工程數學 作業V　河工系 一年 B 班 B92520121 高聖凱

Clairant's equation: $y(x) = xy'(x) - \frac{1}{4}\left(y'(x)\right)^2$

我們已知 $y'(x)=c$**，** i.e. $y(x)=cx+\frac{1}{4}c^2$。**假設此解存在一條包絡線，則直線必和包絡線相切於一點，** $\left(x(c)\ ,\ y(c)\right)$ **(如圖 1)，代入原等式我們可得知：**

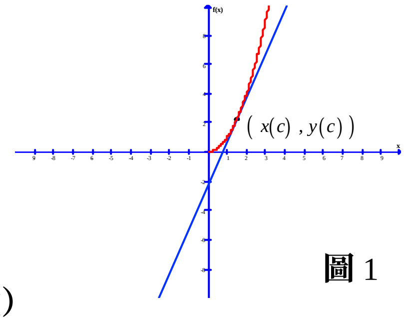

圖 1

$$y(c) = c\,x(c) + \frac{1}{4}c^2 \qquad \text{（第 1 式）}$$

將其對 c **微分，我們可知：**

$$y'(c) = c\,x'(c) + x(c) - \frac{1}{2}c \qquad \text{（第 2 式）}$$

又該點斜率為 $c = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy(c)}{dc}}{\frac{dx(c)}{dc}} = \dfrac{y'(c)}{x'(c)}$**，** i.e. $y'(c) = c\,x'(c)$ **代入第 2 式，可知**

$x(c) = \frac{1}{2}c$**，代入 1 式，求得** $y(c) = \frac{1}{4}c^2 = \left(\frac{1}{2}c\right)^2 = x^2$**，所以我們可知包絡線為：**

$$y(x) = x^2$$

解的關係圖如下：(利用 Graph 軟體所繪製)