常用基本解綜整表

問題描述	數學式	基本解
一維		
Laplace 方程	$u" = \delta(x-s)$	$U(x,s) = \frac{r}{2}$
Helmholtz 方程式	$u" + k^2 u = \delta(x-s)$	$U(x,s) = \frac{e^{ikr}}{2ki}$
Wave 方程式	$c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ $= \delta(x-s)\delta(t)$	$U(x,s,t) = \frac{-H(ct-r)}{2c}$
二維		
Laplace 方程	$\nabla^2 u = 2\pi\delta(x-s)$	$U(x,s) = \ln(r)$
Helmholtz 方程式	$\nabla^2 u + k^2 u = 2\pi\delta(x-s)$	$U(x,s) = \frac{-i\pi H_o^{(1)}(kr)}{2}$
彈性力學方程式	$\sigma_{pj,j} = \delta_q(x-s)$	$Kelvin$ 解
		變位解 $-U_{pq}(x,s)$
		曳引力解 $-T_{pq}(x,s)$
三維		
Laplace 方程	$\nabla^2 u = 4\pi\delta(x-s)$	$U(x,s) = \frac{-1}{r}$
Helmholtz 方程式	$\nabla^2 u + k^2 u = 4\pi\delta(x-s)$	$U(x,s) = \frac{-e^{-ikr}}{r}$
彈性力學方程式	$\sigma_{pj,j} = \delta_q(x-s)$	$Kelvin$ 解
		變位解 $-U_{pq}(x,s)$
		曳引力解 $-T_{pq}(x,s)$

一維域內點對偶邊界積分方程式 (Laplace and Helmholtz 方程):

$$u(x) = \{T(s,x)u(s) - U(s,x)t(s)\}\,|_{s=a}^{s=b} \tag{1}$$

$$t(x) = \{M(s,x)u(s) - L(s,x)t(s)\}\,|_{s=a}^{s=b} \tag{2}$$

一維邊界點對偶邊界積分方程式 (Laplace and Helmholtz 方程):

$$\lim_{x\to a^+} u(x) = \lim_{x\to a^+} \{T(s,x)u(s) - U(s,x)t(s)\}\,|_{s=a}^{s=b} \tag{3}$$

$$\lim_{x\to b^-} u(x) = \lim_{x\to b^-} \{T(s,x)u(s) - U(s,x)t(s)\}\,|_{s=a}^{s=b} \tag{4}$$

$$\lim_{x\to a^+} t(x) = \lim_{x\to a^+} \{M(s,x)u(s) - L(s,x)t(s)\}\,|_{s=a}^{s=b} \tag{5}$$

$$\lim_{x\to b^-} t(x) = \lim_{x\to b^-} \{M(s,x)u(s) - L(s,x)t(s)\}\,|_{s=a}^{s=b} \tag{6}$$

二維域內點對偶邊界積分方程式 (Laplace and Helmholtz 方程):

$$2\pi u(x) = \int_B T(s,x)u(s)dB(s) - \int_B U(s,x)t(s)dB(s) \tag{7}$$

$$2\pi t(x) = \int_B M(s,x)u(s)dB(s) - \int_B L(s,x)t(s)dB(s) \tag{8}$$

二維邊界點對偶邊界積分方程式 (Laplace and Helmholtz 方程):

$$\pi u(x) = CPV\int_B T(s,x)u(s)dB(s) - RPV\int_B U(s,x)t(s)dB(s) \tag{9}$$

$$\pi t(x) = HPV\int_B M(s,x)u(s)dB(s) - CPV\int_B L(s,x)t(s)dB(s) \tag{10}$$

二維域內點對偶邊界積分方程式 (Navier 方程):

$$u_k(x) = \int_B U_{ik}(s,x)t_i(s)dB(s) - \int_B T_{ik}(s,x)u_i(s)dB(s) \tag{11}$$

$$t_k(x) = \int_B L_{ik}(s,x)t_i(s)dB(s) - \int_B M_{ik}(s,x)u_i(s)dB(s) \tag{12}$$

二維邊界點對偶邊界積分方程式 (Navier 方程):

$$\frac{1}{2}u_k(x) = RPV\int_B U_{ik}(s,x)t_i(s)dB(s) - CPV\int_B T_{ik}(s,x)u_i(s)dB(s) \tag{13}$$

$$\frac{1}{2}t_k(x) = CPV\int_B L_{ik}(s,x)t_i(s)dB(s) - HPV\int_B M_{ik}(s,x)u_i(s)dB(s) \tag{14}$$

三維域內點對偶邊界積分方程式 (Laplace and Helmholtz 方程):

$$4\pi u(x) = \int_B T(s,x)u(s)dB(s) - \int_B U(s,x)t(s)dB(s) \tag{15}$$

$$4\pi t(x) = \int_B M(s,x)u(s)dB(s) - \int_B L(s,x)t(s)dB(s) \tag{16}$$

三維邊界點對偶邊界積分方程式 (Laplace and Helmholtz 方程):

$$2\pi u(x) = CPV\int_B T(s,x)u(s)dB(s) - RPV\int_B U(s,x)t(s)dB(s) \tag{17}$$

$$2\pi t(x) = HPV\int_B M(s,x)u(s)dB(s) - CPV\int_B L(s,x)t(s)dB(s) \tag{18}$$

三維域內點對偶邊界積分方程式 (Navier 方程):

$$u_k(x) = \int_B U_{ik}(s,x)t_i(s)dB(s) - \int_B T_{ik}(s,x)u_i(s)dB(s) \tag{19}$$

$$t_k(x) = \int_B L_{ik}(s,x)t_i(s)dB(s) - \int_B M_{ik}(s,x)u_i(s)dB(s) \tag{20}$$

三維邊界點對偶邊界積分方程式 (Navier 方程):

$$\frac{1}{2}u_k(x) = RPV\int_B U_{ik}(s,x)t_i(s)dB(s) - CPV\int_B T_{ik}(s,x)u_i(s)dB(s) \tag{21}$$