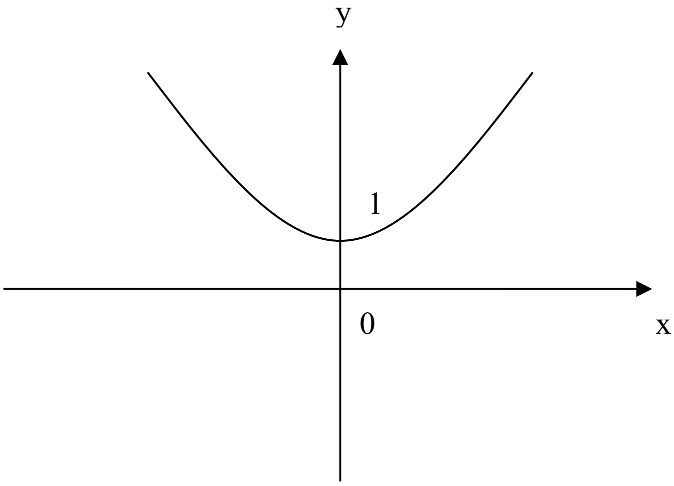
Engineering Mathematics I　HW#3　　日河工 2B

1) 當然你是位用功的好學生，下載作業題目後，先行復習二階常微分的 2.1 及 2.2 二小節。之後開始進行以下的自我學習檢驗:

a) 先分別寫出 *hyperbolic sine of 2x* 與 *hyperbolic consine of 2x* 的表示式，如 sinh(2x)=…… 並繪圖之

$$y_1(x) = \cosh(2x) = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2}$$

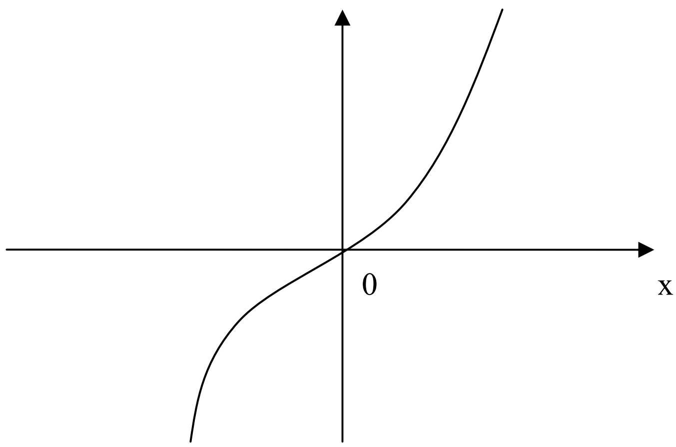
右圖僅為示意，



你須至少三點來繪製一取線，至少可以取 $x = 0, y_1(0) = 1$ 。

$$y_2(x) = \sinh(2x) = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2}$$

右圖僅為示意



b) 分別驗證 $y_1(x)=\cosh(2x)$, $y_2(x)=\sinh(2x)$ 均為以下二階常微分方程式的解 $y''-4y=0$

$$y_1'=d\left(\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}\right)\Big/dx=\frac{2e^{2x}-2e^{-2x}}{2}=2\sinh(2x)$$

$$y_2'=d\left(\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}\right)\Big/dx=\frac{2e^{2x}+2e^{-2x}}{2}=2\cosh(2x)$$

$$y_1''=d\left(y_1'\right)/dx=d\left(\frac{2e^{2x}-2e^{-2x}}{2}\right)\Big/dx=\frac{4e^{2x}+4e^{-2x}}{2}=4\cosh(2x)$$

$$y_2''=d\left(y_2'\right)/dx=d\left(\frac{2e^{2x}+2e^{-2x}}{2}\right)\Big/dx=\frac{4e^{2x}-4e^{-2x}}{2}=4\sinh(2x)$$

$$y_1''-4y_1=4\cosh(2x)-4(\cosh(2x))=0$$

$$y_2''-4y_2=4\sinh(2x)-4(\sinh(2x))=0$$

c) 這時，你好奇 $y_1(x)=\cosh(2x)$, $y_2(x)=\sinh(2x)$ 是否為線性獨立，就先看看課本 p.68~p.70 的內容，然後計算 y_1， y_2 的 Wronskian (2×2 的行列式)，以判別之。

$$\begin{aligned}W(x)&=y_1y_2'-y_1'y_2\\&=\cosh(2x)(2\cosh(2x))-2\sinh(2x)(\sinh(2x))\\&=2\cosh^2(2x)-2\sinh^2(2x)=2\neq 0\end{aligned}$$

$$Note:\cosh^2(2x)-\sinh^2(2x)=1$$

d) 寫出 y_1， y_2 的線性組合，並說說為何其可構成本題二階常微分方程式的任一解，從而寫出本題之通解 y_h。

y_1， y_2 的線性組合為 $c_1y_1+c_2y_2$，其中 c_1， c_2 為實數。

由 c)得知 y_1， y_2 為線性獨立(參見 Theorem 2.3)，則由 Theorem 2.4 得知其線性組合可構成本題二階常微分方程式的任一解。

所以本題之通解 $y_h=c_1y_1+c_2y_2$

e) 針對本題二階常微分方程式，自己試寫出一組合宜之初始條件，並求得滿足此組初始條件之特解。

$y_h=c_1y_1+c_2y_2$

$y_1(x)=\cosh(2x)=\dfrac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}$ ， $y_2(x)=\sinh(2x)=\dfrac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}$

初始條件決定於你所面對問題，在此簡單起見，可設

$y(0)=1,\quad y^{'}(0)=2$

➔ $y(0)=c_1y_1(0)+c_2y_2(0)=c_1\dfrac{e^0+e^0}{2}+c_2\dfrac{e^0-e^0}{2}=c_1$

$y^{'}(0)=c_1y_1^{'}(0)+c_2y_2^{'}(0)=c_1\dfrac{2e^0-2e^0}{2}+c_2\dfrac{2e^0+2e^0}{2}=2c_2$

➔ $c_1=1,\quad c_2=1$

➔ $y=c_1y_1+c_2y_2=y_1+y_2=\cosh(2x)+\sinh(2x)$

2) a)對照定理 2.1，寫出 $y^{''}-7y^{'}/x+16y/x^2=0$ 之 p,q 為連續的開區間 I。

$p=-7/x, q=16/x^2$ 連續為 $x\neq 0$，你可設定的開區間 I 為 $x>0$。

b)分別驗證 $y_1(x)=x^4,\ y_2(x)=x^4\ln(x)$ 均為上述二階常微分方程式的解(注意開區間 I)。

$y_1^{'}(x)=4x^3,\qquad y_2^{'}(x)=4x^3\ln(x)+x^4/x=4x^3\ln(x)+x^3$

$y_1^{''}(x)=12x^2,\ y_2^{''}(x)=12x^2\ln(x)+4x^3/x+3x^2=12x^2\ln(x)+7x^2$

➔ $y_1^{''}-\dfrac{7y_1^{'}}{x}+\dfrac{16y_1}{x^2}=12x^2-\dfrac{7}{x}(4x^3)+\dfrac{16}{x^2}(x^4)=0$

$y_2^{''}-\dfrac{7y_2^{'}}{x}+\dfrac{16y_2}{x^2}=12x^2\ln(x)+7x^2-\dfrac{7}{x}\left(4x^3\ln(x)+x^3\right)+\dfrac{16}{x^2}\left(x^4\ln(x)\right)=0$

c)寫出 y_1， y_2 的線性組合，並詳述為何其可構成本題二階常微分方程式的任一解(y_1， y_2 的 Wronskian ?)，從而寫出本題之通解 y_h。

參考第一題

$$\begin{aligned}W(x)&=y_1y_2'-y_1^{'}y_2\\&=x^4\left(4x^3\ln(x)+x^3\right)-4x^3\left(x^4\ln(x)\right)\\&=4x^7\ln(x)+x^7-4x^7\ln(x)=x^7\neq 0\end{aligned}$$

$Note: x\neq 0$

d)針對本題二階常微分方程式，求得滿足初始條件，

$y(e)=2,\quad y'(e)=4$，之特解。

$$y_1(x)=x^4,\ y_2(x)=x^4\ln(x)$$

$$y=c_1y_1+c_2y_2=c_1x^4+c_2x^4\ln(x)$$

$$y'=c_1y_1'+c_2y_2'=4c_1x^3+c_2\left(4x^3\ln(x)+x^3\right)$$

$$y(e)=c_1e^4+c_2e^4\ln(e)=c_1e^4+c_2e^4=2$$

$$y'(e)=4c_1e^3+c_2\left(4e^3\ln(e)+e^3\right)=4c_1e^3+5c_2e^3=4$$

$$y=c_1x^4+c_2x^4\ln(x)=(-4e^{-3}+10e^{-4})x^4+(4e^{-3}-8e^{-4})x^4\ln(x)$$

3)再復習一下 1.6 節的內容，並求解以下題目

a) $y'=-y^2/x+2y/x$ (Bernoulli equation)

$\Rightarrow y'-\dfrac{2}{x}y=-y^2/x$

It is a Bernoulli equation with $\alpha=2$

$v=y^{1-\alpha}$ ， $y=v^{-1}$ ， $y(x)'=-v(x)^{-2}v(x)'$

$\Rightarrow -v^{-2}v'-\dfrac{2}{x}v^{-1}=-v^{-2}/x$ ， $v'+\dfrac{2}{x}v=\dfrac{1}{x}$

$\Rightarrow$a linear equation, an integrating factor is $e^{\int\frac{2}{x}dx}=e^{\ln(x^2)}=x^2$

$\Rightarrow x^2v'+2xv=x$ ， $(x^2v)'=x \Rightarrow x^2v=\int xdx=\dfrac{1}{2}x^2+C$

$\Rightarrow v=\dfrac{1}{2}+Cx^{-2}=\dfrac{x^2+C}{2x^2}$ ， $y=v^{-1}=\dfrac{2x^2}{x^2+C}=\dfrac{2(x^2+C)-2C}{x^2+C}=2-\dfrac{2C}{x^2+C}$

or $y=2+\dfrac{2C}{-x^2-C}=2+\dfrac{2}{-\frac{1}{C}x^2-1}=2+\dfrac{2}{kx^2-1}$

b) $y'=-e^{-x}y^2+y+e^x$ (Riccati equation with $S(x)=e^x$)

$y=S(x)+\dfrac{1}{z}=e^x+\dfrac{1}{z},\quad y'=e^x-\dfrac{1}{z^2}z'$

$\Rightarrow y'=e^x-\dfrac{z'}{z^2}=-e^{-x}\left(e^x+\dfrac{1}{z}\right)^2+\left(e^x+\dfrac{1}{z}\right)+e^x \quad \Rightarrow z'-z=e^{-x}$

➔ a linear equation, an integrating factor is $e^{\int -dx} = e^{-x}$

$z' - z = e^{-x}$

➔ $e^{-x}z' - e^{-x}z = e^{-2x}$ ， $(e^{-x}z)' = e^{-2x}$ ➔ $e^{-x}z = \int e^{-2x}dx = -e^{-2x}/2 + C$

$$z = Ce^{x} - \frac{e^{-x}}{2} = \frac{2Ce^{2x} - 1}{2e^{x}}$$

➔ $y = S(x) + \dfrac{1}{z} = e^{x} + \dfrac{1}{z} = e^{x} + \dfrac{2e^{x}}{2Ce^{2x} - 1} = \dfrac{2Ce^{3x} + e^{x}}{2Ce^{2x} - 1} = \dfrac{ke^{3x} + e^{x}}{ke^{2x} - 1}$