非正合方程式與積分因子

海大河工系 陳正宗

原微分方程式$M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$若非正合時, 仍有可能找到一 個函數$\mu(x,y)$, 使得$\mu M\,dx+\mu N\,dy=0$爲正合型, 即

$$\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}\quad 但是\quad \frac{\partial[\mu M]}{\partial y}=\frac{\partial[\mu N]}{\partial x}$$

則稱$\mu(x,y)$爲此微分方程式之積分因子 (Integrating factor).

例如$2y\,dx+x\,dy=0$不是正合方程式, 但乘上x後, 則得到一正合方程式

$$2xy\,dx+x^2\,dy=d(x^2y)=0$$

亦即x是方程式$2y\,dx+x\,dy=0$的一個積分因子。

根據積分因子的定義,$\mu(x,y)$應滿足

$$\frac{\partial[\mu M]}{\partial y}=\frac{\partial[\mu N]}{\partial x}\ \Rightarrow\ \mu\frac{\partial M}{\partial y}+M\frac{\partial \mu}{\partial y}=\mu\frac{\partial N}{\partial x}+N\frac{\partial \mu}{\partial x}$$

$$亦即\ N\frac{\partial \mu}{\partial x}-M\frac{\partial \mu}{\partial y}=\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

此爲一階偏微分方程式, 不易求解, 故無實用性可言。只有在下表所列幾種較單純 的情況 —— 即$\mu(x,y)$只爲x, y, $x+y$或xy 的函數, 積分因子才有實用性。

判　別　式	積分因子μ
$\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=f(x)$	$e^{\int f(x)dx}$
$\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}=f(y)$	$e^{\int f(y)dy}$
$\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N-M}=f(x+y)$	$e^{\int f(x+y)\,d(x+y)}$
$\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{Ny-Mx}=f(xy)$	$e^{\int f(xy)\,d(xy)}$

積分因子: $dy/dx=a(x)y$ (case 1)
積分因子: x^my^n (Kaplan)