從柯西積分公式談起

程守慶

I. 柯西積分公式 (Cauchy integral formula)

在大學的單複變課程裡, 通常我們說在複平面 $\mathbb{C}$ 上, 一個定義在域 D (domain) 的 C^1 函數 $f(z)=u(z)+iv(z)$, $z=x+iy$, 是解析函數 (holomorphic function), 假如 f 滿足所謂的柯西–黎曼方程 (Cauchy-Riemann equation) 如下:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},\quad \forall z\in D. \tag{1.1}$$

由此, 我們就可以得到許多關於 f 的很好性質。單複變分析的發展, 亦於焉開始。

爲了方便起見, 我們引進如下之一階偏微分算子 (first order partial differential operator):

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}}=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\Big). \tag{1.2}$$

經由直接的運算, 我們得到

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\Big)+\frac{i}{2}\Big(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\Big).$$

換句話說, 一個 C^1 函數 f 是解析函數, 亦即 f 滿足 (1.1) 的充分且必要條件爲

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}=0. \tag{1.3}$$

從這樣的一個觀點來看, 我們可以發現在單複變分析的領域裡, 最主要的一個課題其實就是在了解 $\overline{\partial}$–方程 (1.3) 的解的行爲; 也就是說, 給定一個函數 g, 我們如何去得到及研究一個解 f 使得

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}=g. \tag{1.4}$$

當 $g\equiv 0$ 時, 此時的解就是所謂的解析函數。所以接著我們就要先來看看如何解 $\overline{\partial}$–方程 (1.4)。在此之前, 我們可以利用 (1.2) 中所引進的算子, 經由一個基底的轉換, 把任何 C^1 函數 f 的 1–形式 (1-form) 做如下的改寫

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=\frac{\partial f}{\partial z}dz+\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}d\overline{z}.$$

這裡 $\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y})$, $dz=dx+idy$。由此, 亦可看出一個函數 f 是解析函數的充分且必要條件就是 f 的 1–形式 df 是由 dz 所生成的。

現在, 我們開始證明柯西積分公式。

定理 1.5: 假設 D 是 $\mathbb{C}$ 上一個具有 C^1 邊界的有界域 (bounded domain)。則對於任何一個 $g\in C^1(\overline{D})$ 的函數, 我們有如下的表現

$$g(z)=\frac{1}{2\pi i}\Big(\int\limits_{bD}\frac{g(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta+\iint\limits_{D}\frac{\frac{\partial g}{\partial\overline{\zeta}}}{\zeta-z}d\zeta\wedge d\overline{\zeta}\Big), \tag{1.6}$$

其中 z 爲 D 上之任意點。

證明: 這個定理的證明主要是 Stokes 定理的一個簡單應用。對於任何一點 $z\in D$, 我們考慮一個挖掉以 z 爲圓心, 半徑爲一很小正數 ε 的域 $D_\varepsilon=D\backslash\overline{B}(z;\varepsilon)$, 其中 $B(z;\varepsilon)=\{\zeta\in\mathbb{C}\big|\ |\zeta-z|<\varepsilon\}$。利用 Stokes 定理, 可以把邊界 bD_ε 上的線積分轉換成 D_ε 上的積分, 而得到

$$\int\limits_{bD}\frac{g(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\int\limits_{bB_\varepsilon}\frac{g(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\int\limits_{bD_\varepsilon}\frac{g(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\iint\limits_{D_\varepsilon}d\Big(\frac{g(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\Big)=\iint\limits_{D_\varepsilon}\frac{\frac{\partial g}{\partial\overline{\zeta}}}{\zeta-z}d\overline{\zeta}\wedge d\zeta.$$

當 $\varepsilon\to 0$ 時, 不難看出每一項都會收斂。因此 (1.6) 就得證。

由定理 1.5 可以很快的得到一個簡單推論, 就是如果 g 是 D 上的一個解析函數, 則函數 g 就可由 g 的邊界值對柯西核 (Cauchy kernel), $\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{\zeta-z}$, 在邊界上積分而得到。這樣也間接地說明了解析函數是可以由冪級數 (power series) 來表現的。

以下我們將假設 D 是 $\mathbb{C}$ 上的一個有界域, 同時具有 C^1 邊界和連通的 (connected) 補集 $\mathbb{C}\backslash D$。對於任意 $f\in C^k(\overline{D})$, $k\in\mathbb{N}$, 我們定義

$$u(z)=\frac{1}{2\pi i}\iint\limits_{D}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\wedge d\overline{\zeta},\quad\forall z\in\mathbb{C}. \tag{1.7}$$

下面的定理說明由 (1.7) 所定義出來的函數 $u(z)$ 就可以用來解 $\overline{\partial}$–方程 (1.4)。

定理 1.8: D 爲 $\mathbb{C}$ 上一個有界域如上所述。假設 $f\in C^k(\overline{D})$, $k\in\mathbb{N}$, 並且定義 $u(z)$ 如 (1.7), 則我們有

(i) $u\in C^k(D)$ 且在 D 上 $\frac{\partial u}{\partial\overline{z}}=f$,

(ii) u 的支集 (support) 包含於 $\overline{D}$ 的充分且必要條件爲

$$\iint\limits_{D}f(\zeta)\zeta^m d\zeta\wedge d\overline{\zeta}=0,\quad\forall m\in\{0\}\cup\mathbb{N}. \tag{1.9}$$

證明: 在 (i) 的證明中, 我們先假設 $f\in C_0^k(\mathbb{C})$, 則

$$\begin{aligned} u(z) &= \frac{1}{2\pi i}\iint\limits_{\mathbb{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta\wedge d\overline{\zeta} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\iint\limits_{\mathbb{C}} \frac{f(\eta+z)}{\eta} d\eta\wedge d\overline{\eta}. \end{aligned}$$

由此, 可以容易看出 $u\in C^k(\mathbb{C})$。此時, 如果我們選一條封閉的 C^1 路徑 Γ 使得其內部 D 包含 f 的支集, 則利用定理 1.5, 當 $z\in D$ 時, 我們可以得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \overline{z}} &= \frac{1}{2\pi i}\iint\limits_{\mathbb{C}} \frac{\frac{\partial f}{\partial \overline{\eta}}(\eta+z)}{\eta} d\eta\wedge d\overline{\eta} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\iint\limits_{\mathbb{C}} \frac{\frac{\partial f}{\partial \overline{\zeta}}}{\zeta - z} d\zeta\wedge d\overline{\zeta} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\Big(\int\limits_{D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \iint\limits_{D} \frac{\frac{\partial f}{\partial \overline{\zeta}}(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta\wedge d\overline{\zeta}\Big) \\ &= f(z). \end{aligned}$$

這樣就得到 (i) 在此特殊情形下的證明。對於一般的情形, 我們選取一個無窮平滑 (smooth) 的切割函數 χ (cut-off function) 使得 $\chi\in C_0^\infty(D)$ 且 $\chi\equiv 1$ 在 z 的一個很小的開鄰域 U (open neighborhood) 上, 所以

$$\begin{aligned} u(z) &= \frac{1}{2\pi i}\iint\limits_{D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta\wedge d\overline{\zeta} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\iint\limits_{D} \frac{(\chi f)(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta\wedge d\overline{\zeta} + \frac{1}{2\pi i}\iint\limits_{D} \frac{((1-\chi) f)(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta\wedge d\overline{\zeta} \\ &= u_1(z) + u_2(z). \end{aligned}$$

很容易地可以看出 u_2 爲 U 上之一解析函數, 而 u_1 可以上面的方式來討論, 因而, 當 $z\in U$ 時,

$$\frac{\partial u}{\partial \overline{z}}(z) = \frac{\partial u_1}{\partial \overline{z}}(z) + \frac{\partial u_2}{\partial \overline{z}}(z) = (\chi f)(z) + 0 = f(z).$$

(i) 的證明就全部完成。

至於 (ii) 的證明, 首先我們注意到 u 在 $\mathbb{C}$ 上是連續的, 並且在 $\mathbb{C}\backslash\overline{D}$ 上爲解析的。因此, 如果 (1.9) 式成立的話, 當 $|z|>|\zeta|$ 對於所有 $\zeta\in\overline{D}$ 都對時, 我們有

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i}\iint\limits_{D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta\wedge d\overline{\zeta}$$

$$= \frac{-1}{2\pi i}\sum_{m=0}^{\infty}\Big(\iint\limits_{D} f(\zeta)\zeta^m d\zeta\wedge d\overline{\zeta}\Big)z^{-m-1}$$
$$= 0.$$

所以由解析函數的恆等定理 (identity theorem), 當 $z\in\mathbb{C}\backslash\overline{D}$, 我們得到 $u(z)\equiv 0$。

反過來說, 假如 u 的支集包含於 $\overline{D}$, 則由上面的討論亦很容易推得 (1.9) 式必須要成立。定理 1.8 的證明即告完成。

定理 1.8 很清楚的指出, 一般而言, 在 $\mathbb{C}$ 上對於 $\overline{\partial}$–方程 (1.4), 我們是無法得到一個解 u 使得它的支集是緊緻的 (compact)。在第二、三節裡, 我們將利用單複變上的柯西積分公式, 來探討多複變 (several complex variables) 上的一些基本問題。

II. Hartogs 延拓定理 (Hartogs extension theorem)

現在我們讓 D 是多元複變空間 $\mathbb{C}^n$, $n\geq 2$, 上的一個域, D 上的點記爲 $z=(z_1,\ldots,z_n)$, $z_j=x_j+iy_j$, $1\leq j\leq n$。我們說 D 上一個 C^1 函數 $f(z)$ 爲解析函數, 如果 $f(z)$ 對每一個變數都是解析的, 亦即, f 滿足下面的方程式

$$\frac{\partial f}{\partial\overline{z}_j}=0,\quad 1\leq j\leq n. \tag{2.1}$$

這裡 $\frac{\partial}{\partial\overline{z}_j}=\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_j}+i\frac{\partial}{\partial y_j})$。$D$ 上所有解析函數所形成的函數空間, 我們將之記爲 $O(D)$。

因此, 在多複變分析領域裡, 很自然地, 我們就必須考慮下面的 $\overline{\partial}$–方程組, 稱爲柯西–黎曼方程; 也就是說, 給定函數 $f_1,\ldots,f_n$, 我們要找一個函數解 u 使得

$$\frac{\partial u}{\partial\overline{z}_j}=f_j,\quad 1\leq j\leq n. \tag{2.2}$$

當 $f_j\equiv 0$ 時, $1\leq j\leq n$, (2.2) 的解就是所有的解析函數。由於 $n>1$, 這樣的方程組顯然是過度確定的 (overdetermined)。所以, 在一般的情形下, (2.2) 顯然是無解的, 除非先前給定的函數 f_j 滿足某些特定的必要條件。如果在 D 上存在一個 C^2 的解 u 滿足 (2.2), 則馬上可以得到

$$\frac{\partial f_k}{\partial\overline{z}_j}=\frac{\partial f_j}{\partial\overline{z}_k},\quad 1\leq j,\ k\leq n. \tag{2.3}$$

因此, (2.3) 是我們解 $\overline{\partial}$–方程 (2.2) 的一個必要條件。下面的定理說明, 事實上, (2.3) 也是解 (2.2) 的一個充分條件。但更值得注意的是, 在 $n>1$ 時, 若 f_j 有緊緻支集, 則我們也可以得到一個具有緊緻支集的解 u。

定理 2.4: 假設 $f_j \in C_0^k(\mathbb{C}^n)$, $n \geq 2$, $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq n$ 且 f_j 滿足條件 (2.3)。則存在一個函數 $u \in C_0^k(\mathbb{C}^n)$ 滿足 (2.2)。同時, u 在 $\mathbb{C}^n \backslash (\cup_j \text{ supp } f_j)$ 的無界分支域 (unbounded component) 上恆爲零。這裡 supp f_j 記爲 f_j 的支集。

證明: 利用在第一節中 (1.7) 所得到關於 $\overline{\partial}$–方程 (1.4) 的解, 我們定義

$$\begin{aligned} u(z) &= \frac{1}{2\pi i} \iint\limits_{\mathbb{C}} \frac{f_1(\zeta, z_2, \ldots, z_n)}{\zeta - z_1} d\zeta \wedge d\overline{\zeta} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \iint\limits_{\mathbb{C}} \frac{f_1(\eta + z_1, z_2, \ldots, z_n)}{\eta} d\zeta \wedge d\overline{\zeta}. \end{aligned}$$

因此, 很容易得到 $u \in C^k(\mathbb{C}^n)$。接著由定理 1.8, 我們首先有

$$\frac{\partial u}{\partial \overline{z}_1} = f_1.$$

至於 $j > 1$ 時, 則利用條件 (2.3), 亦可證得

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \overline{z}_j} &= \frac{1}{2\pi i} \iint\limits_{\mathbb{C}} \frac{\frac{\partial f_1}{\partial \overline{z}_j}(\zeta, z_2, \ldots, z_n)}{\zeta - z_1} d\zeta \wedge d\overline{\zeta} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \iint\limits_{\mathbb{C}} \frac{\frac{\partial f_j}{\partial \overline{\zeta}}(\zeta, z_2, \ldots, z_n)}{\zeta - z_1} d\zeta \wedge d\overline{\zeta} \\ &= f_j. \end{aligned}$$

所以, u 滿足 $\overline{\partial}$–方程 (2.2)。另外由 u 的定義我們也知道 u 在 $\mathbb{C}^n \backslash (\cup_j \text{ supp } f_j)$ 的無界分支域上爲解析的。更進一步, 當 $|z_2| + \cdots + |z_n|$ 很大時, 因爲 $f_j \equiv 0$, $1 \leq j \leq n$, 我們得到 $u(z) \equiv 0$。是以根據解析函數的恆等定理, $u(z) \equiv 0$ 在 $\mathbb{C}^n \backslash (\cup_j \text{ supp } f_j)$ 的無界分支域上。定理 2.4 也因此得證。

有了定理 2.4 之後, 我們回過頭來看多複變裡所謂的 Hartogs 延拓定理。首先, 我們檢視複平面 $\mathbb{C}$ 上的一個亞純函數 (meromorphic function) $f(z) = \frac{1}{z}$。這個函數在零點有一個一階的極點 (pole), 也因此 f 是無法解析延拓 (holomorphic continuation) 到整個複平面。然而, 很奇特地, 在多複變裡如此的現象, 並不復存在。大致上說, 在多複變裡, 假如有一函數在一緊緻集的外圍是解析的, 那麼它一定可以解析延拓到這整個緊緻集上。底下我們就證明這樣子的一個結果。

定理 2.5 (Hartogs 延拓定理): 假設 D 是 $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, 中的一個有界域, 同時 K 是 D 上的一個緊緻子集使得 $D \backslash K$ 爲連通的。則任意一個定義在 $D \backslash K$ 上的解析函數, 都可以解析延拓到整個 D 上。

證明: 首先我們選一個切割函數 $\chi \in C_0^\infty(D)$ 使得 $\chi \equiv 1$ 在 K 的一個開鄰域上。如果 $g \in O(D\backslash K)$, 則很容易可以看出 $f_j = -g\frac{\partial\chi}{\partial\bar{z}_j}$, $1 \le j \le n$, 滿足條件 (2.3) 且具有緊緻支集。所以, 根據定理 2.4, 存在一個函數 $u \in C_0^\infty(\mathbb{C}^n)$ 使得

$$\frac{\partial u}{\partial\bar{z}_j} = -g\frac{\partial\chi}{\partial\bar{z}_j}, \quad 1 \le j \le n,$$

並且在 $\mathbb{C}^n\backslash D$ 的一個鄰域上 $u(z) \equiv 0$。所以

$$G = (1-\chi)g - u$$

就是由 g 所延拓而得到在 D 上的一個解析函數。定理 2.5 的證明也就完成了。

III. 解析域 (domain of holomorphy)

在這一節當中, 我們也將利用柯西積分公式來對多複變上的解析域做一些探討。首先我們做如下的定義。

定義 3.1: 假設 D 是 $\mathbb{C}^n$, $n \ge 1$, 上的一個域。我們說 D 是一個解析域 (domain of holomorphy), 如果在 D 上存在一個解析函數使得任何一個 D 上的邊界點 (boundary point) 都是它的奇異點 (singular point); 換言之, 在 D 上存在一個解析函數, 它是無法經由解析延拓跨過任何邊界點。

因此, 一個 $\mathbb{C}^n$ 上的域如果是解析域的話, 那麼它就是某一個解析函數的最大定義域。在單複變裡, 這是對的。也就是說, 任何複平面 $\mathbb{C}$ 上的一個域 D 都是解析域。因爲, 若 $p \in bD$ 爲邊界上的一個點, 則 $g(z) = \frac{1}{z-p}$ 就是一個 D 上的解析函數, 且 g 有一個奇異點在 p。至於要構造一個在整個邊界 bD 都奇異的解析函數, 方法之一是應用 Weierstrass 分解定理 (Weierstrass factorization theorem)。但是在這裡我們要以一個不同的方式來構造如此的一個解析函數。這樣的看法有助於探討多複變上的情形。

定理 3.2: 若 D 是 $\mathbb{C}$ 上的一個域, 則 D 是一個解析域。

定理 3.2 的證明需要用到下面一個關鍵的結果。

定理 3.3: 假設 K 是 $D \subseteq \mathbb{C}$ 上的一個緊緻子集且 $z_0 \in D\backslash K$。如果 $D\backslash K$ 上包含 z_0 的分支域 (component) 不會相對緊緻 (relatively compact) 於 D, 則在 D 上存在有一解析函數 h 使得 $|h(z_0)| > \sup_{z\in K}|h(z)|$。

利用 Runge 逼近定理 (Runge approximation theorem) 我們即可證得定理 3.3。事實上, 我們可以要求 $|h(z_0)|$ 任意的大且 $\sup_{z\in K}|h(z)|$ 任意的小。比如說, 讓 $m = (|h(z_0)| +$

$\sup_{z\in k}|h(z)|)/2$, 則只要取足夠大的 $k\in\mathbb{N}$, 函數 $(\frac{h}{m})^k$ 就可以滿足我們所求。底下我們開始證明定理 3.2。

定理 3.2 的證明: 首先我們把 D 上所有座標爲有理數的點蒐集起來, 稱之爲 $\mathcal{P}$。很明顯地, 集合 $\mathcal{P}$ 是可數的且在 D 上爲稠密的。利用 $\mathcal{P}$ 我們再重新構造 D 上的一個點列 $\{\zeta_j\}_{j=1}^{\infty}$ 使得 $\mathcal{P}$ 上的每一個點在此點列上都會出現無窮多次。接下來, 我們用一序列遞增的緊緻子集 $\{K_j\}_{j=1}^{\infty}$ 來逼近 D, 這些 K_j 定義如下:

$$K_j=\{z\in D\Big|\ \mathrm{dist}\ (z,D^c)\geq\frac{1}{j}\}\cap\overline{B(0;j)},\quad j\in\mathbb{N}.$$

這裡 $\mathrm{dist}(z,D^c)$ 表示點 z 到 D 的補集的距離, 另外 $B(0;j)=\{z\in\mathbb{C}\Big|\ |z|<j\}$。所以我們有 $K_j\subseteq\mathring{K}_{j+1}$, $\mathring{K}_{j+1}$ 表示 K_{j+1} 的內點所形成的集合。對於每一個 i, 我們將以 ζ_i 爲圓心且包含於 D 的最大開圓盤記爲 B_{ζ_i}。如此, 我們就可依序選出一個 $\{K_j\}$ 的子序列 $\{K_{n_j}\}$ 使得對每一個 j, 選一個點 $z_j\in(B_{\zeta_j}\setminus K_{n_j})\cap\mathring{K}_{n_{j+1}}$ 和一個解析函數 $f_j\in O(D)$ 滿足

$$|f_j(z)|<\frac{1}{2^j},\quad z\in K_{n_j}$$

和

$$|f_j(z_j)|\geq\sum_{i=1}^{j-1}|f_i(z_j)|+j+1.$$

這裡 f_j 的存在性是由定理 3.3 所得到的, 也是證明整個定理 3.2 的關鍵。接著, 我們定義

$$h(z)=\sum_{j=1}^{\infty}f_j(z).$$

由 f_j 的選取方式, 很容易可以看出 h 在 D 上定義了一個解析函數, 且

$$|h(z_j)|\geq|f_j(z_j)|-\sum_{i=1}^{j-1}|f_i(z_j)|-\sum_{i=j+1}^{\infty}|f_i(z_j)|\geq j.$$

這也說明了 h 在整個邊界都是奇異的。因爲如果 h 可以經由解析延拓跨過任何一個邊界點的話, h 就會在某一個圓盤 B_{ζ_i} 上爲有界。由於有無窮多個點 z_j 出現在此一圓盤, 上面的估計說明這是不可能的。因此, 定理 3.2 就得證了。

現在我們如果在高維度複空間 $\mathbb{C}^n$, $n\geq 2$, 上考慮同樣的問題, 我們會發現情況完全改觀, 並不是每一個域都是解析域。我們先以下面一個位於 $\mathbb{C}^2$ 的例子來說明。在 $\mathbb{C}^2$ 我們定義一個域 Ω 如下:

$$\begin{aligned}\Omega=&\{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2\Big|\ |z_1|<1\quad\text{且}\quad\frac{1}{2}<|z_2|<1\}\\ &\cup\{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2\Big|\ |z_1|<\frac{1}{2}\quad\text{且}\quad|z_2|<1\}.\end{aligned}$$

對於 Ω 上任意的解析函數 f, 利用柯西積分公式, 我們定義

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(z_1,w)}{w-z_2}dw,$$

此時的積分路徑 $\Gamma=\{w\in\mathbb{C}\Big|\ |w|=\frac{3}{4}\}$。由 $F(z)$ 的定義, 不難看出 $F\in O(D_1)$, $D_1=\{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2\Big|\ |z_1|<1$ 且 $|z_2|<1\}$, 並且當 $|z_1|<\frac{1}{2}$, $|z_2|<1$ 時, 由柯西積分表現得到 $F(z)=f(z)$。接著再利用解析函數的恆等定理, 我們有 $F\Big|_{\Omega}=f$。換言之, Ω 上的任意一個解析函數 f 都可以解析延拓到一個更大的域 D_1, 這說明了 Ω 不是一個解析域。

同樣的我們也可以利用第二節中所介詔的 Hartogs 延拓定理來說明此一現象。我們只要讓 $D=B_1\backslash\overline{B_{\frac{1}{2}}}$, 這裡 $B_r=\{z\in\mathbb{C}^n\Big|\ |z|<r\}$。Hartogs 延拓定理說明半徑爲 $\frac{1}{2}$ 的球面 $S_{\frac{1}{2}}$ 並不會構成 D 上解析函數往內延拓的障礙。所以 D 上任何解析函數都可以解析延拓至 B_1。D 也就不是一個解析域。

因此, 在多複變領域裡, 對於如何去確定一個域爲解析域, 就成爲一個很重要的課題。此時, 我們回憶一下定理 3.2 的證明, 正如其中所述, 整個定理證明的關鍵就在於定理 3.3。但是, 定理 3.3 的敍述, 一般而言, 在高維度時卻是錯的! 我們還是用上面所定義的域 Ω 來說明此一現象。我們考慮 Ω 上的一個緊緻子集 $S=\{(\frac{3}{4},\frac{3}{4}e^{i\theta})\Big|\ \theta\in[0,2\pi]\}$。同時讓 $z_0=(\frac{3}{4},\frac{5}{8})\in\Omega\backslash S$。由於 Ω 上的解析函數 h 都可以解析延拓到 D_1, 根據解析函數的最大模原則 (maximum modulus principle) $|h(z_0)|\leq\max_{z\in S}|h(z)|$。所以定理 3.3 在此情況下是不成立的。

爲了克服上述的困難, 對於 D 上的一個緊緻子集 K, 我們可以考慮它的解析凸體 $\hat{K}_D$ (holomorphically convex hull), 定義如下:

$$\hat{K}_D=\left\{z\in D\Big|\ |f(z)|\leq\sup_K|f|,\quad\forall f\in O(D)\right\}.\tag{3.4}$$

由 (3.4) 可以很明顯的看出 $K\subseteq\hat{K}_D$, 且 $\hat{K}_D$ 是 D 上的一個閉集, 但卻不一定是 D 上的一個緊緻子集。同時, 若 $z_0\in D\backslash\hat{K}_D$, 則存在有一個 D 上的解析函數 f 使得 $|f(z_0)|>\sup_K|f|$, 而此正是證明定理 3.2 的關鍵條件。再一次以上面的例子 Ω 和 S 來解釋, 可以看出 $z_0=\left(\frac{3}{4},\frac{5}{8}\right)\in\hat{S}_{\Omega}=\left\{\left(\frac{3}{4},z_2\right)\Big|\ \frac{1}{2}<|z_2|\leq\frac{3}{4}\right\}$, 以致於定理 3.3 無法成立! 注意到此時 $\hat{S}_{\Omega}$ 並不會相對緊緻於 Ω! 因此, 一個 D 上的緊緻子集 K 若具有 $K=\hat{K}_D$ 的性質, 我們就說 K 具有解析凸性 (holomorphic convexity)。當 $n=1$ 時, 不難得到 $\hat{K}_D=K\cup(\cup_jK_j)$, 其中 K_j 爲 $D\backslash K$ 中包含於 D 的分支域。

根據上面所引進解析凸性的概念, 我們做如下之定義。

定義 3.5: 假設 D 爲 $\mathbb{C}^n$ 上的一個域, 我們說 D 是一個具有解析凸性的域, 如果 D 上任意一個緊緻子集 K 的解析凸體 $\hat{K}_D$ 都會相對緊緻於 D。

則我們馬上有

定理 3.6: $\mathbb{C}^n$ 上的任何一個凸域 D (convex domain) 都具有解析凸性。

證明: 若我們能證明 D 上任意一個緊緻子集 K 的解析凸體 $\hat{K}_D$ 都包含於 K 的幾何凸體 $ch(K)$ (convex hull), 則基於 D 的凸性, 我們就證得此定理了。

所以假設 K 爲 D 上的一個緊緻子集。將 $\mathbb{C}^n$ 看成 $\mathbb{R}^{2n}$, 並令 H 爲 K 在 $\mathbb{R}^{2n}$ 中的一個支超平面 (supporting hyperplane)。則 H 的方程式可以寫爲

$$h(x,y)=a_1x_1+b_1y_1+\cdots+a_nx_n+b_ny_n-c=0,$$

其中 a_j, b_j, c 爲實數。我們可以假設 $h\Big|_K\le 0$。因此只要考慮下面的解析函數

$$f(z)=e^{\alpha_1z_1+\cdots+\alpha_nz_n-c},$$

$\alpha_j=a_j-ib_j$, $1\le j\le n$, 就可知道 $\hat{K}_D$ 和 K 是位於 H 的同一邊, 所以 $\hat{K}_D$ 一定會包含於 K 的幾何凸體 $ch(K)$。定理 3.6 也因此得證。

接著我們將證明本節中最主要的一個結果, 它說明了解析凸性可以用來正確地描述解析域。

定理 3.7: D 是 $\mathbb{C}^n$, $n\ge 1$, 上的一個域。則下面三個敍述是等價的:

(i) D 是一個解析域。

(ii) 對 D 上的任意一個緊緻子集 K, 我們有 $\mathrm{dist}(K,D^c)=\mathrm{dist}(\hat{K}_D,D^c)$, 其中 $\mathrm{dist}(K,D^c)$ 表示 K 到 $D^c=\mathbb{C}^n\backslash D$ 的距離。

(iii) D 具有解析凸性。

由定理 3.6 和 3.7 立刻得到任何凸域都是解析域。爲了證明定理 3.7, 我們先做一些準備工作。首先, 將 $P(a;r)$ 記爲多複變上一個多圓盤積 (polydisc) $P(a;r)=\prod_{j=1}^n B(a_j;r_j)$, 其中 $a=(a_1,\ldots,a_n)$ 爲中心, $r=(r_1,\ldots,r_n)$ 爲多重半徑 (multiradii)。有了這些定義, 我們便可把單複變上關於解析函數的柯西積分表現直接地推廣到多圓盤積上。

定理 3.8: 假設 $f\in O(P(a;r))\cap C(\overline{P(a;r)})$。則對於任一 $z\in P(a;r)$ 我們有

$$f(z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\Gamma_n}\cdots\int\limits_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)}{(\zeta_1-z_1)\ldots(\zeta_n-z_n)}d\zeta_1\cdots d\zeta_n,$$

其中 $\Gamma_j=\{\zeta_j\in\mathbb{C}\Big|\ |\zeta_j-a_j|=r_j\}$, $1\le j\le n$。

另外, 我們也可利用多圓盤積引進多複變上的一種距離概念。若 $P(0;r)$ 爲一個以原點爲中心, 多重半徑爲 $r=(r_1,\ldots r_n)$ 的多圓盤積, 對於任意 $z\in D$, 我們定義

$$\delta_r(z)=\sup\{\lambda>0\Big|\ \{z\}+\lambda P(0;r)\subseteq D\}. \tag{3.9}$$

換言之, $\delta_r(z)$ 表示以 $P(0;r)$ 爲單位所量得 z 到 D 的補集的距離。接著我們證明下面之引理。

引理 3.10: 假設 K 爲 D 上的一個緊緻子集, 且 $f \in O(D)$。如果

$$|f(z)| \leq \delta_r(z), \quad \forall z \in K.$$

則 D 上的任意一個解析函數 g 都可以解析延拓到 $D \cup (\{\zeta\} + |f(\zeta)|P(0;r))$, 其中 ζ 爲 $\hat{K}_D$ 上的任意點。

證明: 引理 3.10 的證明也是解析函數的柯西積分表現 (定理 3.8) 的一個應用。對於任意 $0 < t < 1$, 由假設很容易看出

$$K_t = \bigcup_{z \in K} (\{z\} + t|f(z)|\overline{P(0;r)})$$

爲 D 上的一個緊緻子集。因此, 存在一 $M_t > 0$ 使得 $|g(z)| \leq M_t$, $\forall z \in K_t$。利用定理 3.8 的柯西積分表現, 不難得到以下的估計

$$\frac{\left|\frac{\partial^\alpha g}{\partial z^\alpha}(z)\right| t^{|\alpha|}|f(z)|^{|\alpha|} r^\alpha}{\alpha!} \leq M_t. \tag{3.11}$$

對於所有 $z \in K$ 和多重指標 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ (multiindex), $\alpha_j \in \{0\} \cup \mathbb{N}$。這裡 $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$, $\frac{\partial^\alpha g}{\partial z^\alpha} = \partial^{|\alpha|} g / \partial z_1^{\alpha_1} \cdots \partial z_n^{\alpha_n}$ 和 $r^\alpha = r_1^{\alpha_1} \cdots r_n^{\alpha_n}$。因爲 $\frac{\partial^\alpha g}{\partial z^\alpha} \cdot f(z)^{|\alpha|}$ 爲 D 上之一解析函數, 由定義 (3.4) 知道, (3.11) 對於所有 $z \in \hat{K}_D$ 也是對的。此時, 只要讓 t 逼到 1, 就證得 g 可以解析拓到 $D \cup (\{\zeta\} + |f(\zeta)|P(0;r))$, $\zeta \in \hat{K}_D$。

有了這些準備工作後, 我們現在開始證明定理 3.7。

定理 3.7 的證明: 由 (ii)⇒(iii) 是明顯的。至於 (iii)⇒(i) 的證明, 則可完全模仿定理 3.2 的證明, 只要把 K_j 換成具有解析凸性的緊緻子集, 把圓盤 B_{ζ_i} 換成多圓盤積即可。由於我們假設 D 是具有解析凸性的, 這樣的更換是被允許的, 所以 (iii)⇒(i) 的證明也就完成了。

因此, 我們只需證明 (i)⇒(ii)。根據歐氏空間上的距離定義, 我們有

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}(z, D^c) &= \sup\{r > 0 \,\big|\, z + aw \in D,\ \forall w \in \mathbb{C}^n,\ |w| \leq 1 \quad \text{且} \quad a \in \mathbb{C},\ |a| < r\} \\ &= \inf_{|w| \leq 1} d_w(z),\end{aligned}$$

其中 $d_w(z) = \sup\{r > 0 \,\big|\, z + aw \in D,\ \forall\ a \in \mathbb{C},\ |a| < r\}$。

固定一個 w, 爲了方便起見, 我們可以假設 $w = (1, 0, \ldots, 0)$, 接著考慮以原點爲中心, 多重半徑爲 $r(j) = (1, \frac{1}{j}, \ldots, \frac{1}{j})$, $j \in \mathbb{N}$, 的多圓盤積 $P_j = P(0; r(j))$, 不難看出

$$\lim_{j \to \infty} \delta_{r(j)}(z) = d_w(z).$$

所以, 給定一很小正數 $\varepsilon > 0$, 當 j 爲充分大時, 我們得到

$$\operatorname{dist}(K, D^c) \le (1+\varepsilon)\delta_{r(j)}(z), \quad z \in K. \tag{3.12}$$

此時, 我們考慮常數函數 $f(z) = \operatorname{dist}(K, D^c)/(1+\varepsilon)$, 因爲我們假設 D 爲解析域, 所以由 (3.12) 的估計和引理 3.10 可以得到

$$\frac{\operatorname{dist}(K, D^c)}{1+\varepsilon} \le \delta_{r(j)}(\zeta) \le d_w(\zeta), \quad \forall\, \zeta \in \hat{K}_D.$$

當 ε 逼到 0 時, 我們便得到

$$\operatorname{dist}(K, D^c) \le \inf_{\zeta \in \hat{K}_D} \big(\inf_{|w| \le 1} d_w(\zeta)\big) = \inf_{\zeta \in \hat{K}_D} \operatorname{dist}(\zeta, \mathrm{D^c}) = \operatorname{dist}(\hat{\mathrm{K}}_{\mathrm{D}}, \mathrm{D^c}).$$

由於 $K \subseteq \hat{K}_D$, $\operatorname{dist}(\mathrm{K}, \mathrm{D^c}) \ge \operatorname{dist}(\hat{\mathrm{K}}_{\mathrm{D}}, \mathrm{D^c})$ 是明顯的, 因此證得 (i)⇒(ii)。定理 3.7 也就全部證明完畢。

以上簡單的介紹, 是由單複變上的柯西積分公式出發, 藉由 $\overline{\partial}$–方程的可解性和解的支集性質, 從而探討多複變上解析函數的延拓性質, 其中包括了 Hartogs 延拓定理和解析域的概念。如果讀者希望能有更多的資料, 期望對多複變分析有更進一步的認識與了解, 那麼在參考文獻中所列的圖書與刊物, 應該會有所助益。

参考文獻

1. S.-C. Chen, *Complex analysis in one and several variables*, Taiwanese, J. Math., **4**(2000), 531-568.
2. S.-C. Chen and M.-C. Shaw, Partial Differential Equations in Several Complex Variables, Studies in Advanced Math., Vol.19, AMS-International Press, 2001.
3. G. B. Folland and J. J. Kohn, The Neumann Problem for the Cauchy-Riemann Complex, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1972.
4. L. Hörmander, An Introduction to Complex Analysis in Several Complex Variables, Third Edition, Van Nostrand, Princeton, N. J., 1990.
5. S. Krantz, Function Theory of Several Complex Variables, John Wiley, New York, 1982.
6. R. M. Range, Holomorphic Functions and Integral Representations in Several Complex Variables, Graduate Texts in Math., Vol.108, Springer-Verlag, N. Y., 1986.

—本文作者任教於清華大學數學系—