<u>Method of complete integral</u>

$$\boxed{(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2 = 1 \qquad Cauchy\ data:\ \ u(s^2, s) = s}$$

$u(x, y, \theta, \alpha) = x\cos\theta + y\sin\theta + \alpha$

引入 Cauchy data , $u(s^2, s) = s$

$s = s^2\cos\theta + s\sin\theta + \alpha$ (1)

$1 = 2s\cos\theta + \sin\theta$ (2)

(1)式對 s 微分得(2)式

由(2)式可得

$s = \frac{1-\sin\theta}{2\cos\theta}$ 令 $\cos\theta = p$

$\Rightarrow s = \frac{1-\sqrt{1-p^2}}{2p} \quad \Rightarrow 2ps - 1 = -\sqrt{1-p^2}$

$\Rightarrow p(4ps^2 - 4s + p) = 0$

$\langle I \rangle\ P = 0$

則 $\cos\theta = 0 \quad \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ 代回(1)式

$u(x, y, \theta, \alpha) = y + \alpha$ 代入 $u(s^2, s) = s$

$s = s + \alpha \quad \Rightarrow \alpha = 0$

$\Rightarrow u(x, y, \theta, \alpha) = y$

$\langle II \rangle p = \frac{4s}{1+4s^2}, s \neq 0 \Rightarrow \theta = \cos^{-1}(\frac{4s}{1+4s^2})$ 代回(1)式

$s = s^2\frac{4s}{1+4s^2} + s\frac{1-4s^2}{1+4s^2} + \alpha$

$\alpha(s) = \frac{4s^3}{1+4s^2}$

$u(x, y, \theta(s), \alpha(s)) = x\frac{4s}{1+4s^2} + y\frac{1-4s^2}{1+4s^2} + \frac{4s^3}{1+4s^2}$ (3)

討論：

上式仍不是我們想要解析解，因為仍然含有 s，所以若繼續對 s 微分與上式聯立消去 s 應該就可以得到解析解，但是發現有點困難，而這所面對的困難就相當於在 general form 的參數表示式要整理為解析解時遇到的困難一般。

General form

$\langle I \rangle \ u(x,y) = y$

$$\langle II \rangle \ x = \frac{8s}{1+4s^2} t + s^2$$

$$y = \frac{2(1-4s^2)}{1+4s^2} t + s$$

$$u = 2t + s$$

將參數式代入(3)式中

$$\left(\frac{4s}{1+4s^2} t + s^2\right) \cdot \frac{4s}{1+4s^2} + \left(\frac{1-4s^2}{1+4s^2} t + s\right) \cdot \frac{1-4s^2}{1+4s^2} + \frac{4s^3}{1+4s^2} = 2t + s$$

得到兩個解是相同的。

如果我們暫時不引入 Cauchy data

並猜解為 $u(x,y,\theta,\alpha) = x\cos\theta + y\sin\theta + \alpha$

令 $\alpha = \beta\cos\theta$

$u(x,y,\theta,\alpha(\theta)) = (x+\beta)\cos\theta + y\sin\theta$ (4) 對 θ 微分

$\Rightarrow 0 = -(x+\beta)\sin\theta + y\cos\theta$ (5)

(3),(4)兩式聯立消去 θ 則得

$u^2(x,y) = (x+\beta)^2 + y^2$ (6) 若再對 β 微分

$0 = 2(x+\beta) \ \Rightarrow \beta = -x$ 代回上式

$\Rightarrow u(x,y,\theta,\alpha) = y$

$\Rightarrow u(y) = y$ (7)

討論：若不引入 Cauchy data 且不斷利用包絡的觀念(即將函數表示成單參數表示式，再對此參數微分，兩個式子聯立消去該參數，得到一個 Singular solution)則可得到一個 solution family 即(6)式再重複包絡的觀念得到 $u(y) = y$ 即(7)式。

這裡的(5)式 $\underline{u^2(x,y) = (x+\beta)^2 + y^2}$ 就是我們用 General form 得到的 Monge Cone。而(6)式 $\underline{u(y) = y}$ 就是當 s=0 時的 Singular Solution 也就是 Monge Cone 在 s=0 的位置，退化為一個斜平面。

我們試著把 Method of complete integral 這邊得到的解，從中挑出一個新的 Cauchy data 來以 General form 的方法試看看能不能得到相同的解。

$u^2(x,y)=(x+\beta)^2+y^2$

$\Rightarrow u(x,y)=\sqrt{(x+\beta)^2+y^2}$ 令 $\beta=0$

$\Rightarrow u(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 從左式挑出一新的 Cauchy data：$u(\cos s,\sin s)=1$

用 general form 的方法：

(一)

$$u_0'(s)=p_0(s)x_0'(s)+q_0(s)y_0'(s)$$

$$0 = p_0(-\sin s)+q_0(\cos s) \qquad (1)$$

$$p_0^2(s)+q_0^2(s)=1 \qquad (2)$$

(1)(2)兩式聯立

$$q_0(s)=\tan s(p_0(s))$$

$$p_0^2(s)+\tan^2 s(p_0^2(s))=1$$

$$p_0^2(s)=\frac{1}{1+\tan^2 s}\Rightarrow p_0=\cos s, q_0=\sin s$$

(二) $\begin{vmatrix} F_p & F_q \\ x_0'(s) & y_0'(s)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2p & 2q \\ -\sin s & \cos s\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2\cos s & 2\sin s \\ -\sin s & \cos s\end{vmatrix}=2\neq 0 \quad (OK!!)$

(三)

$$\frac{dx}{dt}=F_p=2p(t,s) \quad x(0,s)=\cos s$$

$$\frac{dy}{dt}=F_q=2q(t,s) \quad y(0,s)=\sin s$$

$$\frac{du}{dt}=pF_p+qF_q=2p^2+2q^2=2(p^2+q^2)=2 \quad u(0,s)=1$$

$$\frac{dp}{dt}=-F_x-pF_u=0 \quad p(0,s)=\cos s$$

$$\frac{dq}{dt}=-F_y-qF_u=0 \quad q(0,s)=\sin s$$

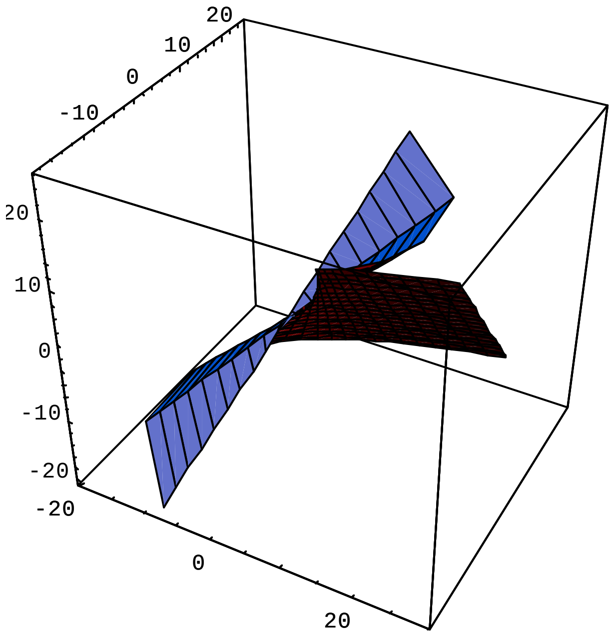
$$\begin{aligned} & x=2t\cos s+\cos s \\ \Rightarrow\ & y=2t\sin s+\sin s \Rightarrow u(x,y)=\sqrt{x^2+y^2} \\ & u=2t+1 \end{aligned}$$

由上式可以知道得到的解和用 Method of Complete integral 得到的解一樣。用 Method of Complete integral 可以得到 PDE 的 Singular solution 而由奇異解選出的 Cauchy data 用 General form 的解法可以得到相同的解。

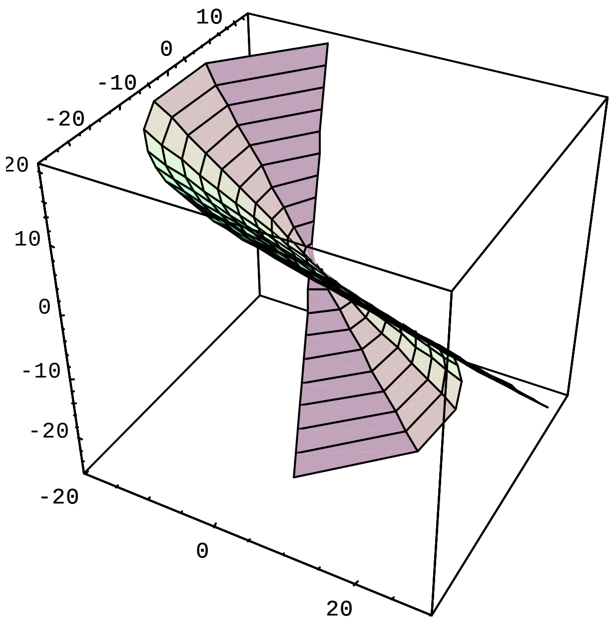
$$x@t\_, s\_D := \frac{8\,s}{1+4\,s^2}\; t + s^2$$

$$y@t\_, s\_D := \frac{2-8\,s^2}{1+4\,s^2}\; t + s$$

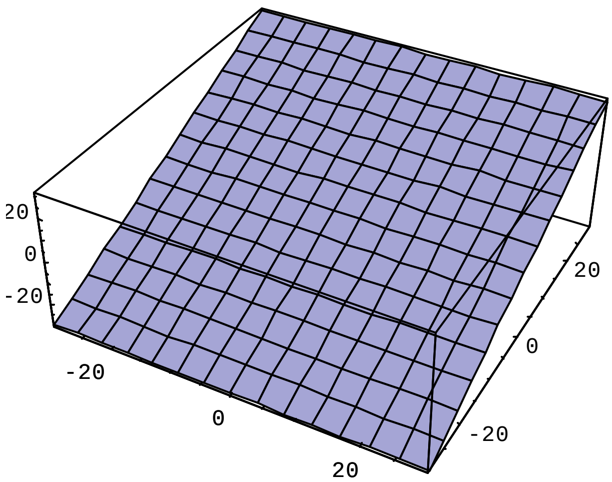
```
u@t_, s_D := 2 t + s
q1 = ParametricPlot3D@8x@t, sD, y@t, sD, u@t, sD<, 8t, -10, 10<, 8s, 0.1, 5<D
q2 = ParametricPlot3D@8x@t, sD, y@t, sD, u@t, sD<, 8t, -10, 10<, 8s, -5, -0.1<D
v@x_, y_D := y
q3 = Plot3D@v@x, yD, 8x, -30, 30<, 8y, -30, 30<D
q4 = ParametricPlot3D@8x@0, sD, y@0, sD, u@0, sD, RGBColor@0, 1, 0D<, 8s, 0.1, 5<D
q5 = ParametricPlot3D@8x@0, sD, y@0, sD, u@0, sD, RGBColor@1, 0, 0D<, 8s, -5, -0.1<D
w0 = Show@q1, q2D
w1 = Show@q3, q4, q5D
w2 = Show@q1, q2, q3, q4, q5D
Show@w1, ViewPoint ® 830.5, 0, 0<D
Show@w2, ViewPoint ® 830.5, 0, 0<D
```



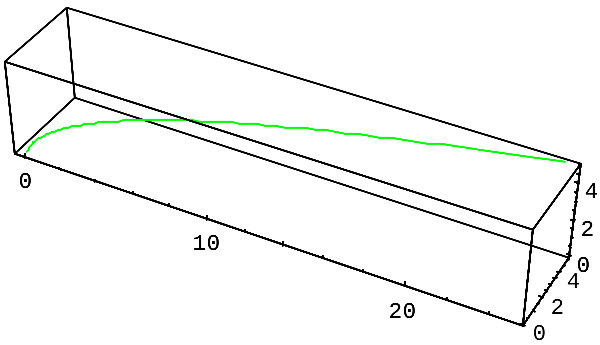
… Graphics3D …



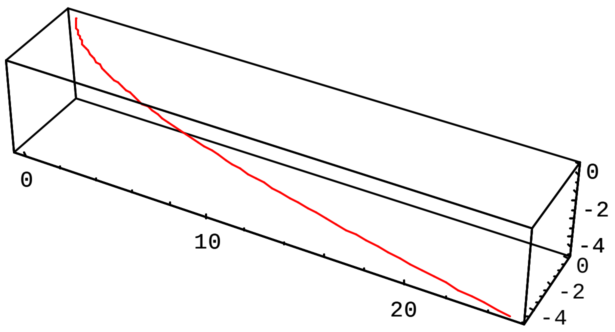
... Graphics3D ...



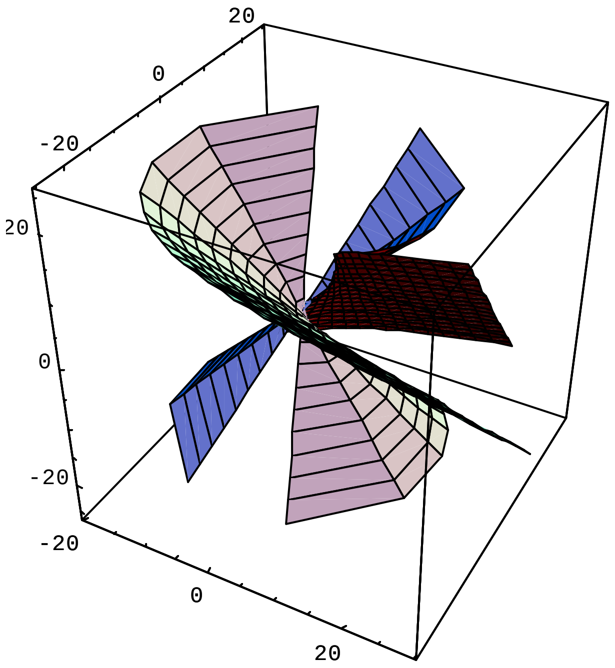
... SurfaceGraphics ...



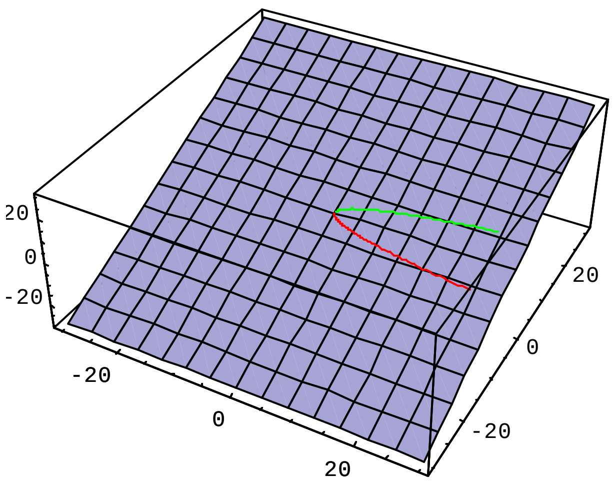
... Graphics3D ...



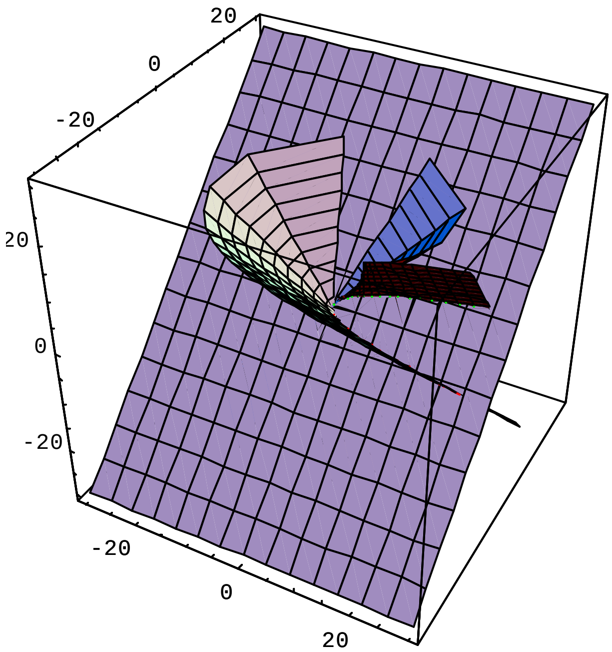
... Graphics3D ...



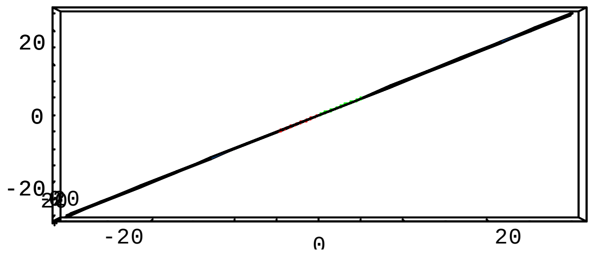
... Graphics3D ...



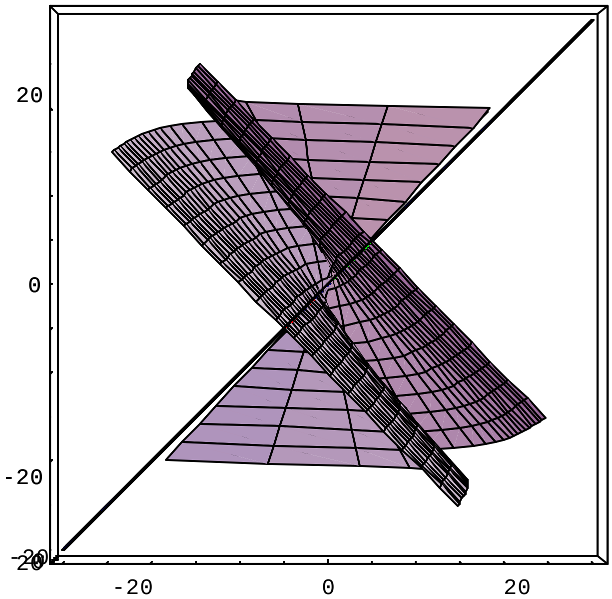
... Graphics3D ...



… Graphics3D …



… Graphics3D …



… Graphics3D …