一階微分方程

海大河工系 陳正宗

1.一階線性常微分方程式:$y'+p(x)y=q(x)$之解 $y(x)=y_h+y_p=e^{-\int p(x)dx}\left[c+\int e^{\int p(x)dx}\cdot q(x)\,dx\right]$
2.Bernoulli's方程式:$y'+p(x)y=q(x)y^n \quad (n\neq 0,1)$
3.Riccati's方程式:$y'+p(x)y+q(x)y^2=r(x)$
4.Clairaut's方程式:$y=xy'+q(y')$

1. 一階常微分方程式之通式:$M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$ 或 $y'=f(x,y)$
   解題流程:
   (a) 判斷是否可分離變數? 是否為齊次方程式?
   (b) 判斷是否為正合方程式? 嘗試找其積分因子?
   (c) 判斷是否可合併成全微分式?
   (d) 判斷是否為一階線性、非線性或高階常微分方程式?
2. 一階線性常微分方程式:$y'+p(x)y=q(x)$
   公式:$y(x)=y_h+y_p=e^{-\int p(x)dx}\left[c+\int e^{\int p(x)dx}\cdot q(x)\,dx\right]$
3. 一階非線性常微分方程式
   (a) Bernoulli's 方程式:$y'+p(x)y=q(x)y^n \quad (n\neq 0,1) \;\Rightarrow\;$ 令 $v(x)=y^{1-n}$
       可化為一階線性常微分方程式
   (b) Riccati's 方程式:$y'+p(x)y+q(x)y^2=r(x) \;\Rightarrow\;$ 令 $y(x)=y_1(x)+v(x)$
       可化為 Bernoulli's 方程式 (先設法找到一解$y_1(x)$)
   (c) Clairaut's 方程式:$y=xy'+q(y') \;\Rightarrow\;$ 令 $v=y'$
       可得一奇異解及一通解
4. 一階高次及可降階之二階常微分方程式 $\Longrightarrow$ 採用適當的因變數變換
5. 其它相關重點:
   (a) 通解與奇解之關係
   (b) 解之存在與唯一性
   (c) 正交軌跡
   (d) 近似解 —— Picard's 疊代法、微擾法