第 10 章

多倒易法在一維特徵值問題的應用

0.1　摘要

本文結合多倒易法與對偶邊界元素法針對一維的特徵值問題, 分別探討在四種不同的邊界條件下, 奇異方程 (UT) 與超奇異方程 (LM), 如何表現出互補的關係。在求解特徵值時, 我們發現於混合邊界條件的算例中, 若單由 UT 方程或 LM 方程解之, 特徵值將出現增根的現象; 必須聯合此兩種方法, 刪除使特徵模態為無意義解之特徵值, 方能確定真正的特徵值。特徵模態的尋求, 對於 Dirichlet 邊界條件的算例而言, 因 UT 方程所得之係數矩陣為零矩陣, 造成邊界模態不唯一, 若轉而由 LM 方程求解, 可獨立解得邊界模態, 而 Neumann 邊界條件的算例, 其情況恰好與 Dirichlet 邊界條件的算例相反。從本文的算例結果發現, 超奇異方程即使在簡單的一維問題中, 仍有其重要性。聯合倒易定理與對偶邊界元素法所得數值結果與解析解比較均非常吻合。

0.1　前言

在過去文獻中, 邊界元素法已廣泛應用在實際工程問題上。舉凡 Darcy 流場、穩態熱傳、電磁場、地下水滲流與彈性扭轉等問題。而對偶邊界元素法針對含有退化邊界 [1, 2, 3, 4, 5] 、角點[6]、外域[7]與自適性網格生成[8]等問題, 均需結合奇異方程 (UT) 與超奇異方程 (LM), 才能將問題迎刃而解。有關超奇異方程所扮演的角色可參照圖一所示。

以往有關 Helmholtz 方程之求解, 多半以複數基本解處理。為避免在複數域下求解, 也可將 Helmholtz 方程中含特徵值項視為 Laplace 方程之外力源, 但是當我們使用傳統邊界元素法, 此外力源以倒易定理將導得內域積分項, 因而使得在用邊界元素法求解時仍需對內域作離散, 如此將失去邊界元素法的優點。經過許多學者的研究後, 已有多種解決方案被提

出, 其中較為廣泛應用者為 Nowak 和 Brebbi 提出的多倒易法 MRM (Multiple Reciprocity Method) [9, 10]。多倒易法已成功地應用在二維與三維的 Helmholtz 方程。然而, 在一維特徵值問題是否可行, 並未見探討。雖然此法已應用在特徵值問題、流體力學與彈性力學等問題上, 但卻因都只用到奇異方程 (UT) 而已, 超奇異方程 (LM) 是否為求解的必要方程, 則未見討論。亦即此方程在多倒易法所扮演的角色為何並不明確, 此點正是本文所欲探討的主題。

本文將結合多倒易法與對偶邊界元素法, 藉由對一維特徵值問題的探討, 來瞭解超奇異方程在求解特徵值問題中所佔之地位。此兩種方法 (UT 與 LM 法) 與多倒易法的結合, 不僅保有邊界元素法只對邊界做離散的精神與優點, 同時也可看出對偶邊界元素法中的奇異式與超奇異式在求解一維特徵值所擁有的互補角色。文中以四個不同算例加以驗證。

◑.1 問題描述與理論推導

考慮一維特徵值問題, 其控制方程式如下:

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2}+\lambda u(x)=0 \tag{1}$$

其中, λ 與 $u(x)$ 分別表示特徵值與特徵函數。邊界條件則以四組算例分別描述如下

算例 1. $u(0)=0, u(1)=0$ (Dirichlet 邊界條件)

算例 2. $t(0)=0, t(1)=0$ (Neumann 邊界條件)

算例 3. $u(0)=0, t(1)=0$ (Robin 邊界條件)

算例 4. $u(1)=0, t(0)=0$ (Robin 邊界條件)

其中, $t(x_0)=\frac{du(x)}{dx}|_{x=x_0}$。引用輔助系統基本解形式如下：

$$\frac{d^2U(x,s)}{dx^2}=\delta(x-s) \tag{2}$$

其中 $U(x,s)$ 為基本解, 可表為

$$U(x,s)=\frac{1}{2}|x-s|=U^{(0)}(x,s) \tag{3}$$

由格林恆等式或倒易定理 (reciprocity theorem) 可知

$$\int_\Omega (u(x)\nabla^2U(x,s)-U(x,s)\nabla^2u(x))\ d\Omega=\int_\Gamma (u(x)\frac{\partial U(x,s)}{\partial n}-U(x,s)\frac{\partial u(x)}{\partial n})d\Gamma \tag{4}$$

其中, Ω 與 Γ 分別表示問題領域與邊界, n 表示邊界之法向量。取 $U(x,s)$ 為輔助系統, $u(x)$ 為欲解系統, 透過多倒易法簡化成一維問題時, 可推得下式

$$\int_0^1 \nabla^2 U^{(0)}(x,s)u(x)dx = \int_0^1 U^{(0)}(x,s)\nabla^2 u(x)dx + [u(x)\frac{dU^{(0)}(x,s)}{dx} - U^{(0)}(x,s)\frac{du(x)}{dx}]|_{x=0}^{x=1} \tag{5}$$

將 (5) 式等號右邊第一項的內域積分項再利用倒易定理可得下式：

$$\begin{aligned} D^{(0)} &= \int_0^1 U^{(0)}(x,s)\nabla^2 u(x)\,dx \\ &= \int_0^1 \nabla^2 U^{(1)}(x,s)b^{(0)}dx \\ &= \int_0^1 U^{(1)}(x,s)\nabla^2 b^{(0)}dx + [b^{(0)}\frac{dU^{(1)}(x,s)}{dx} - U^{(1)}(x,s)\frac{db^{(0)}}{dx}]|_{x=0}^{x=1} \end{aligned} \tag{6}$$

其中,

$$\nabla^2 U^{(1)}(x,s) = U^{(0)}(x,s)$$

$$b^{(0)} = \nabla^2 u(x) = -\lambda u(x)$$

將 (6) 式等號右邊第一項再利用倒易定理可得下式

$$\begin{aligned} D^{(1)} &= \int_0^1 U^{(1)}(x,s)\nabla^2 b^{(0)}\,dx \\ &= \int_0^1 \nabla^2 U^{(2)}(x,s)b^{(1)}dx \\ &= \int_0^1 U^{(2)}(x,s)\nabla^2 b^{(1)}dx + [b^{(1)}\frac{dU^{(2)}(x,s)}{dx} - U^{(2)}(x,s)\frac{db^{(1)}}{dx}]|_{x=0}^{x=1} \end{aligned} \tag{7}$$

其中,

$$\nabla^2 U^{(2)}(x,s) = U^{(1)}(x,s)$$

$$b^{(1)} = \nabla^2 b^{(0)} = -\lambda(\nabla^2 u(x)) = (-\lambda)^2 u(x)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

重複上述步驟, (5) 式的內域積分形式, 可等效轉成邊界量的級數型式

$$D^{(0)} = \sum_{j=0}^{N}[b^{(j)}\frac{dU^{(j+1)}(x,s)}{dx} - U^{(j+1)}(x,s)\frac{db^{(j)}}{dx}]|_{x=0}^{x=1} + R_{N+1} \tag{8}$$

則 $u(s)$ 場及 $t(s)$ 場可表成下式

$$\begin{aligned} u(s) = \{&u(x)T^{(0)}(x,s) - U^{(0)}(x,s)t(x) \\ &+ \sum_{j=0}^{N}[b^{(j)}T^{(j+1)}(x,s) - U^{(j+1)}(x,s)\frac{db^{(j)}}{dx}]\}|_{x=0}^{x=1} + R_{N+1} \end{aligned} \tag{9}$$

$$t(s) = \{u(x)M^{(0)}(x,s) - L^{(0)}(x,s)t(x) + \sum_{j=0}^{N}[b^{(j)}M^{(j+1)}(x,s) - L^{(j+1)}(x,s)\frac{db^{(j)}}{dx}]\}|_{x=0}^{x=1} + R'_{N+1} \tag{10}$$

其中, 核函數級數表示式列於表一, 其間關係可寫成如下

$$T^{(j+1)}(x,s) = \frac{dU^{(j+1)}(x,s)}{dx}$$
$$L^{(j+1)}(x,s) = \frac{dU^{(j+1)}(x,s)}{ds}$$
$$M^{(j+1)}(x,s) = \frac{\partial^2 U^{(j+1)}(x,s)}{\partial x \partial s}$$

而其他函數可分別寫成如下

$$b^{(j)}(x) = (-\lambda)^{(j+1)}u(x)$$
$$\frac{db^{(j)}(x)}{dx} = (-\lambda)^{(j+1)}u'(x)$$
$$R_{N+1} = \int_0^1 U^{(N+1)}(x,s)\nabla^2 b^{(n)}\,dx$$

上述 R_{N+1} 為可忽略之餘項。

當場點逼近到左右邊界時, 可導得 UT 式及矩陣形式可分列如下:

$$T_0\underset{\sim}{u} - U_0\underset{\sim}{t} = \sum_{i=1}^{N}(T_i(\lambda)\underset{\sim}{u} - U_i(\lambda)\underset{\sim}{t})$$

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} 1+T^{(0)}(0,0^+) & -T^{(0)}(1,0^+) \\ T^{(0)}(0,1^-) & 1-T^{(0)}(1,1^-) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u(0) \\ u(1) \end{Bmatrix} \\
&- \begin{bmatrix} U^{(0)}(0,0^+) & -U^{(0)}(1,0^+) \\ U^{(0)}(0,1^-) & -U^{(0)}(1,1^-) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} t(0) \\ t(1) \end{Bmatrix} \\
&= \textstyle\sum_{j=0}^{N} \begin{bmatrix} -(-\lambda)^{j+1}T^{(j+1)}(0,0^+) & (-\lambda)^{j+1}T^{(j+1)}(1,0^+) \\ -(-\lambda)^{j+1}T^{(j+1)}(0,1^-) & (-\lambda)^{j+1}T^{(j+1)}(1,1^-) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u(0) \\ u(1) \end{Bmatrix} \\
&- \textstyle\sum_{j=0}^{N} \begin{bmatrix} -(-\lambda)^{j+1}U^{(j+1)}(0,0^+) & (-\lambda)^{j+1}U^{(j+1)}(1,0^+) \\ -(-\lambda)^{j+1}U^{(j+1)}(0,1^-) & (-\lambda)^{j+1}U^{(j+1)}(1,1^-) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} t(0) \\ t(1) \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{11}$$

其中, $\underset{\sim}{u}$ 和 $\underset{\sim}{t}$ 為邊界量所組成的行向量。而 LM 式與矩陣式可分列如下：

$$M_0\underset{\sim}{u} - L_0\underset{\sim}{t} = \sum_{i=1}^{N}(M_i(\lambda)\underset{\sim}{u} - L_i(\lambda)\underset{\sim}{t})$$

$$\begin{bmatrix} M^{(0)}(0,0^+) & -M^{(0)}(1,0^+) \\ M^{(0)}(0,1^-) & -M^{(0)}(1,1^-) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u(0) \\ u(1) \end{Bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&-\begin{bmatrix} -1+L^{(0)}(0,0^+) & -L^{(0)}(1,0^+) \\ L^{(0)}(0,1^-) & -(1+L^{(0)}(1,1^-)) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} t(0) \\ t(1) \end{Bmatrix} \\
&=\textstyle\sum_{j=0}^{N}\begin{bmatrix} -(-\lambda)^{j+1}M^{(j+1)}(0,0^+) & (-\lambda)^{j+1}M^{(j+1)}(1,0^+) \\ -(-\lambda)^{j+1}M^{(j+1)}(0,1^-) & (-\lambda)^{j+1}M^{(j+1)}(1,1^-) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u(0) \\ u(1) \end{Bmatrix} \\
&-\textstyle\sum_{j=0}^{N}\begin{bmatrix} -(-\lambda)^{j+1}L^{(j+1)}(0,0^+) & (-\lambda)^{j+1}L^{(j+1)}(1,0^+) \\ -(-\lambda)^{j+1}L^{(j+1)}(0,1^-) & (-\lambda)^{j+1}L^{(j+1)}(1,1^-) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} t(0) \\ t(1) \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{12}
$$

將表一核函數的一般式代入 (11) 與 (12) 兩式中, 可分別得

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u(0) \\ u(1) \end{Bmatrix}-\begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} t(0) \\ t(1) \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & \sum_{j=0}^{N}\frac{1}{2}\frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+2)!} \\ \sum_{j=0}^{N}\frac{1}{2}\frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+2)!} & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u(0) \\ u(1) \end{Bmatrix} \\
&\qquad-\begin{bmatrix} 0 & \sum_{j=0}^{N}\frac{1}{2}\frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+3)!} \\ -\sum_{j=0}^{N}\frac{1}{2}\frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+3)!} & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} t(0) \\ t(1) \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{13}
$$

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u(0) \\ u(1) \end{Bmatrix}-\begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} t(0) \\ t(1) \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -\sum_{j=0}^{N}\frac{1}{2}\frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+1)!} \\ \sum_{j=0}^{N}\frac{1}{2}\frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+1)!} & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u(0) \\ u(1) \end{Bmatrix} \\
&\qquad-\begin{bmatrix} 0 & -\sum_{j=0}^{N}\frac{1}{2}\frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+2)!} \\ -\sum_{j=0}^{N}\frac{1}{2}\frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+2)!} & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} t(0) \\ t(1) \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{14}
$$

依給定四組邊界條件, 代入 (13) 式與 (14) 式中, 可得以下對偶邊界元素的八組矩陣表示式如下：

算例 1. 代入邊界條件 $u(0)=0$ 與 $u(1)=0$, 可得 UT 與 LM 之代數方程式如下

UT 方程

$$
\begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{2}(1+\sum_{j=0}^{N}\frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+3)!}) \\ \frac{1}{2}(1+\sum_{j=0}^{N}\frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+3)!}) & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} t(0) \\ t(1) \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{15}
$$

LM 方程

$$
\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}(1+\sum_{j=0}^{N}\frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+2)!}) \\ -\frac{1}{2}(1+\sum_{j=0}^{N}\frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+2)!}) & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} t(0) \\ t(1) \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{16}
$$

算例 2. 代入邊界條件 $t(0)=0$ 與 $t(1)=0$, 可得 UT 與 LM 之代數方程式如下

UT 方程

$$
\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2}(1+\sum_{j=0}^{N}\frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+2)!}) \\ \frac{-1}{2}(1+\sum_{j=0}^{N}\frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+2)!}) & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u(0) \\ u(1) \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{17}
$$

LM 方程

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{N}\frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+1)!} \\ -\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{N}\frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+1)!} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(0) \\ u(1) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{18}$$

算例 3. 代入邊界條件 $u(0)=0$ 與 $t(1)=0$, 可得 UT 與 LM 之代數方程式如下

UT 方程

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}(1+\sum_{j=0}^{N}\frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+2)!}) \\ \frac{1}{2}(1+\sum_{j=0}^{N}\frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+3)!}) & \frac{-1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t(0) \\ u(1) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{19}$$

LM 方程

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{-1}{2}\sum_{j=0}^{N}\frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+1)!} \\ \frac{1}{2}(1+\sum_{j=0}^{N}\frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+2)!}) & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t(0) \\ u(1) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{20}$$

算例 4. 代入邊界條件 $u(1)=0$ 與 $t(0)=0$, 可得 UT 與 LM 之代數方程式如下

UT 方程

$$\begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2}(1+\sum_{j=0}^{N}\frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+3)!}) \\ \frac{1}{2}(1+\sum_{j=0}^{N}\frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+2)!}) & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(0) \\ t(1) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{21}$$

LM 方程

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}(1+\sum_{j=0}^{N}\frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+2)!}) \\ -\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{N}\frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+1)!} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(0) \\ t(1) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{22}$$

◑.1 數值結果與討論

由式 (15)~(22) 所得的特徵方程式中, 若欲使未定邊界量有非零解, 則矩陣行列式值需為零, 才可得特徵值方程式, 此非線性方程, 採用半區間法, 予以搜尋, 求得特徵值後, 可進一步求得解特徵模態。為方便討論, 將四組算例的結果, 以七個表格加以說明, 其中表二到表五分別敘述了四組算例所得之特徵值級數方程式、邊界模態值、增根的現象與邊界模態值無法確定的原因。表六為四組算例之解析解, 表七與表八則敘述不同的特徵值級數方程式收斂情形。從表中所得結果可討論得以下四點：

1. 表二與表三為算例一與算例二之結果, 可知不論由 UT 或 LM 方程式均可獨立求得特徵值。算例一係給定 Dirichlet 條件, UT 方程的係數矩陣會出現零矩陣, 無法由 UT 決定模態, 若轉由 LM 方程來求解, 可獨立解出特徵值與特徵模態。同樣地, 當算例二給定 Neumann 條件時, 因 LM 方程出現零矩陣的關係, 亦能轉由 UT 方程來獨立求解。由此可看出奇異方程 UT 與超奇異方程 LM 間的對偶互補關係。

2. 算例三與算例四從表四與表五可知單由 UT 方程或 LM 方程均出現特徵值增根的情形, 唯有聯合此兩組方程式, 刪除使特徵模態為無意義解的特徵值後, 才能判定出真正的特徵值, 此點亦再度展現奇異方程 UT 與超奇異方程 LM 間的對偶互補關係。
3. 特徵值隨 MRM 法中所取級數項數的增加而收斂, 可從表一的核函數級數表示式, 可知級數的收斂速度。模態數越高時, 特徵值與特徵函數收斂越慢, 在算例一與算例二中, 其特徵值級數方程式, 有單一級數形式與雙級數形式兩種, 如表七與表八所示, 特徵值較高時, 收斂情況則以前者較佳。
4. 本文結合 MRM 與 DBEM 方法, 僅使用到四個邊界自由度, 其中兩個又為邊界條件所決定, 故未束制自由度僅有兩個, 而仍能求解較高模態數的特徵值與特徵函數, 此點為有限元素法所不能及, 亦為本方法的一大優點。
5. 四組算例的第一模態如圖二、圖三、圖四與圖五所示 , 可看出級數項數約五項時均已收斂, 而第一特徵值收斂效果亦非常快。

◑.1　結論

本文我們結合多倒易法與對偶邊界元素法, 建構一維特徵值問題的理論推導, 並進行數值計算, 結果發現對偶邊界元素法的超奇異方程, 扮演決定特徵值與特徵模態不可或缺的角色。文中四個算例已成功地驗證本文方法的可行性, 並與解析解比較, 結果相當吻合。

References

[1] H.-K. Hong, and J. T.Chen, Derivation of Integral equations in Elasticity, J. Eng. Mech. Div., ASCE, Vol.114, No.6, Em5, pp.1028-1044, 1988.

[2] 陳正宗與洪宏基，邊界元素法， 484 面，台北圖書，台北, 1992。

[3] J. T. Chen, On a Dual Integral Representation and Its Applications to Computational Mechanics, Ph.D. Dissertation, Department of Civil Engineering, National Taiwan University, 1994.

[4] J. T. Chen and H.-K. Hong, Boundary Element Analysis and Design in Seepage Flow Problems with Sheetpiles, Finite Elements in Analysis and Design, Vol.17, No.1, pp.1-20, 1994.

[5] J. T. Chen and H.-K. Hong, On the Dual Integral Representation of Boundary Value Problem in Laplace Equation, Boundary Element Abstracts, Vol.3, pp.114-116, 1993.

[6] J. T. Chen and H.-K. Hong, Dual Boundary Integral Equations at a Corner Using Contour Approach around Singularity, Advances in Engineering Softwares, Vol.21, No.3, pp.169-178, 1994.

[7] J. T. Chen, M. T. Liang and S. S. Yang, Dual Boundary Integral Equations for Exterior Problems, Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol.16, pp.333-340, 1996.

[8] M. T. Liang, J. T. Chen and S. S. Yang, Error Estimation for Boundary Element Method, Symposium on Industrial Applications and Recent Developments In Boundary Element Method, ASME Applied Mechanics and Material Meeting, Baltimore, 1996.

[9] A. J. Nowak and A.C. Neves eds., The Multiple Reciprocity Boundary Element Method, Comp. Publ. Publ., Southampton, 1994.

[10] A. J. Nowak and C. A. Brebbia, The Multiple Reciprocity Method — A New Approach for Transforming BEM Domain Integrals to the Boundary, Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol.6, No.3, pp.164-167, 1989.

Table 1: 一維核函數一般式 ($j = -1, 0, 1 \cdots$)

$U^{(j+1)}(x,s)$		$T^{(j+1)}(x,s)$		$L^{(j+1)}(x,s)$		$M^{(j+1)}(x,s)$	
$x > s$	$x < s$	$x > s$	$x < s$	$x > s$	$x < s$	$x > s$	$x < s$
$\frac{1}{2}\frac{\lvert r\rvert^{2j+3}}{(2j+3)!}$		$\frac{1}{2}\frac{\lvert r\rvert^{2j+2}}{(2j+2)!}$	$\frac{-1}{2}\frac{\lvert r\rvert^{2j+2}}{(2j+2)!}$	$\frac{-1}{2}\frac{\lvert r\rvert^{2j+2}}{(2j+2)!}$	$\frac{1}{2}\frac{\lvert r\rvert^{2j+2}}{(2j+2)!}$	$\begin{cases} \frac{-1}{2}\frac{\lvert r\rvert^{2j+1}}{(2j+1)!}, & j \geq 0 \\ 0, & j = -1 \end{cases}$	

Table 2: 給定 Dirichlet 條件下, 算例一之特徵方程式與邊界模態數值分析表

B.C.		Dirichlet prob.	
		$u(0) = 0, u(1) = 0$	
		UT	LM
解析解		$(n\pi)^2$	
0.4cm [0cm] λ	0.4cm [0cm] 吻合	$\sum_0^\infty \frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+3)!} = -1$	(a) $\sum_0^\infty \frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+2)!} = -2$ (b) $\sum_0^\infty \frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+2)!} = 0$
特徵向量{t(0),t(1) }		$\times$	$\{1,-1\}^{(a)}$ $\{1,1\}^{(b)}$
主因		零矩陣	

B.C.		Neumann prob.	
		$t(0)=0, t(1)=0$	
		UT	LM
解析解		$(n\pi)^2$	
0.4cm[0cm]λ	0.4cm[0cm] 吻合	(a) $\sum_0^\infty \frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+2)!}=-2$ (b) $\sum_0^\infty \frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+2)!}=0$	$\sum_0^\infty \frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+1)!}=0$
特徵向量{u(0),u(1)}		$\{1,-1\}^{(a)}$ $\{1,1\}^{(b)}$	$\times$
主因			零矩陣

B.C.		Robin(mixed) prob.	
		$u(0)=0, t(1)=0$	
		UT	LM
解析解		$(\frac{(2n-1)\pi}{2})^2$	
0.5cm[0cm]λ	吻合 (a)	$\sum_0^\infty \frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+2)!}=-1$	$\sum_0^\infty \frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+2)!}=-1$
	不合 (b)	$\sum_0^\infty \frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+3)!}=-1$	$\sum_0^\infty \frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+1)!}=0$
特徵向量{u(1),t(0)}		$\{(-1)^{n+1}, \frac{(2n-1)\pi}{2}\}$	$\{(-1)^{n+1}, \frac{(2n-1)\pi}{2}\}$

B.C.		Robin(mixed) prob.	
		$u(1)=0, t(0)=0$	
		UT	LM
解析解		$(\frac{(2n-1)\pi}{2})^2$	
0.5cm[0cm]λ	吻合 (a)	$\sum_0^\infty \frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+2)!}=-1$	$\sum_0^\infty \frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+2)!}=-1$
	不合 (b)	$\sum_0^\infty \frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+3)!}=-1$	$\sum_0^\infty \frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+1)!}=0$
特徵向量{u(0),t(1)}		$\{1, (-1)^n \frac{(2n-1)\pi}{2}\}$	$\{1, (-1)^n \frac{(2n-1)\pi}{2}\}$

算例	1	2	3	4
λ_n	$(n\pi)^2$	$(n\pi)^2$	$(\frac{(2n-1)\pi}{2})^2$	$(\frac{(2n-1)\pi}{2})^2$
$u_n(x)$	$Sin(n\pi x)$	$Cos(n\pi x)$	$Sin(\frac{(2n-1)\pi x}{2})$	$Cos(\frac{(2n-1)\pi x}{2})$
boundary mode $\left\{\begin{matrix} u(0) \\ u(1) \\ t(0) \\ t(1) \end{matrix}\right\}$	$\left\{\begin{matrix} 0^* \\ 0^* \\ 1 \\ (-1)^n \end{matrix}\right\}$	$\left\{\begin{matrix} 1 \\ (-1)^n \\ 0^* \\ 0^* \end{matrix}\right\}$	$\left\{\begin{matrix} 0^* \\ (-1)^{n+1} \\ \frac{(2n-1)\pi}{2} \\ 0^* \end{matrix}\right\}$	$\left\{\begin{matrix} 1 \\ 0^* \\ 0^* \\ (-1)^n\frac{(2n-1)\pi}{2} \end{matrix}\right\}$

*： Given homogeneous B.C.

	case 1(UT)			case 3, case 4			case 2 (LM)		
N	λ			λ			λ		
解析 λ	$(n\pi)^2$			$(\frac{(2n-1)\pi}{2})^2$			$(n\pi)^2$		
	$\sum_{j=0}^{j=N}\frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+3)!}=-1$			$\sum_{j=0}^{j=N}\frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+2)!}=-1$			$\sum_{j=0}^{j=N}\frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+1)!}=0$		
N=0	6.00			2.0			0		
N=1	10.62*			2.53	9.46		5.99		
N=2	9.47			2.46			0		
N=3	9.91	24.63		2.46	17.98		9.475		
N=4	9.87			2.46			9.915	24.63	
N=5	9.87	35.75		2.46	21.96		9.865		
N=6	9.87	41.17	50.49	2.46	22.23	46.26	9.87	35.74	
N=7	9.87	39.35	78.08	2.46	22.20		9.86	41.46	50.49
N=8	9.87	39.49		2.46	22.20		9.86	39.34	
N=9	9.87	39.47	88.94	2.46	22.20	58.85	9.86	39.49	74.08
N=10	9.87	39.47	89.14	2.46	22.20	62.39	9.86	39.47	
N=11	9.87	39.47	88.82	2.46	22.20	62.62	9.86	39.47	86.95
N=12	9.87	39.47	88.82	2.46	22.20	61.69	9.86	39.47	89.15
N=13	9.87	39.47	88.82	2.46	22.20	61.68	9.86	39.47	
N=14	9.87	39.47	88.82	2.46	22.20	61.68	9.86	39.47	
解析解	9.87	39.47	88.82	2.46	22.20	61.68	9.86	39.47	88.82

*：表示特徵級數最接近零的值

	case 1(LM), case 2(UT)				
J	λ			λ	
解析 λ	$(n\pi)^2$				
	$\sum_{j=0}^{j=N} \frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+2)!} = -2$			$\sum_{j=0}^{j=N} \frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+2)!} = 0$	
N=0	4.0			4.0*	
N=1	6.00			12	
N=2	7.58			7.58*	
N=3	9.48*			21.48	
N=4	9.52	10.30	31.70	9.53*	
N=5	9.87*			30.72	
N=6	9.85	50.35		9.87*	
N=7	9.86			37.07	46.59
N=8	9.87	67.14		9.87*	
N=9	9.87			37.07	46.59
N=10	9.87	80.36		9.87*	
N=11	9.87			39.18	88.52
N=12	9.87	87.05	132.78	9.87*	
N=13	9.87	88.54		39.48	136
N=14	9.87	88.54		39.48	
解析解	9.87	88.82	246	39.47	157.91

*：表示特徵級數最接近零的值

表目錄

表一：一維核函數一般式

表二：給定 Dirichlet 條件下, 算例一之特徵方程式與邊界模態數值分析表

表三：給定 Neumann 條件下, 算例二之特徵方程式與邊界模態數值分析表

表四：三給定 Robin 條件下, 算例三之特徵方程式與邊界模態數值分析表

表五：給定 Robin 條件下, 算例四之特徵方程式與邊界模態數值分析表

表六：四組算例之特徵值、特徵函數與邊界模態解析解

表七：取捨項數與特徵方程式收斂性關係表

表八：取捨項數與特徵方程式收斂性關係表

圖目錄

圖一：超奇異方程在計算力學中所扮演的角色

圖二：算例一第一特徵值與第一模態對項數之收斂關係圖

圖三：算例二第一特徵值與第一模態對項數之收斂關係圖

圖四：算例三第一特徵值與第一模態對項數之收斂關係圖

圖五：算例四第一特徵值與第一模態對項數之收斂關係圖

Table 3: 給定 Neumann 條件下, 算例二之特徵方程式與邊界模態數值分析表

Table 4: 給定 Robin 條件下, 算例三之特徵方程式與邊界模態數值分析表

Table 5: 給定 Robin 條件下, 算例四之特徵方程式與邊界模態數值分析表

Table 6: 四組算例之特徵值、特徵函數與邊界模態解析解

Table 7: 取捨項數與特徵方程式收斂性關係表

Table 8: 取捨項數與特徵方程式收斂性關係表