这里给出的证明较之一般教材的方法要简明一些，并且能使学生更清楚地看到零点和极点个数对积分值的贡献．用该证明的方法来说明幅角原理，也更利于学生接受．（韩流冰）

求解析函数表示式的一个简捷方法

将解析函数 $w = u(x,y) + iv(x,y)$ 表示成 z 的函数 $f(z)$. 用观察法，或用共轭复数的性质

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

来转化，也有一些技巧. 解析函数 $f(z)$ 一定能单独用 z 来示示这性质. 而且可将其用 z 很快地表出.

在 $w = f(z)$, $z = x + iy$ 中令 $y = 0$, 则有

$$w = f(z) = f(x + 0) = f(x).$$

即 $f(z)$ 与 $f(x)$ 的对应规律是相同的. 将 $f(x)$ 中 x 换成 z, 即得 $w = f(z)$ 的表示式.

例1 $w = y^3 - 3x^2y + i(x^3 - 3xy^2 + c)$ 是一解析函数. 令 $y = 0$, 得 $w = i(x^3 + c) = f(x)$

故原函数可化为 $w = f(z) = i(z^3 + c)$.

例2 $w = -4xy - y + i(2x^2 - 2y^2 + x) + c$ 是一解析函数. 令 $y = 0$, 得 $w = i(2x^2 + x) + c = f(x)$

故原函数可化为 $w = f(z) = i(2z^2 + z) + c$.

例3 $w = (2\operatorname{sh}x \cos y - x^2 + y^2 + c) + i(2\operatorname{ch}x \sin y - 2xy)$

是一解析函数. 令 $y = 0$, 得 $w = 2\operatorname{sh}x - x^2 + c = f(x)$

故原函数可化为

$$w = f(z) = 2\operatorname{sh}z - z^2 + c = e^z - e^{-z} - z^2 + c.$$

（李川生）

复变函数论方法的应用简介

解析函数的实部和虚部都是调和函数，满足拉普拉斯方程．而数学物理中的许多问题都涉及到求解拉普拉斯方程的边值问题．这样就将二者紧密地联系起来，复变函数论中的方法广泛地应用到数学物理问题中，尤其是保角映射方法是解决数学物理问题的一种典型方法．

该方法是基于调和函数经保角映射后仍为调和函数这样一个事实．

设 $\varphi(x,y)$ 是调和函数，满足方程

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

若解析函数 $z = x + iy = f(u + iv)$ 将 φ 变换成 u,v 的函数，则在保角映射的区域内，$\varphi(u,v)$ 满足方程

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} = 0$$

解拉普拉斯方程的边值问题，除非区域形状简单，否则直接求解是困难的．比如圆域、半平面域，是比较容易求解的．对于复杂的区域，我们可以先求出一个从该区域到简单区域的保角映射，然后在简单区域中求解，最后经过一个逆变换，即求出复杂区域中的解．下面我们通过一个流体力学中的问题来说明这一点．

设均匀流动的理想流体绕过某一垂直于流动方向的长圆柱体的流动，假设流体为不可压无粘性流体，且流动是无旋无源无汇的．试确定流线和流速．

注意到，复数与二维矢量关于加法是相同的．因此，我们可在 z 平面上将流体在任一点的流速 v 表示为

$$v = v_1 + iv_2,$$

其中 v_1 是平行于 x 轴的速度分量，v_2 是平行于 y 轴的速度分量．由于流动是无旋的，所以必存在函数 $\varphi(x,y)$，使得

$$v_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad v_2 = \frac{\partial\varphi}{\partial y},$$

φ 称为速度势，轨线 $\varphi=$ 常数，称为等势线，在任一点上的 v 与过该点的等势线正交．

因不存在源和汇且流体质点的轨迹又不随时间改变（定常性），所以在给定的时间内流进所论区域的流量等于在同一时间内流出该区域的流量，故 φ 必满足拉普拉斯方程．

作为拉普拉斯方程的解，φ 是调和的，故它有一个共轭调和函数 $\psi(x,y)$，两者由柯西－黎曼方程相联系．函数 ψ 称为流函数，轨线 $\psi=$ 常数，称为流动的流线．因 φ 和 ψ 是共轭调和函数，故等势线与流线正交．因此，在任何一点，v 与过该点的流线相切，且

$$v_1 = \frac{\partial\psi}{\partial y},\quad v_2 = -\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

取 x 轴平行于流体的流动方向，取圆柱体的一个横断面作为 z 平面，从而圆柱在 z 平面上由圆心为坐标原点的圆 $|z|=1$ 表示．我们的目的是要确定 $\psi(x,y)$，使其满足拉普拉斯方程及如下边界条件：对 $x<-1$ 和 $x>1$，流线 $\psi=k$ 平行于 x 轴；对 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 流线沿圆周分布；而所有其他流线必须位于圆外，且离圆柱很远的流线应平行于 x 轴或近似地平行于 x 轴．

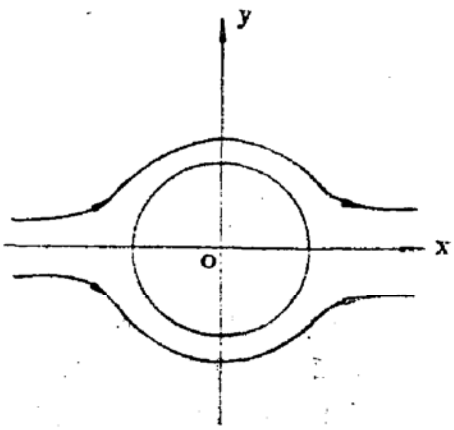

图1

作为第一步，我们利用下述事实：按定义，共轭调和函数是某一解析函数 $F(z)$ 的分量(即实部与虚部)，

$$F(z) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y).$$

此函数称为流动的复势．利用对称性，我们仅考虑 z 平面的上半平面即可，在 z 平面上半平面 $F(z)$ 的虚部就是所求的解．

鉴于所述边界的形状，我们会发现直接求解是困难的．然而我们的确知道相应于无障碍均匀流动的解．假定这个解表示在 w 平面上半平面，流线平行于 u 轴，则 $V_1=c$，$V_2=0$，且流函数是 $\psi=cv$（c 为实常数）；为满足柯西－黎曼方程，等势线应是 $\varphi=cu$．因此，复势 $F(w)=\varphi+i\psi=cu+icv=cw$．

现在我们需要一个解析函数，把 w 平面的上半平面映照到 z 平面的上半平面中单位圆 $|z|=1$ 的外部．这就是函数

$$w = z + \frac{1}{z}.$$

以 $x+iy$ 代 z 即可验证 $y=0$ 或 $x^2+y^2=1$ 时 $v=0$．所以，当 $x<-1$ 及 $x>1$ 时，u 轴映射

成 x 轴；当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，u 轴映射成圆 $x^2+y^2=1$ 的上半圆. 又因 z 值很大时，w 与 z 甚为接近，所以 z 平面上离原点甚远的流线与其在 w 平面上相应的状况实际上没有什么差别.

求 $F=cw$ 的变换，取 $z=re^{i\theta}$，我们得

$$F=c\left(z+\frac{1}{z}\right)=c\left[\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta+i\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta\right].$$

F 的虚部给出流线即流体质点的轨迹：

$$\psi=c\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta=\text{常数}.$$

流线 $\psi=0$ 由圆周 $r=1$ 和 x 轴组成. r 值很大时，流线近似地由 $r\sin\theta=y=$ 常数给出. 由 F 的实部和虚部易求得速度分量.（杜家安、季维莲）

复变函数史话

1 “复变函数论”的主要奠基者是谁？

复变函数中许多术语，如“单值函数”、“多值函数”、“分支”、“支点”、“单叶曲面”、“单连通区域”以及“复变函数”本身，都是黎曼（Riemann）1851年首先开始使用的. 单元复变函数的定义是柯西（Cauchy）1821年在他的第一部教材《分析代数教程》中给出的. 1825年柯西引进了复变函数的积分定义，并且讨论了形如

$$\int_{x+iy}^{X+iY}f(z)dz$$

的定积分. 1831年柯西推出了著名的柯西积分公式：

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{f(t)}{z-t}dt,$$

这里 c 是区域 D 的边界，z 是 D 内一点.

1856年，当柯西的《函数论》研究报告出版的时候，人们还没有认识到它实际上是新的独立理论形成的标志. 在很多评论中，有人指责说：“我们不去研究由柯西发明的形而上学的公式，这些公式任何时候都不会有谁去使用它.”

现在复变函数中的通用记号 ReZ，Ref（z）是从魏尔斯特拉斯（Weierstrass）所使用的符号 $\mathscr{R}z$ 那里发展来的. 直到20世纪，才用拉丁字母来代替粗体字母 $\mathscr{R}$ 及 $\mathscr{I}$. 在40年代才出现记号 Re. 魏尔斯特拉斯没有使用过记号 $I_m y$，只在必要时使用记号 $\mathscr{R}$ [if（z）].

基于以上史实，我们有理由认为，复变函数论的一般基础是由柯西奠定的. 而黎曼与魏尔斯特拉斯对复变函数的发展作出了重大贡献.

2 《解析函数》的来龙去脉

《解析函数》的名称首先是康道尔西（Condorcet）使用的.《解析》一词看上去应当是指研究函数的方法一数学分析. 康道尔西的研究报告虽没有公开出版，但是知道它的人却很多. 在康氏20年之后，拉格朗日（Lagrange）也使用了《解析》这个术语，不知道他是借用康氏的说法呢还是他自己的重复《发明》. 拉格朗日在《解析函数论》中将展成级数的函数说成是解析函数.

解析函数的现代概念，基本上是在魏尔斯特拉斯的著作中形成的. 直到19世纪末，由柯西、魏尔斯特拉