數學傳播 30卷1期, pp. 81-84

從解三次方程到構作正七邊形

曾健威 · 夏芷惠 · 黃奕妮

一. 引言

尺規作圖的問題早在古時已是數學家的研究題目, 當中包括構作正多邊形的問題。名數學家高斯在他19歲的時候提出能用尺規構作正多邊形的條件, 指出正七邊形是不可以用尺規來構作的, 而其他學者則指出正七邊形是可以用二刻尺 (即有兩個刻度的直尺) 和圓規來構作的 (參見 [2])。本文將會探討怎樣利用二刻尺和圓規去構作一個正七邊形。在探究的過程中, 我們發現若能以二刻尺和圓規去構作三次方程的解, 就能用二刻尺和圓規去構作正七邊形。因此本文會首先探討如何用二刻尺和圓規去構作三次方程的解, 繼而討論構作正七邊形的問題。同時, 本文亦爲曾健威的文章 [1]的延續。

二. 三次方程的一般解

讓我們重溫一下三次方程的一般解。設有三次方程式 $z^3+Az^2+pz+q=0$, 我們不妨假設第二個系數 A 等於0。(若果 A 不等於0, 可用未知數轉換 $y=z+\dfrac{A}{3}$。) 方程 $z^3+pz+q=0$ 的一般解爲 $z=u+v$, $z=u\alpha+v\alpha^2$ 和 $z=u\alpha^2+v\alpha$, 當中 $u=\sqrt[3]{\dfrac{-q}{2}+\sqrt{\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}}}$, $v=\sqrt[3]{\dfrac{-q}{2}-\sqrt{\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}}}$ 和 $\alpha=\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}$。

三. 二刻尺的用處 — 角三分法、開三次方根法和構作三次方程的解

從上一節, 我們知道只要有角三分法和開三次方根法就能夠把三次方程的解構作在複數平面上。在文章 [1], 作者已介紹過阿基米德的角三分法。故此以下只介紹尼高米迪斯 (Nicomedes, 公元前250年) 的開三次方根法。

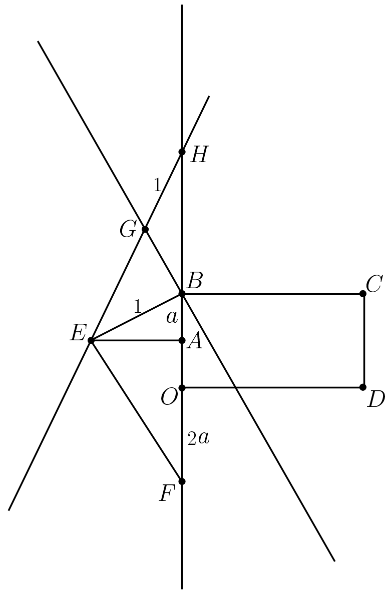
尼高米迪斯的開三次方根法:

開三次方根的問題又稱提洛問題, 也是幾何三大問題之一, 源於倍立方問題。而倍立方問題的起源, 則有不同的說法, 但大都是與建築有關的。

關於提洛問題, 尼高米迪斯有以下的命題:

有一可構作的長度 a, 用二刻尺和圓規可找出 $\sqrt[3]{a}$。(證明參見 [2])

以下是尼高米迪斯的構作:



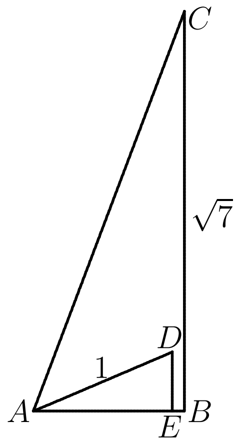
圖一. 尼高米迪斯的開三次方根

在圖一中, 我們先設二刻尺兩個刻度間的長度爲1單位而 $a<1$。首先作一長方形 $ODCB$, 邊長分別爲 $|OB|=2a$ 及 $|OD|=2$。設點 A 爲線段 BO 上的一點使 $|BA|=|AO|$。在這一點上作一條垂直於 OB 的線, 然後在這垂直線上找出一點 E, 使長度 $|BE|$ 爲二刻尺刻度之間的距離, 即長度等於1單位。將線段 BO 向上下延伸, 在該下延線上作點 F 使 $|OF|=2a$。連起線段 EF。現構作一直線 l 平行於線段 EF 且穿過點 B。最後構作線段 EH , 使點 H 在線段 BO 的上延線上, 並使點 H 與線段 EH 和直線 l 的交點 G 的距離等於二刻尺刻度之間的距離, 即1單位。由此得線段 HB , 其長度則爲 $2\sqrt[3]{a}$。

以下, 我們用一個例子來說明構作三次方程的根的方法:

例子: $z^3-6z-2=0$ 的其中一個解爲 $z=\sqrt[3]{1+\sqrt{7}i}+\sqrt[3]{1-\sqrt{7}i}$。我們不難發現 $\sqrt[3]{1+\sqrt{7}i}+\sqrt[3]{1-\sqrt{7}i}=2(\sqrt{8})^{\frac{1}{3}}\cos\dfrac{\tan^{-1}\sqrt{7}}{3}=2\sqrt{2}\cos\dfrac{\tan^{-1}\sqrt{7}}{3}$。現在可透過以下步驟構作出 $\cos\dfrac{\tan^{-1}\sqrt{7}}{3}$。

首先構作一直角三角形 ABC, 使它符合條件 $|AB|=1$, $|CB|=\sqrt{7}$ 和 $AB\perp BC$。接著將 $\angle CAB$ 三分。再在角三分線上找出點 D, 使 $|AD|=1$ (即 $\angle DAB=\frac{1}{3}\angle CAB$)。然後把點 D 投射於直線 AB 上得到點 E, 得 $|AE|=\cos\frac{\tan^{-1}\sqrt{7}}{3}$.

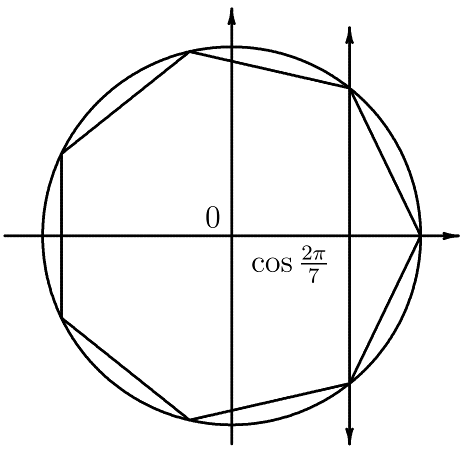


圖二. $\cos\frac{\tan^{-1}\sqrt{7}}{3}$ 的構作

由於我們可用尺和圓規構作長度 $2\sqrt{2}$, 所以我們可利用二刻尺和圓規構作出 $2\sqrt{2}\cos\frac{\tan^{-1}\sqrt{7}}{3}$。

四. 正七邊形的構作

現在我們可從一個單位圓開始, 構作一個正七邊形。若要構作一個正七邊形於單位圓上, 只須構作長度 $\cos\frac{2\pi}{7}$, 因爲此長度可用來找出正七邊形的頂點。



圖三. 在單位圓上的正七邊形

我們知道 $x_1=\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}$ 是 $x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$ 的其中一個根。設 $\omega=x_1+x_1^{-1}=2\cos\frac{2\pi}{7}$。透過簡單的運算, 我們知道 ω 符合三次方程 $\omega^3+\omega^2-2\omega-1=0$。而從三次方程的一般解公式得出

$$\omega=\frac{1}{3}\Big(\sqrt{28}\cos\frac{\tan^{-1}3\sqrt{3}}{3}-1\Big).$$

透過第三節介紹的方法, 我們可構作出 $\omega=2\cos\frac{2\pi}{7}$ 的長度, 繼而構作出正七邊形。讀者可用我們提供的方法構作一個正七邊形作爲一個練習。

五. 總結和未解決的問題

(1) 史創立博士指出在學者 Gleason 發表的一篇文章中 (參見 [3]), Gleason介紹了一個構作正七邊形的方法。他的方法正與本文第四節的構作方法相同。本文提出了構作正七邊形的發展過程, 和當中與三次方程一般解的關係, 故此本文可作爲 Gleason 的文章的一個補充。

(2) 我們可否利用二刻尺和圓規將任意一隻角五分呢? 我們猜測答案是不可能的, 但甚麼角度可被五分呢? 此問題可引伸出下一條問題。

(3) 假設有一個角五分法, 已知可用這角五分法, 加上尺和圓規構作一個正十一邊形 (參見 [3])。試找出該構作。

以上兩條問題, 是 [2]中的問題7.1和7.3的另一個版本。讀者可試用本文的方法去看看能否解決其他在 [2]中的未解決的問題。

參考文獻

1. 曾健威 (2005), 未解決的構圖問題–給學生的一個介紹, 數學傳播, 第二十九卷, 第二期, 26-29。
2. Aruthur Baragar (2002), Constructions Using a Compass and Twice-Notched Straightedge, *American Mathematical Monthly*, 109(2), 151-164
3. Andrew M. Gleason(1988), Angle Trisection, the Heptagon, and the Triskaidecagon, *American Mathematical Monthly*, 95(3), 185-194.

—本文第一位作者任教於香港教育學院數學系, 而另外兩位作者是在香港教育學院主修數學教育的本科生。—