矩陣函數的新解法——矩陣餘式定理之應用

陳正宗

在線性微分方程式系統中，吾人常遇到如下聯立微分方程式：

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + \cdots\cdots\cdots\cdots + a_{2n}x_n$$

$$\frac{dx_3}{dt} = a_{31}x_1 + \cdots\cdots\cdots\cdots + a_{3n}x_n$$

$$\vdots$$

$$\frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n$$

而其對應初始條件

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = x_1(0) \\ \bar{x}_2 = x_2(0) \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ \bar{x}_n = x_n(0) \end{cases}$$

為方便計，可寫成

$$\frac{d\underset{\sim}{x}}{dt} = A\underset{\sim}{x} \qquad\qquad \underset{\sim}{x}(0) = \begin{Bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{Bmatrix}$$

其中 $\underset{\sim}{x} = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{Bmatrix}$

$A = (\ a_{ij}\ )_{n\times n}$ 矩陣

上述問題的解析解爲

$$\underset{\sim}{x}(t)=e^{At}\,\underset{\sim}{x}(0)$$

在這裡 e^{At} 就是我們要討論的矩陣函數。關於矩陣函數解法，文獻上[1]均以類似矩陣變換(similar matrix)原理解之，在此，吾人利用實數矩陣對比餘式定理解之，提供一迅速易懂的解題方法，一獻野人之曝。玆將傳統方法與個人方法分述如下：

一、傳統方法

由文獻上[1]可知任一方陣A，可經由特徵值(eigenvalues)與特徵向量(eigenvector)將其表成類似式如下：

$$AC=CD \qquad (\text{similar form})$$

其中D爲特徵值所組成之對角矩陣

C爲特徵向量組成之矩陣

所以，吾人可將A表爲如下之型式：

$$A=CDC^{-1}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

今考慮A矩陣之函數 f(A)，並將其系列式(series)表示如下：

$$f(A)=\sum_{i=0}^{\infty}p_i A^i \qquad (p_i\text{爲係數})$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}p_i (CDC^{-1})^i \qquad (\text{將(1)式代入})$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}p_i \overbrace{(CDC^{-1})(CDC^{-1})\cdots\cdots(CDC^{-1})(CDC^{-1})}^{i\text{次}}$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}p_i CD^iC^{-1}$$

$$=C\left(\sum_{i=1}^{\infty}p_i D^i\right)C^{-1}$$

又因爲D爲對角矩陣，D^i 相當容易求，答案也就自然算出來，爲說明起見，特舉一例如下：

[問題]假設 $A=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$

求 $f(A)=e^{A}=?$

[解]：假設 $A\underset{\sim}{x}=\lambda\underset{\sim}{x}$

則 $(A-\lambda I)\underset{\sim}{x}=0$，爲一特徵值問題

解 $\det|A-\lambda I|=0$

可得 $\lambda=1$ or 2

共對應之特徵向量爲

當 $\lambda=1$， $\underset{\sim}{x}=\begin{Bmatrix}2\\ -1\end{Bmatrix}$ $\qquad \lambda=2$， $\underset{\sim}{x}=\begin{Bmatrix}1\\ -1\end{Bmatrix}$

所以 $A[\underset{\sim}{x}_1 \ \ \underset{\sim}{x}_2] = [\underset{\sim}{x}_1 \ \ \underset{\sim}{x}_2]\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}$

其相似式為，$\begin{pmatrix}0 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$

符合前述(1)式之 $AC = CD$，其中 $C = \begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$ ，$D = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$

現在

$$f(A) = e^{A} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}A^{n}$$

$$= C\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(D)^{n}\}C^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{1} & 0\\ 0 & e^{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}2e & e^{2}\\ -e & -e^{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}2e-e^{2} & 2e-2e^{2}\\ -e+e^{2} & -e+2e^{2}\end{pmatrix}$$ 為其解。

二、矩陣餘式定理的應用解法

在高中時代，我們學過實數系的餘式定理，簡述如下：「一函數 $f(x)$，若除以 $(x-a)$ 則其餘式爲 $f(a)$」吾人可寫成下式：

$$f(x) = (x-a)Q(x) + f(a)$$

其中 $Q(x)$ 爲商式，$f(a)$ 爲餘式，同理當除數爲二次式時，其餘式則爲一次式，可表成下式

$$f(x) = (ax^{2}+bx+c)Q(x) + px + q$$

同理 $Q(x)$ 爲商式，$px+q$ 爲餘式。

如果吾人將實數 x 改爲矩陣，其亦有相同特性。（註：此點尚未見文獻證明，但作者屢試不爽，讀者或可嘗試證之）。

亦即

$$f(A) = (aA^{2}+bA+cI)Q(A) + pA + qI$$

其中 $\begin{cases} a, b, c, p, q \text{ 爲常數} \\ I \text{ 爲單位矩陣} \end{cases}$

有一點值得注意的乃是實數 1 對應過來是單位矩陣。

利用這點我們將上例重作一次如下：

［問題］已知 $A = \begin{pmatrix}0 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ ，求 $e^{A} = ?$

解：由一般工程數學的書可知[1]，矩陣本身滿足本身的特性方程式（Characteristic Equation），利用此點可知

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & +2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

其特徵方程式爲　$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$　　$\therefore\ A^2 - 3A + 2I = 0$

而　$f(A) = (A^2 - 3A + 2I)\,Q(A) + pA + qI$

經由類比效應（實數 ⇒ 矩陣）可改寫成

$$f(x) = (x^2 - 3x + 2)\,Q(x) + px + q$$

$\therefore\ e^x = (x^2 - 3x + 2)\,Q(x) + px + q$

將 $x = 1$，2 代入，$\begin{cases} e^1 = p + q \\ e^2 = 2p + q \end{cases}$　　可解得 $\begin{cases} p = e^2 - e \\ q = 2e - e^2 \end{cases}$

將 p，q 代回得

$$\begin{aligned} e^A &= (A^2 - 3A + 2I)\,Q(A) + (e^2 - e)A + (2e - e^2)I \\ &= (e^2 - e)A + (2e - e^2)I \qquad (\because\ A^2 - 3A + 2I = 0) \\ &= (e^2 - e)\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2e - e^2 & 0 \\ 0 & 2e - e^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -2e^2 + 2e \\ e^2 - e & 3e^2 - 3e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2e - e^2 & 0 \\ 0 & 2e - e^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2e - e^2 & -2e^2 + 2e \\ e^2 - e & 2e^2 - e \end{pmatrix} \end{aligned}$$

其解和傳統方法相同，驗證本法有其可行性。

針對以上結果，吾人可發覺第二種方法，較具一般性，適合解任意之矩陣函數如：e^A，sinA，$A^{1/2}$……等，其方法均同，另一更大特點乃是當A矩陣特徵值有重根時，第一種方法不易求得C矩陣，而第二種方法則可利用微分運算求得所缺少的方程式，才可求得餘式中的係數，也就是說方程式與未知係數才會一樣多。這在實數系裡，可說成一函數 $f(x)$ 有 $(x-a)^2$ 的因式，則 $f'(x)$（表 $f(x)$ 之微分）必有 $(x-a)$ 的因式，道理是一樣的。基於上述兩個理由，作者建議第二種解法提供同仁參考。讀者可自行找個有重根特徵值的例子，以上述兩種方法進行求解，當可一窺究竟。

三、參考文獻

1. C. RAY Wylie, " Advanced Engineering Mathematics " Mc-Graw Hill, 1982.

作者電話：2774