可能用到的公式：

(1) Gauss 定理：$\oint\!\!\oint_S \mathbf{u}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{u}\,dV$

(2) Stokes 定理：$\oint_L \mathbf{u}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla\times\mathbf{u})\cdot d\mathbf{S}$

(3) Fourier 變換與反變換：

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega x}d\omega$$

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx$$

(4) Fourier 級數的 Euler 公式（週期爲 2ℓ）：

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m\cos\frac{m\pi x}{\ell}+b_m\sin\frac{m\pi x}{\ell}\right)$$

$$a_m=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\cos\frac{m\pi x}{\ell}dx,\qquad m=0,1,2,\ldots$$

$$b_m=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\sin\frac{m\pi x}{\ell}dx,\qquad m=1,2,3,\ldots$$

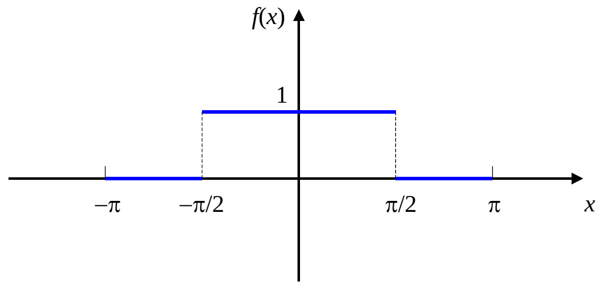
---

1. 有個彈簧系統的運動可以方程式 $2y''+2cy'+4y=-10$ 來模擬，其中外來影響表重力。
   (1) 《7%》試求穩態解（steady-state solution）。
   (2) 《7%》阻尼係數 c 取哪些值時，會造成彈簧系統的振動現象（oscillatory solution）。
   (3) 《6%》當此彈簧系統有振動現象時，其週期（period）爲若干？試以 c 來表達。

2. 對於矩陣 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$，
   (1) 《5%》試決定此矩陣的秩（rank）。
   (2) 《10%》試求取此矩陣的所有特徵值（eigenvalue）與特徵向量（eigenvector）。
   (3) 《10%》對於一階微分方程組 $\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\mathbf{A}\mathbf{x}$，其中 $\mathbf{x}=[x_1(t)\quad x_2(t)\quad x_3(t)]^T$，試求解 $\mathbf{x}$。

3. 對於二維向量場 $\mathbf{u}=(x^2-y^2)\mathbf{i}+(x^2+y^2)\mathbf{j}$（其中 $\mathbf{i}$ 與 $\mathbf{j}$ 分別表 x 軸與 y 軸方向的單位向量），以及由直線 $y=0$ 、 $x=y$ 、 $x=4$ 所組成的三角形封閉曲線 C，
   (1) 《5%》試找出一個與 $\mathbf{u}$ 垂直的向量 $\mathbf{v}$。
   (2) 《5%》試求向量場 $\mathbf{u}$ 的散度場（divergence）。
   (3) 《5%》試求向量場 $\mathbf{u}$ 的旋度場（curl）。
   (4) 《10%》試求向量場 $\mathbf{u}$ 通過封閉曲線 C 的通量（flux）。
   (5) 《10%》試求向量場 $\mathbf{u}$ 沿封閉曲線 C 的環量（circulation）。

4. $f(x)$ 爲一週期函數，在一週期內 $(-\pi,\pi)$ 的函數圖如下



   (1) 《10%》試求 $f(x)$ 的 Fourier 展開式，並指出在哪些地方會出現 Gibbs 現象。
   (2) 《10%》試求解微分方程 $\frac{d^2y}{dx^2}+4y=f(x)$ 的特解（particular solution）。