	建立了矩陣結構分析的基礎。
1941	Hrenikoff	以剛架理論表達 FEM 基本的象徵，啟發了 FEM 的發展。
1943	Courant	已有以片段連續函數來逼近未知函數的觀念。
1950	計算機專家	計算機問世。(有限元素法發展之催化劑)
1956	Clough etc.	正式提出 FEM 方法應用於結構分析。
1959	Greenstadt	以 Cell 的觀念來離散問題的定義域。
1960	Clough	正式定名“有限元素法”。
1960	Argyris, Kelsey	正式提出 FEM 方法應用於平面彈力之問題，已結合剛架理論與連體力學分析之觀念。
1964		NASA 開始發展 NASTRAN 程式。
1970	Zienkiewicz	有限元素法書籍出現。
1972	Oden	綜整了有限元素法的數學理論。
1972	MSC/NASTRAN	NASTRAN 有限元素法商業程式出現。
1989	台灣研究者	在台召開第一屆 MSC/NASTRAN 使用者會議。
1989	陳正宗... 等	MSC/NASTRAN 使用入門中文書發行。
1990	MSC/LA	MSC/WORLD 雜誌發行。
1994	MSC/LA	MSC/NASTRAN 68 版發行。
1995	MSC/TAIWAN	MSC TAIWAN 台灣分公司成立。
1995	學者專家	有限元素研究正蓬勃發展。

有限元素法與邊界元素法隨著超級電腦的問世，其被廣泛應用是可以預期的，現在還是有很多學者正從事新元素的推導、向量化運算、平行處理效率的研究、改良推導的方法與新程式之撰寫。在這方面有限元素法已有廣泛的商業套裝軟體，如 MSC/NASTRAN, ABAQUS, ANSYS, SAP90 ... 等，而邊界元素法則有英國 Southampton 大學發展的 BEASY 程式、西德 BETSY 程式、荷蘭 SYSNOISE 與 NASA 發展的 BEST3D 程式。不可否認的，有限元素法與邊界元素法在實際工程上之應用，將會更加蓬勃發展。

8.3 有限元素法與邊界元素法之優缺點比較

有限元素法與邊界元素法均為數值方法的一種，然並非意謂著其全無缺點，為使讀者更加了解有限元素法與邊界元素法，本節中將分別以三個表進行說明比較，供讀者參考，表 8.2、8.3 為各類方法之數學理論基礎和數學模式之比較，表 8.4 為各類數值方法的優劣比較。概括而言，有限差分法為較早被採用的數值方法，其原理為將控制方程式變成一組線性聯立方程式，再進行求解；然而針對不同的邊界條件而言，處理上有無法自如的困難，因此漸被有限元素法所取代。而有限元素法係將所處理的問題空間，離散為有限個元素，透過力學最低能量原理 (Minimum Potential Energy Theorem)，或泛函極值定理 (Stationary Functional Theorem) 轉成一組線性聯立方程式，再去求解，處理過程簡明方便，所以有限元素法在各個領域已被廣泛的應用著。以上兩種方法，當處理線性與非線性問題時，均不失其一般性，然對整個區域作離散時，常需龐大的資料輸入與計算機容量，且大型矩陣運算費時，對無限域問題更難以模擬。於是邊界元素法隨之興起，並已漸受重視。關於以上三種方法的比較探討，讀者可參照以下三表，於此不再贅述。

表 8.2 各類近似解法數學理論流程比較圖

表 8.4 各類數值方法的優劣比較

8.4 有限元素法與邊界元素法之分析流程

在現階段電腦工作站 (Work Station) 甚為普遍情形下，對於分析資料之輸入、輸出均可藉助工作站之圖形來加以處理，因此一套完整的數值模擬分析流程應包括前處理程式、有限元素法或邊界元素法分析程式與後處理程式等三個部份，參見圖 8.1，以下將就各部份特性分別說明之：

圖 8.1 有限元素法與邊界元素法一般流程圖

表 2.2 各類近似解法數學理論流程比較圖

偏	→	差分近似	→	差分方程式	→	差分法
微						
分	→	變分原理	→	變分方程式	→	有限元素法
方						
程	→	積分定理	→	積分方程式	→	邊界元素法

表 8.3 各類數值方法的理論基礎與數學模式

表 2.3 各類數值方法的理論基礎與數學模式

	理 論 基 礎	數 學 模 式
有限元素法	响變分學 珏最低勢能法 (Minimum Potential Energy Method) 烟 Euler-Lagrange 方程式	响變分式 $\delta\pi = 0$ 珏權餘法 (Weighted Residual Method)
邊界元素法	响勢論 (Potential Theory) 珏積分方程 烟格林恆等式 疤 Somigliana 恆等式	積分方程式
有限差分法	差分方程	差分方程式

表 2.4 各類數值方法的優劣比較

	優點	缺點
有限元素法	响線性、非線性問題均可解 珽理論一貫，容易接受 珽程式設計易於系統化、一般化 珽內插函數之選擇可隨問題所需精度而調整 珽現行套裝軟體多 珽全域矩陣具帶寬特性，可以動態儲存，節省計算機使用空間 珽對材料性質變異性，較具彈性	响需對整個區域 (Domain) 作離散，所需計算機容量大 珽不適於無限域或半無限域問題的求解 珽計算結果為所有自由度未知量，毫無選擇性 珽應力計算常需作微分處理，產生較大誤差與不連續性 珽力學上包生比接近 0.5 ($\nu = 0.5$) 時，需特別處理
邊界元素法	响僅需對邊界 (Boundary) 作離散，所需計算機容量小 珽處理過程僅限於邊界，誤差僅限於邊界，由 Saint-Venant 原理知離邊界越遠處，誤差越小 珽可只求得有興趣的節點未知量 珽求出結果，不需作微分運算，可得較精確與平滑的解 珽適於無限域或半無限域問題，因其自動滿足上述的邊界條件 珽針對問題的不同特性，可使用直接法與間接法 珽程式設計易於系統化一般化 珽適合處理高梯度問題 珽近似之邊界積分方程為一無誤差之正確式 (Exact Form) 珽力學上包生比 ν 接近 0.5 時，不需特別處理 珽適合超元素 (Super Element) 或次結構 (Sub-structure) 觀念的運用	响控制方程式基本解 (或 Green's Function) 通常不易求得 (尤以非線性控制方程式之基本解更是如此) 珽奇異積分需特別處理 珽於外域音場分析時，會伴生不存在的虛擬共振現象，需特別處理 珽現行套裝軟體較少 珽角點 (Corner) 需特別處理 珽對多介質問題較難處理 珽矩陣為全矩陣無帶寬特性 珽若考慮的問題為細長型，將有較大誤差 珽對非齊次或非線性之問題，需作體積分之處理 珽靠近邊界之值，需經正規化 (Regularization) 處理，才易求得準確
有限差分法	响理論簡單 (Taylor's Expansion) 珽線性、非線性問題均可解	响邊界不規則，需特別處理邊界條件 珽程式設計難於系統化、一般化 珽理論推導即含有近似成份

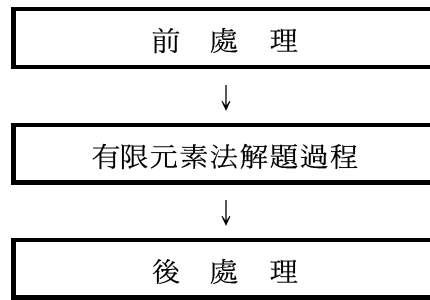


圖 2.1 有限元素法一般流程圖

8.4.1 前處理流程

所謂前處理乃是建立有限元素或邊界元素模型所需的輸入資料，如結點座標資料、元素內結點排列次序 (Connectivity)、束制條件與負荷條件等，請參照圖 8.2 之流程說明。

圖 8.2 有限元素法與邊界元素法前處理步驟

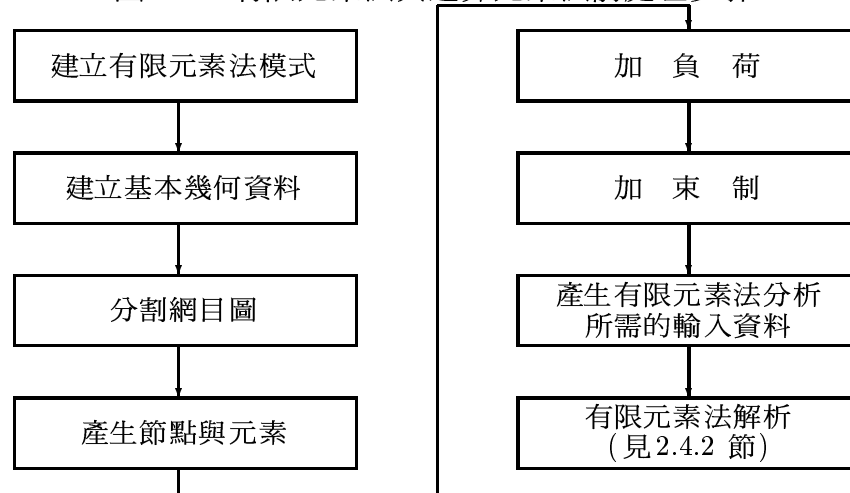


圖 2.2 有限元素法解題流程

8.4.2 有限元素法與邊界元素法分析流程(Solver)

(a). 有限元素法分析流程

有了前處理的離散化資料後，即可進行有限元素法之元素勁度矩陣計算，全域勁度矩陣之組合，元素負荷向量之計算，全域負荷向量之組合，將線性代數方程式 $KU = P$ 套入邊界條件後，求解變位，再經由資料反算過程 (Data Recovery) 求解元素內力、元素應力、束制反力與元素應變... 等，請參照圖 8.3 之流程說明。

圖 8.3 有限元素法與邊界元素法解題流程

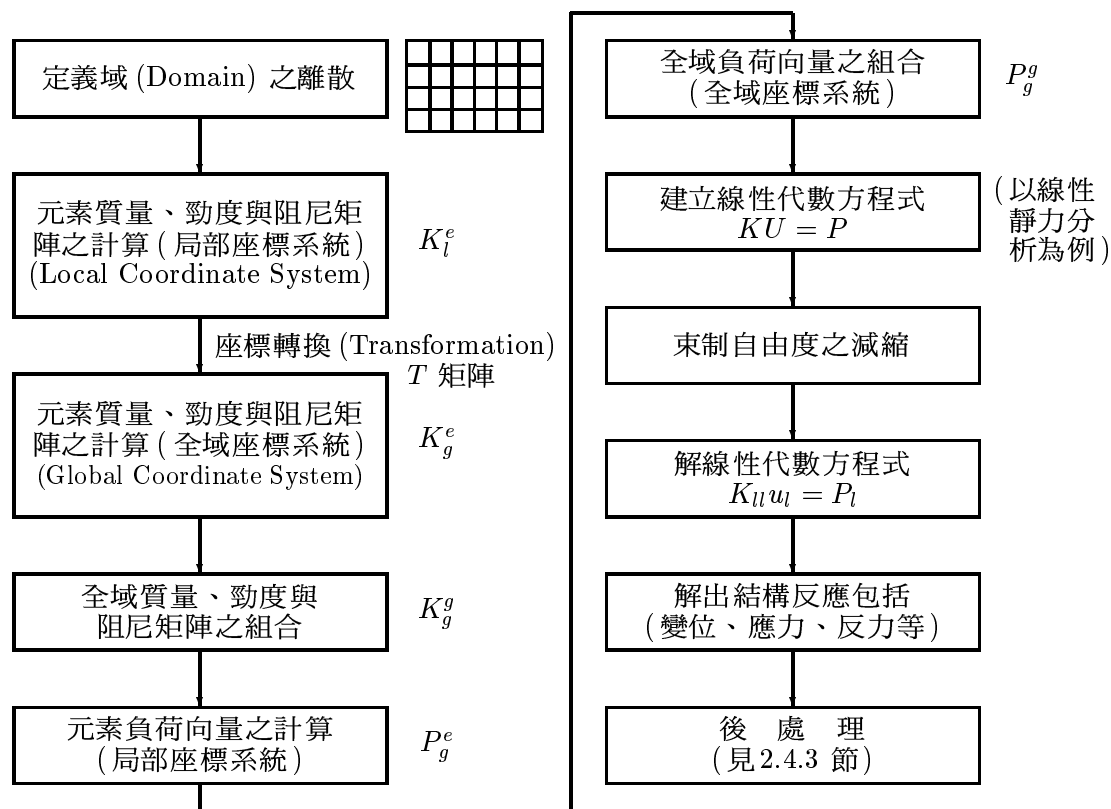


圖 2.3 有限元素法前處理步驟
(b). 邊界元素法分析流程 (Solver Process)

請參閱 § 3.6 節。

8.4.3 後處理流程

有了 § 8.4.2 小節的變位、應力與反力資料後，即可藉著後處理的繪圖系統，進行變形圖、等應力分佈圖與反力圖之繪製，或以 $X - Y$ 函數形態來繪圖，以協助使用者對其分析結果作一探討，請參照圖 8.4 之流程說明。

圖 8.4 有限元素法與邊界元素法後處理流程

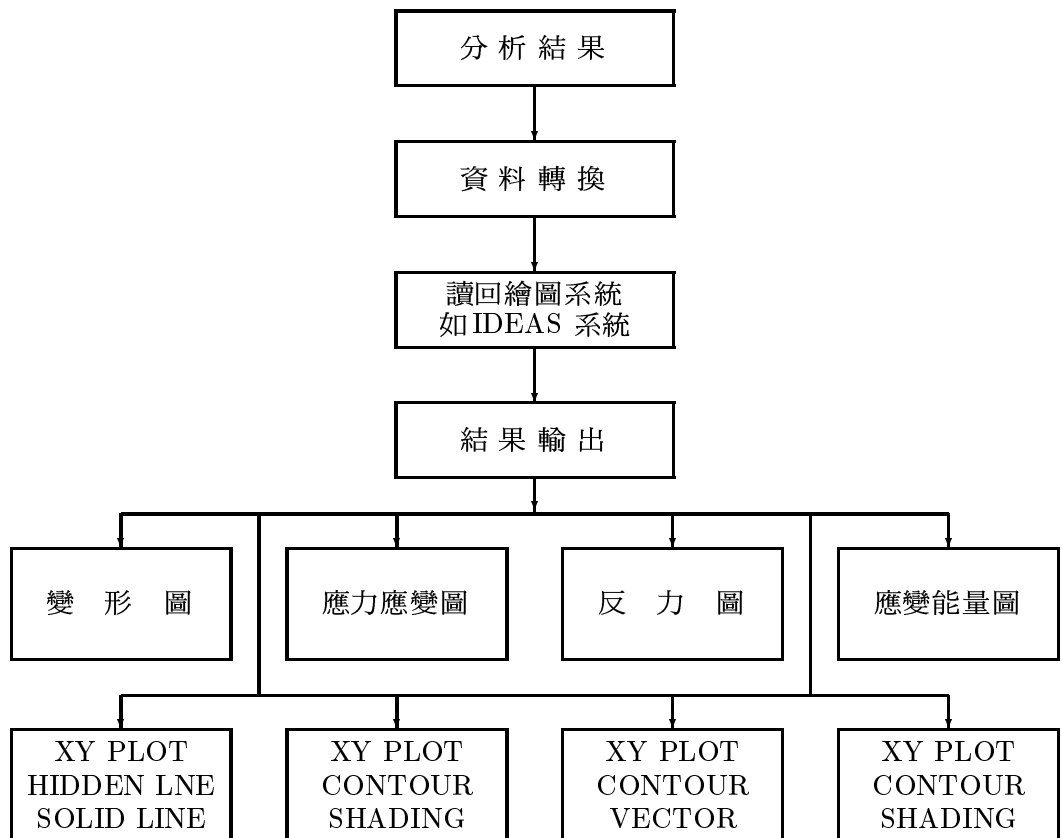


圖2.4 有限元素法後處理流程

8.5 BEM 與 FEM 特性矩陣之比較

為說明 BEM 與 FEM 之不同，則應由特性矩陣來了解，今若以 Laplace 方程為例，說明如下：

(a). FEM 解

$$\text{控制方程式} \quad d^2u/dx^2 = 0, 0 < x < 1$$

$$\text{邊界條件} \quad u(0) = 0, \frac{du}{dx} \Big|_{x=l} = p$$

若分成兩個有限元素如下圖，其特性矩陣如下：

有限元素網目圖

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \\ 0 \\ p \end{bmatrix}$$

代入邊界條件 $u_1 = 0$ 後，可得

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ p \end{bmatrix}$$

解得

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p/2 \\ p \end{bmatrix}$$

$$R = -p$$

(b). 若將 u_2 自由度除去 (Omit)，亦即所謂靜態濃縮或 Guyan 濃縮如下

將 $u_2 = (u_1 + u_3)/2$ 代入，經濃縮後，可得

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \\ p \end{bmatrix}$$

此特性矩陣與視為一個長度為 1 之元素特性矩陣相同。

再代入邊界條件 $u_1 = 0$ 後，可解得

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ p/2 \\ p \end{bmatrix}$$

$$R = -p$$

所得結果與 (a). 相同。

(c). BEM 解法

參閱 § 3.7 節之例題，可知

$$u(x) = u(s) \left. \frac{dG(s, x)}{ds} \right|_0^1 - \left. \frac{du}{ds} G(s, x) \right|_0^1$$

若視為兩個邊界點元素 (0 與 1)，則特性矩陣如下

$$\begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ -0.5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

其中未知量 u_1, q_1 ，已知量為 u_3, q_3 ，可列式如下

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R \\ p \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

代入邊界條件 $u_1 = 0$, $q_3 = p$ 後，可解得

$$u_3 = p, \quad R = -p$$

所得結果與 (a), (b) 相同。討論：

(1). BEM 與 FEM 其特性矩陣型式分述如下

$$\text{BEM: } \bar{T}u = Ut \quad \text{or} \quad Mu = \bar{L}t$$

$$\text{FEM: } Ku = P$$

其中， P 與 t 單位不同， P 為經內插函數積分得。

(2). FEM 特性矩陣即為勁度矩陣之物理觀念，而 BEM 勁度矩陣為 $U^{-1}\bar{T}$ 或 $\bar{L}^{-1}M$ ，因為 $U^{-1}Tu = t$ 或 $L^{-1}Mu = t$ 。

(3). BEM 特性矩陣可視為混合式推導 (Mixed formulation)，因其同時以 u, t 兩組未知量為基本變量。

應用：若將以上觀念應用於梁理論，亦可以 BEM, FEM 及濃縮 (omit) FEM 的一些自由度等三種方法解之並比較之。

(1). 將梁分成兩個有限元素，導出特性矩陣與負荷向量，並求解。

(2). 將中間結點自由度濃縮 (omit)，再導出特性矩陣與負荷向量，並求解。

(3). 將梁視為兩個端點邊界元素，導其特性矩陣並求解。

以下一一說明於後。

懸臂梁受端彎矩負荷示意圖

(1). FEM

步驟一：元素勁度矩陣與元素負荷向量之推導

有限元素法的元素勁度推導方式，一般可分為直接勁度法、權餘法 (Weighted Residual Method) 與變分法。由於直接勁度法是直接由物理意義而來，對不一樣形式的問題導法就

不同，較難系統化，而權餘法涉及不同的權衡函數，亦難程式化。故最具一般性、最易程式化的方法應屬變分法。以下即以變分法推導有限元素法之一般式：

●首先假設元素內之變位場可以用結點未知量(a) 與內插函數(N) 表示如下

$$u(x) = \sum N_i a_i = Na \quad (1)$$

其中， $u(x)$ 表示元素變形場向量。 a 表示結點未知向量。

●由彈性力學可知變形與應變的關係如下

$$\epsilon = \mathcal{F}u \quad (2)$$

其中， ϵ 表示元素應變張量場， $\mathcal{F}$ 表示線性應變微分運算元。

以平面應力彈力問題為例，式(8.2) 可寫成

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial v / \partial y \\ (\partial u / \partial y + \partial v / \partial x) / 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial / \partial x & 0 \\ 0 & \partial / \partial y \\ (\partial / \partial y) / 2 & (\partial / \partial x) / 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (3)$$

●將式(8.1) 代入式(8.3)，可得變形與應變的關係式如下

$$\epsilon = \mathcal{F}u = \mathcal{F}(Na) = Ba \quad (4)$$

其中

$$B = \mathcal{F}N \quad (5)$$

●由材料組成律，可得應力與應變的關係式如下

$$\sigma = D\epsilon \quad (6)$$

其中， D 表示四階的組成律張量係數， σ 表示元素應力張量場。

以平面應力彈力問題為例，式(8.6) 可寫成

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad (7)$$

其中， E 表示楊氏係數， ν 表示包生比。

●將式(8.4) 代入式(8.6)，可得應力與結點未知量的關係式如下

$$\sigma = DBa \quad (8)$$

●該元素的勢能(Potential Energy) 可表成如下:

$$\begin{aligned} V &= U - W \\ &= 1/2 \int_V \epsilon^T \sigma dV - \int_S u^T p dS - \int_V u^T P dV - P_i a_i \end{aligned} \quad (9)$$

其中， U 表示結構體之應變能， W 表示外力所作的功， P 表示微體力(Body Force)， p 表示面曳引力(Traction)， P_i 表示施於結點的集中力， a_i 表示表結點未知量。

●將式(8.4) 與式(8.8) 代入式(8.9) 可得

$$V = 1/2 \int_V a^T B^T D B a dV - \int_S a^T N^T p dS - \int_V a^T N^T P dV - p_i a_i \quad (10)$$

●由趨向最低能量自然法則的變分原理

$$\frac{\partial V}{\partial a_i} = 0 \quad (11)$$

可求得有限元素法之一般線性代數方程式如下:

$$K^e u = Q^e \quad (12)$$

其中

$$K^e = \int_V B^T D B dV \quad (13)$$

$$Q^e = \int_S N^T p dS + \int_V N^T P dV + p_i \quad (14)$$

值得注意的是，以上僅就單一元素推導得其元素勁度矩陣 K^e 與元素負荷向量 Q^e ，當對整個結構考慮時，則需將所有離散的元素矩陣組合(Assemble) 起來，為使讀者了解此過程，本節將以梁元素為例，用變分法推導其元素勁度矩陣與元素負荷向量，並將結構分成兩個元素，以利全域矩陣之組合說明。

圖8.5 梁元素示意圖

如圖8.5 所示為一梁元素之自由體圖，上有分佈荷重 $p(x)$ ，左、右端之剪力分別為 Q_0, Q_1 ，左、右端之彎矩為 M_0, M_1 ，則全部勢位能 (Total Potential Energy) V 同式(8.9) 可寫成

$$V = U - W \quad (15)$$

由彈性力學知，梁元素在不考慮剪變形與軸向力時，其應變能與外功分別為

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx \quad (16)$$

$$W = \int_0^L p(x)y(x)dx + M_0 \left(\frac{dy}{dx} \right)_0 + M_1 \left(\frac{dy}{dx} \right)_1 + Q_0 y_0 + Q_1 y_1 \quad (17)$$

其中， E 表示梁材料之彈性模數， I 表示梁材料斷面慣性矩。由虛功原理知，在平衡狀態下，虛位移所產生之虛功為0，此點即是變分原理，若虛位移以數學式 δy 表示，而虛功以 δV 表示，則虛功原理的數學表示式為

$$\begin{aligned} \delta V = & \frac{1}{2} \int_0^L EI \delta \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 - \int_0^L p(x) \delta y(x) dx \\ & + M_0 \delta \left(\frac{dy}{dx} \right)_0 + M_1 \delta \left(\frac{dy}{dx} \right)_1 + Q_0 \delta y_0 + Q_1 \delta y_1 \end{aligned} \quad (18)$$

經部份積分可得

$$\begin{aligned} \delta V = & \int_0^L \left\{ \frac{d^2}{dx^2} [EI \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)] - p \right\} \delta y \, dx \\ & + [EI \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_1 + M_1] \delta \left(\frac{dy}{dx} \right)_1 \\ & - [EI \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_0 - M_0] \delta \left(\frac{dy}{dx} \right)_0 \\ & - [EI \frac{d}{dx} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_1 - Q_1] \delta y_1 \\ & + [EI \frac{d}{dx} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_0 - Q_0] \delta y_0 \\ = & 0 \end{aligned} \quad (19)$$

上式 $\left\{ \frac{d^2}{dx^2} [EI \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)] - p \right\}$ 為0 時，即是代表控制方程式。而第二、三、四、五列則分別代表對應邊界條件。

圖8.6 變位解與斜率解之變分函數示意圖

由結構力學與變分學的觀點而言， δy 、 $\delta(dy/dx)$ 分別代表平衡狀態下，變位解與斜率解之變分函數(Variational Function) 參見圖8.6，由此圖可看出基本邊界條件為

若 $y(L)$ 給定 $\rightarrow$ 則 $\delta y_1 = 0$

若 $y(0)$ 給定 $\rightarrow$ 則 $\delta y_0 = 0$

若 $y'(L)$ 給定 $\rightarrow$ 則 $\delta(dy/dx)_1 = 0$

若 $y'(0)$ 給定 $\rightarrow$ 則 $\delta(dy/dx)_0 = 0$

若以上四個基本邊界的位移與斜率條件沒給定的話，則該問題將有對應的自然邊界條件(Natural Boundary Condition) 如下

$$EI\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_1 = -M_1 \quad (20)$$

$$EI\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_0 = M_0 \quad (21)$$

$$EI\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_1 = Q_1 \quad (22)$$

$$EI\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_0 = -Q_0 \quad (23)$$

以上四式，和材料力學所定義之符號不同，乃歸因於一開始所定義之剪力彎矩正負符號就不同。

變分式為

$$\delta V = \int_0^L \left\{ \frac{d^2}{dx^2} [EI\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)] - p \right\} \delta y \, dx = 0 \quad (24)$$

就變分式 $\delta V = 0$ 而言，該式對任何 δy 變分量均成立，可導得控制方程式如下

$$\left\{ \frac{d^2}{dx^2} [EI\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)] - p \right\} = 0 \quad (25)$$

由以上結果可知解一微分方程式，相當於解一對應的變分問題。當我們將變位場 $y(x)$ 寫成

$$\begin{aligned} y &= A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + A_4 x^3 \\ &= N_1 \Phi_1 + N_2 \Phi_2 + N_3 \Phi_3 + N_4 \Phi_4 \\ &= \sum N_i \Phi_i \end{aligned} \quad (26)$$

其中， A_i 表示未知參數， N_i 表示內插函數。

Φ 表未知參數(其物理意義，請參考下面特例說明) 代入變分式，可得

$$\begin{aligned}\delta V &= \delta V(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4) = 0 \\ &= \frac{\partial V}{\partial \Phi_1} \delta \Phi_1 + \frac{\partial V}{\partial \Phi_2} \delta \Phi_2 + \frac{\partial V}{\partial \Phi_3} \delta \Phi_3 + \frac{\partial V}{\partial \Phi_4} \delta \Phi_4\end{aligned}\quad (27)$$

由於 $\delta \Phi_i$ 為任意，所以

$$\frac{\partial V}{\partial \Phi_i} = 0 \quad (28)$$

可導得

$$K\Phi = P \quad (29)$$

其中， K 即是元素勁度矩陣， P 即是元素負荷向量。

[特例說明]:

當吾人取 Φ_i 為梁元素兩端點的相關結點變形量如下時:

$\Phi_1 = y_0$ 表示元素左端點變位

$\Phi_2 = \theta_0$ 表示元素左端點旋轉角

$\Phi_3 = y_1$ 表示元素右端點變位

$\Phi_4 = \theta_1$ 表示元素右端點旋轉角

若取內插函數如下

$$N_1 = 2t^3 - 3t^2 + 1 \quad (30)$$

$$N_2 = (t^3 - 2t^2 + t)L \quad (31)$$

$$N_3 = -2t^3 + 3t^2 \quad (32)$$

$$N_4 = (t^3 - t^2)L \quad (33)$$

其中， $t = x/L$ ，參見下圖。

圖8.7 內插函數

以上內插函數之選取，是根據以下兩個原則決定：

(1) 對 N_1 與 N_3 變位內插函數而言，

$$N_i(t_j) = \delta_{ij}, \text{ 其中 } i = 1 \text{ 或 } 3, j = 1 \text{ 或 } 3$$

$$N'_i(t_j) = 0, \text{ 其中 } i = 1 \text{ 或 } 3, j = 1 \text{ 或 } 3$$

其中， $t_1 = 0, t_3 = 1$ 。

(2) 對 N_2 與 N_4 轉角內插函數而言，

$$N'_i(t_j) = L\delta_{ij}, \text{ 其中 } i = 2 \text{ 或 } 4, j = 2 \text{ 或 } 4$$

$$N_i(t_j) = 0, \text{ 其中 } i = 2 \text{ 或 } 4, j = 2 \text{ 或 } 4$$

其中， $t_2 = 0, t_4 = 1$ 。

有了以上兩原則後，此四內差函數所組成之變位場才會滿足在端點的變位與轉角為 $y_0, \theta_0, y_1, \theta_1$ 的關係。因此，式(8.26)中之 A_i, Φ_i ，將會有如下之轉換關係

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{L^3} \begin{bmatrix} L^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L^3 & 0 & 0 \\ -3L & -2L^2 & 3L & -L^2 \\ 2 & L & -2 & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \end{bmatrix} \quad (34)$$

將上式代入變分式，可得元素勁度矩陣與元素負荷向量分別為

$$K = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$P = \begin{bmatrix} \int_0^L N_1(x)p(x)dx \\ \int_0^L N_2(x)p(x)dx \\ \int_0^L N_3(x)p(x)dx \\ \int_0^L N_4(x)p(x)dx \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_0 \\ M_0 \\ Q_1 \\ M_1 \end{bmatrix} \quad (36)$$

上式等式右邊前者表示梁元素所受均佈外力產生的負荷向量，後者表示反力或內力的向量。而對應束制自由度之反力為未知，對應無束制自由度之負荷條件為已知。

因此吾人可導得 K^e — 梁元素之勁度矩陣與 P^e — 梁元素之負荷向量(Load Vector)。值得一提的是，以上均以元素座標系統為參考依據，當以全域座標考慮組合時，則本節導得之 K, P 矩陣需經座標轉換處理，有關細節將於下節說明。

步驟二：元素座標系統與全域座標系統之橋梁 — 轉換矩陣

前節已導出元素座標系統之勁度矩陣與負荷向量，但當全域座標系統與元素座標系統不相同時，如圖8.8 所示，為配合全域勁度矩陣與全域負荷向量之組合時，即需將各自由度針對上述兩座標系統做轉換矩陣之運算，以梁為例，說明如下

圖8.8 xyz 元素座標與 XYZ 全域座標系統示意圖

以 xyz 元素座標系統為參考座標系統，則元素自由度向量可以下式表示為

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ y_0 \\ \theta_0 \\ a_1 \\ y_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix}$$

其中，

a_0, a_1 表以 xyz 元素座標系統為參考座標系統之結點 軸向位移量

y_0, y_1 表以 xyz 元素座標系統為參考座標系統之結點 側向位移量

θ_0, θ_1 表以 xyz 元素座標系統為參考座標系統之結點 轉動量

以 XYZ 全域座標系統為參考座標系統，則元素自由度向量可以下式表示為

$$\begin{bmatrix} A_0 \\ Y_0 \\ \Psi_0 \\ A_1 \\ Y_1 \\ \Psi_1 \end{bmatrix}$$

其中，

A_0, A_1 表以 XYZ 元素座標系統為參考座標系統之結點 點軸向位移量

Y_0, Y_1 表以 XYZ 元素座標系統為參考座標系統之結點 點側向位移量

Ψ_0, Ψ_1 表以 XYZ 元素座標系統為參考座標系統之結點 點轉動量

由各自由度之物理意義可知，在不同座標系統之分量，滿足下式關係：

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ y_0 \\ \theta_0 \\ a_1 \\ y_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ Y_0 \\ \Psi_0 \\ A_1 \\ Y_1 \\ \Psi_1 \end{bmatrix} \quad (37)$$

其中， θ 為 xy 與 XY 座標系統之夾角，參見圖8.8。則向量轉換關係可簡寫成

$$v_{xyz} = TV_{XYZ} \quad (38)$$

至於勁度矩陣之轉換關係，則可利用能量不變量之二次關係式(Quadratic form) 求得如下：

$$K_{XYZ} = T^T K_{xyz} T \quad (39)$$

此即是高等結構學中所謂的同餘轉換定理。

步驟三：全域勁度矩陣與負荷向量之組合

從圖8.3 所示，可看出在建立元素勁度矩陣後，接著乃是全域勁度矩陣之組合。今吾人以一含兩個梁元素之懸臂梁承受端彎矩問題為例作說明，並且假設兩個梁元素斷面慣性矩均為 I ，材料性質為 E ，茲將本問題描述如下表

表8.5 有限元素法範例說明

(1) 全域勁度矩陣之組合

以上題為例，元素1，元素2 之勁度矩陣分別為

$$K_e^1 = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

$$K_e^2 = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

以上勁度矩陣均以元素座標系統為參考，若欲以全域座標系統為參考，則需以前節所述之

轉換矩陣予以同餘轉換，此時之 T 矩陣為

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

因此，若以全域座標為參考座標，則元素1，元素2 之勁度矩陣仍為

$$K_e^1 = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

$$K_e^2 = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

有了以上之全域座標為參考系統之元素勁度矩陣後，即可組成全域勁度矩陣如下

$$K_g = \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 12 + 12 & -6L + 6L & -12 & 6L \\ 6L & 2L^2 & -6L + 6L & 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

可整理得

$$K_g^g = \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 24 & 0 & -12 & 6L \\ 6L & 2L^2 & 0 & 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

由上述矩陣可看出，其為帶寬對稱矩陣，且有較大的對角項。

(2) 全域負荷向量之組合

由(8.36) 式之推導可得，元素1 之負荷向量。以此例而言， $p(x) = 0$ 所以元素1 之負

荷向量為

$$P_e^1 = \begin{bmatrix} \int_0^L N_1(x)p(x)dx \\ \int_0^L N_2(x)p(x)dx \\ \int_0^L N_3(x)p(x)dx \\ \int_0^L N_4(x)p(x)dx \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_0 \\ M_0 \\ Q_1 \\ M_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_0 \\ M_0 \\ Q_1 \\ M_1 \end{bmatrix}$$

再考慮元素間之力傳遞，可得元素2 之負荷向量為

$$P_e^2 = \begin{bmatrix} \int_0^L N_1(x)p(x)dx \\ \int_0^L N_2(x)p(x)dx \\ \int_0^L N_3(x)p(x)dx \\ \int_0^L N_4(x)p(x)dx \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -Q_1 \\ -M_1 \\ 0 \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Q_1 \\ -M_1 \\ 0 \\ M \end{bmatrix}$$

其中， $T = I$ (單位矩陣)，所以

$$P_g^1 = P_e^1$$

$$P_g^2 = P_e^2$$

由兩個元素負荷向量可組成全域負荷向量如下

$$P_g^g = \begin{bmatrix} Q_0 \\ M_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ M \end{bmatrix}$$

其中， Q_0 表示固定端未知反力， M_0 表示固定端未知彎矩， M 表示已知外力彎矩。

步驟四: 勁度矩陣之重整與分割(Partition)

由步驟三與步驟四已導得 $Ku = P$ 之代數方程式，在尚未考慮邊界條件時， K 矩陣為奇異的，因其含有自由剛體運動項。若欲去除此剛體運動項，則需加足夠對應剛體運動項數目之束制條件。若定義，”含於束制條件之自由度集合”稱為” s 集(s set)”，而”不含於束制條件之自由度”稱為” f 集(f set)”，即可將勁度矩陣重整如下

$$\begin{bmatrix} K_{ss} & K_{sf} \\ K_{fs} & K_{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_s \\ u_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_s \\ P_f \end{bmatrix} \quad (40)$$

可寫成

$$K_{ss}u_s + K_{sf}u_f = P_s \quad (41)$$

$$K_{fs}u_s + K_{ff}u_f = P_f \quad (42)$$

其中， u_s 表示含於束制條件之自由度集， P_s 表示對應 u_s 之未知反力集， u_f 表示不含於束制條件之自由度集， P_f 表示對應 u_f 之已知負荷集。

以上述例子而言

已知束制條件為

$$u_s = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (43)$$

未知反力為

$$P_s = \begin{bmatrix} Q_0 \\ M_0 \end{bmatrix} \quad (44)$$

未知變位為

$$u_f = \begin{bmatrix} U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} \quad (45)$$

已知負荷為

$$P_f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ M \end{bmatrix} \quad (46)$$

步驟五：邊界條件之引入

將表8.5 所示之邊界條件式(8.43) 代入式(8.42)，可得

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 24 & 0 & -12 & 6L \\ 0 & 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ M \end{bmatrix} \quad (47)$$

可解得

$$\begin{bmatrix} U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} = \frac{1}{6EI} \begin{bmatrix} 2L^3 & 3L^2 & 5L^3 & 3L^2 \\ 3L^2 & 6L & 9L^2 & 6L \\ 5L^3 & 9L^2 & 16L^2 & 12L^2 \\ 3L^2 & 6L & 12L^2 & 12L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ M \end{bmatrix} \quad (48)$$

配合式(8.43)，將所有自由度向量寫成

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ ML^2/2EI \\ ML/EI \\ 2ML^2/EI \\ 2ML/EI \end{bmatrix} \quad (49)$$

此解恰為正解。

步驟六：求元素之內力與束制條件之反力

由前節求得各自由度的量後，接著可求取元素之內力與束制條件之反力，這個步驟在執行過程稱為資料反算 (Data Recovery)。現以此梁問題為例說明如下

對元素1 而言，取自由體後，其平衡方程式如下

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_0 \\ M_0 \\ Q_1 \\ M_1 \end{bmatrix}$$

代入前節所求得式(8.49) 之自由度向量值，可求得反力

$$\begin{bmatrix} Q_0 \\ M_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -M \end{bmatrix}$$

及內力

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ M_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ M \end{bmatrix}$$

同理對元素2 而言，可得

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Q_1 \\ -M_1 \\ 0 \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -M \\ 0 \\ M \end{bmatrix}$$

以式(8.48) 求得之變位值恰能滿足上式，表示平衡條件吻合，若想直接由上式求出自由度值，再和式 (8.48) 比較是不可行的，因為元素勁度矩陣含有兩個為零的特徵值，所以元素勁度矩陣為奇異，不能求反矩陣。故上式僅供驗證。值得一提的是，第二元素之負荷向量是根據取自由體圖時，內力在結點二需與第一元素平衡所求出，故於此僅需作檢核。

步驟七：結果繪圖

前面已經將變位、剪力與彎矩均求出，茲將結果繪圖 8.9、8.10 與8.11 如下

圖8.9 變形圖

圖8.10 剪力圖(以材力定義符號為準)

圖8.11 彎矩圖(以材力定義符號為準)

以上所得結果均恰為正解。

(2). 若吾人將中間結點自由度濃縮掉(Omit)，則可導得僅以邊界自由度為參考自由度之勁度矩陣，說明如下

由全域勁度與全域負荷向量可知

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 24 & 0 & -12 & 6L \\ 6L & 2L^2 & 0 & 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_0 \\ M_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ M \end{bmatrix}$$

由上式，可將 $U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6$ 表成如下關係式

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} -12 & -6L & 24 & 0 & -12 & 6L \\ 6L & 2L^2 & 0 & 8L^2 & -6L & 2L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

可將 U_3, U_4 表成下式

$$\begin{bmatrix} U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & L/4 & 1/2 & -L/4 \\ -3/4L & -1/4 & 3/4L & -1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix}$$

經由靜態濃縮，可導得

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 3/2 & 3L/2 & -3/2 & 3L/2 \\ 3L/2 & 2L^2 & -3L/2 & L^2 \\ -3/2 & -3L/2 & 3/2 & -3L/2 \\ 3L/2 & L^2 & -3L/2 & 2L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ M \end{bmatrix}$$

代入 $U_1 = U_2 = 0$ ，可得

$$\begin{bmatrix} U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2ML^2/EI \\ 2ML/EI \end{bmatrix}$$

和方法(1) 得相同之結果。

(3). 邊界元素法解法

控制方程式: $dw(x)/dx = 0$

邊界條件: $w(0) = w'(0)$ ，端剪力 $S(2L) = 0$ ，端彎矩 $M(2L) = M$

本問題之邊界積分式可由控制方程經部份積分得

$$w(x) = \left\{ -G \frac{d^3 w}{ds^3} + \frac{dG}{ds} \frac{d^2 w}{ds^2} - \frac{d^2 G}{ds^2} \frac{dw}{ds} + \frac{d^3 G}{ds^3} w \right\} \Big|_{s=0}^{s=2L}$$

其中，

$$G(s, x) = \lambda(2l)^3(2 + |\rho|^3 - 3|\rho|^2)$$

$$\rho = r/2l, \quad r = |s - x|$$

$$\lambda = 1/(12EI)$$

$2l$ 為使得 $G(s, x)$ 為零之參考值，可取 $2l = 2L$ 。

定義

$$F(s, x) = \frac{dG(s, x)}{ds} \quad (50)$$

$$E(s, x) = \frac{-d^2 G(s, x)}{ds^2} \quad (51)$$

$$D(s, x) = \frac{d^3 G(s, x)}{ds^3} \quad (52)$$

可導得

$$\begin{bmatrix} w(2L) \\ w(0) \\ w'(2L) \\ w'(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S(2L) \\ S(0) \\ M(2L) \\ M(0) \end{bmatrix} \quad (53)$$

$$+ \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(2L) \\ w(0) \\ w'(2L) \\ w'(0) \end{bmatrix} \quad (54)$$

其中， A, B 矩陣之元素(Element) 係將 $G(s, x), E(s, x), F(s, x), D(s, x)$ 代入 $s = 0$ 與 $2L$ 之值。讀者可嘗試解之。並代入邊界條件後，即可求得和(1) 與(2) 相同之解。

討論：

- (1). 以上三種方法均可求得正解。
- (2). 方法(1) 與(2) 導得帶寬對稱矩陣，但方法(3) 則導得不對稱之全矩陣。
- (3). 方法(2) 將域內自由度濃縮後，僅剩邊界自由度為參考自由度，此元素可稱為超元素或次結構，此亦可稱邊界元素，因僅含邊界未知。
- (4). 方法(3) 亦僅以邊界自由度為參考自由度，但推導方式則與方法(2) 截然不同。

8.6 有限元素法與邊界元素法之聯用

有限元素法與邊界元素法已被廣泛使用於工程問題上，一般而論，各有千秋，各有其適用的問題，若欲發揮其最大效果，紅花配綠葉，則可以聯用來解決問題。為說明此點，特以兩例說明：

- (1). 結構流體互制分析，如下圖所示

圖8.12 結構流體互制分析示意圖

對無限域流體而言，可以邊界元素模擬。對有限域結構而言，可以有限元素模擬。請參考圖8.12。

- (2). 裂縫問題之應用

圖8.13 裂縫問題與網目分割圖

對含裂縫尖端之元素而言，可以邊界元素模擬。對不含裂縫尖端之元素而言，可以有限元素模擬，如圖8.13 所示。

為說明以上之觀念，以Laplace 方程為例，列式如下

[數學問題描述]

如圖8.14 所示，控制方程與邊界條件分述如下

$$-\nabla^2 u = f, \quad u = u_f \quad x \text{ in } \Omega_f$$

$$-\nabla^2 u = 0, \quad u = u_b \quad x \text{ in } \Omega_b$$

$$u = 0, \quad x \text{ on } \Gamma$$

圖8.14 問題描述圖

[使用FEM - BEM 聯用解法] 如圖8.15 所示， .

圖8.15 FEM-BEM 聯用示意圖

此問題之解題流程可歸納如下：

FEM-BEM 聯用之網目圖

(a). Ω_f 有限元素空間

$$-\nabla^2 u_f = f$$

$$u_f|_{\Gamma} = 0$$

$$\frac{\partial \bar{u}_f}{\partial n} = \sigma \text{ on } \Gamma_0$$

(b). Ω_b 邊界元素空間

$$-\nabla^2 u_b = 0$$

$$u_b^+ = \phi \text{ on } \Gamma_0$$

$$u_b^+ = O(1/r) \text{ as } r \rightarrow \infty$$

其中， Γ_0 由 f 之分佈區間所決定。

(c). 輔助邊界 Γ_0 需滿足

(1). 諧和條件

(2). 力平衡條件

綜合(a),(b),(c) 方可解出整個勢位場。本法的精神在於含非齊次項 f 之區間使用FEM，是因為若使用BEM，仍需進行二維網目分割，以進行 f 項的面積分。而無限域 Ω_b 則當以邊界元素來模擬。因此 Ω_b 與 Ω_f 的分界限在於 Γ_0 。

8.1 數值模型模擬的技巧

前面已就有限元素法與邊界元素的流程與理論作介紹，有了這種了解後，當我們用有限元素與邊界元素模型來模擬實際工程問題時，還需掌握以下十個原則：

- (1). 結點佈置原則：於FEM 模擬時，材料性質或斷面性質不同處需設置結點，另集中力作用點與束制點亦需設置結點。
- (2). 元素分佈疏密原則：於FEM 模擬時，若有材料性質、斷面性質或經工程判斷之應力會急遽變化之位置，則需以較密元素模擬。另分析者有興趣的部位亦可加密，例如於圓孔周邊之模擬時，欲達精確之模擬，360 度應分 24 個元素以上。

- (3). 特殊元素使用原則: 若能配合對解析解漸近行為之了解, 使用特殊元素, 可加速收斂。如在含裂縫之結構體分析時, 若使用裂縫尖端元素, 將比盲目使用很多傳統元素來得好。此元素可稱為奇異或超(singular or super) 元素。
- (4). 網目型態選取原則: 應以能傳遞勁度為考慮, 參見圖8.16 之說明。
- (5). 網目疏密承接原則: 網目大小應以漸變方式處理, 另應考慮界面間勁度與應力路徑之傳遞, 如圖8.17 所示。

圖8.16 網目型態選取準則

圖8.17 網目疏密承接示意圖

- (6). 元素外形原則: 元素長寬比(Aspect Ratio) 不宜太大, 最佳的型式應為方形或正三角形。根據學者經驗, 若大於7 則變位將不準; 若大於3, 應力結果將不準, 以 MSC/NASTRAN 程式而言, 若長邊方向應力變化不大的話, 長寬比在50 以內應無問題。對四邊形元素而言, MSC/NASTRAN 的建議是內角應在60 度以上, 勿小於45 度, 另翹曲角應小於 7 度。
 - (7). 模型完整性原則: 應盡量將真實結構各組件均模擬, 直覺上認為或許不受力桿件, 經分析後, 常有受力之情形發生。
 - (8). 掌握誤差原則: 如能在分析前先進行誤差分析, 可有系統的設計網目大小與掌握收斂程度。
 - (9). 邊界條件與負荷條件應盡量模擬真實狀況。
 - (10). 界面接觸原則: 於接觸問題之模擬時, 需考慮其張離、密合的情況。
- 以上十點, 僅提供作為工程分析模擬時的參考。

8.8 撰寫有限元素法與邊界元素法程式的注意事項數值模型

模擬的技巧與技巧

執行有限元素法與邊界元素法時，所需注意事項，除了前節所提的模式模擬的技巧外，尚有：

- (1). 座標系統之明確定義與掌握：一般常用之座標系統計有笛卡兒直角座標系統、圓柱座標系統與球座標系統與使用者自行建立之局部座標系統等四種。若依其用途可分成位移座標系統、元素座標系統、材料座標系統與全域座標系統。以上這些參考座標系統都與物理量轉換有關，如應力輸出的參考座標系統可為元素座標系統、材料座標系統或全域座標系統，此於程式設計時，均應小心謹慎地使用。
- (2). 自由度相依關係的掌握：自由度子集獨立或相依的關係於有限元素法的減縮過程中，佔著極重要的角色。比方說，在相依自由度上不可再加束制條件。
- (3). 誤差控制均與Norm Space 理論有關，因此加強理論的了解，將使你有更深入的認識。
- (4). 輸入資料卡中各位置所代表的物理意義及對應其他卡的關係，需確實了解，方能把握相關之影響。
- (5). 對於結構中若有勁度差異甚大的不同材質時，需考慮以Rigid Bar 束制條件模擬，以免造成 K 矩陣惡化(Ill Conditioned)，導致數值發散現象。同樣地，在處理近乎不可壓縮材料靜力分析或薄殼之結構分析問題時，亦應考慮膨脹勁度(Dilatation Stiffness)與扭曲勁度(Distorsion Stiffness) 的差異，予以降階積分來解決問題。值得注意的是，比如MSC/NASTRAN 在此方面，於固體元素中PSOLID 卡有此功能，並已成功地使用八結點固體元素克服了固體火箭推進劑近乎不可壓縮的應力分析問題。
- (6). 不同元素型態之接合時，若結點上的自由度數目不同時(如固體元素接梁元素或板元素)，需以能傳遞負荷原則，引入剛性元素(Rigid Element) 予以模擬。
- (7). 結果驗證與評估：當程式執行完後，一般均可以結構反應來研判其輸出結果的合理性，如變形的趨勢、應力集中的現象，反力平衡等。以上結果將有助於失效現象的探討與修改設計用。
- (8). 於程式設計時，自動檢核(Auto error message) 的回應將有助於往後使用者偵錯之參考。
- (9). 程式廣泛被使用的前提，必需是讓使用者用起來方便 (User friendly)，因此前後處理的資料輸入與輸出，可考慮以通用格式 (Universal format) 來傳輸，本文所附程式即以通用格式當成輸入格式，讀者可嘗試以通用格式寫出後處理資料。

8.9 結論

本章僅就有限元素法邊界元素法最基本的內容加以介紹，並以幾個簡例加以說明，以便讀者對有限元素法與邊界元素法有所認識，並對其流程有所了解，另有關BEM，FEM之聯用亦作了簡單的介紹。至於有限元素法與邊界元素法較複雜的應用方面，如振頻振模分析、頻率域反應分析、超元素(次結構)分析、挫曲分析與非線性分析等等則尚待讀者嘗試應用推廣，並比較兩種方法在各種問題的適用性，如此將更能掌握各類方法的精神。

8.10 參考文獻

- [8.1] O. C. Zienkiewicz, The Finite Element Method ,3rd ed., McGraw -Hill Company, New York, 1977.
- [8.2] Heubner and Thomton, The Finite Element Method for Engineers, Wiley-Interscience, New York, 1978.
- [8.3] Larry J. Segerlind, Applied Finite Element Analysis, John Wiley and Sons, New York, 1976.
- [8.4] Richard H. Gallagher, Finite Element Analysis Fundamentals, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1978.
- [8.5] O. C. Zienkiewicz and K. Morgan, Finite Elements and Approximation, Pineridge Press, 1983.
- [8.6] Gilbert Strang and George J. Fix, An Analysis of the Finite Element Method, Prentice-Hall, Inc., 1973.
- [8.7] J. N. Reddy, Introduction to the Finite Element Method, Science Typographers, Inc., 1984.
- [8.8] Harry G. Schaeffer, MSC/NASTRAN Primer Static and Normal Modes Analysis, Wallace Press, Inc, 1988.
- [8.9] MSC/NASTRAN Theoretical Manual.
- [8.10] MSC/NASTRAN Preliminary Theoretical Manual.
- [8.11] MSC/NASTRAN Application Notes, Section 8.

- [8.12] 陳正宗、林信立、韓文仁、邱垂鈺、秦無忝，MSC/NASTRAN 程式使用入門與工程應用，良宜出版社, 1989.
- [8.13] 陳正宗，MSC/NASTRAN 講義，教育部電算中心，1991。
- [8.14] 林信立、楊宗文、陳正宗，MSC/NASTRAN 程式在 Inertia Relief 功能應用，第一屆台灣NASTRAN 會議，1989,6,27.
- [8.15] 林信立、蔡宜璋、謝念中，MSC/NASTRAN 程式在線性黏彈材料之結構問題之應用，第一屆台灣MSC/NASTRAN 會議, 1989,6,27.
- [8.16] 李清國、林信立、邱垂鈺、陳正宗，MSC/NASTRAN 程式在求取應力強度因子的應用，第一屆台灣MSC/NASTRAN 會議,1989,6,27.
- [8.17] 陳正宗、林信立、邱垂鈺、全湘偉黃志勇、韓文仁與秦無忝有限元素分析與工程實例— MSC/NASTRAN 軟體應用，北門出版社, 1996.

————— 海大河工研究所陳正宗 對偶邊界元素法 —————

【存檔：e:/bemprimer/dbem8.te】 【建檔:Aug./01/'2006】