由 Homogeneous Linear Equations with Constant Coefficients 談起，論 Cauchy-Euler Equation 求解的另一方法

Nov. 10, 2005

我們從常係數之齊性線性微分方程式的通解之表示型式，觀察其與 **Cauchy-Euler Equation** 通解之表示型式的相似性，進而想把 **Cauchy-Euler** Equation 先轉換成常係數方程式，然後就依樣畫葫蘆地求解。

Homogeneous Linear 2nd Order ODE with Constant Coefficients

為簡化起見，先從常係數之齊性線性二階微分方程式談起，

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{1}$$

將 $y = e^{mx}$ 代入微分方程式，可得以下之輔助方程式(或稱特徵方程式)

$$am^2 + bm + c = 0 \tag{2}$$

因此，微分方程式現轉換成式(2)之代數方程式，而滿足這代數方程式之 m_1 及 m_2，可表示如式(3)：

$$m_1, m_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{3}$$

所以若以 m_1 及 m_2 為相異實根為例，則通解的表示型式如下：

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} \tag{4}$$

另一方面 齊性線性二階之 Cauchy-Euler Equation 的表示式如下：

$$ax^2 y'' + bxy' + cy = 0 \tag{5}$$

將 $y = x^m$ 代入微分方程式，可得以下之輔助方程式(或稱特徵方程式)

$$am^2 + (b-a)m + c = 0 \tag{6}$$

若 m_1 及 m_2 為相異實根，則通解的表示型式如下：

$$y = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2} \tag{7}$$

因為$e^{\ln x}=x,\ x>0$ (8)

若再假設

$t=\ln x$ (9)

則將式(8)、(9)代入式(7)，可得到

$$y=c_1x^{m_1}+c_2x^{m_2}=c_1e^{m_1\ln x}+c_2e^{m_2\ln x}=c_1e^{m_1t}+c_2e^{m_2t} \qquad (10)$$

顯然，由通解之相似型式得知，若透過變數轉換$t=\ln x$，Cauchy-Euler Equation 由$y(x)$ ➔ $Y(t)$可轉換成常係數之齊性線性二階微分方程式(因為解的型式[式(4)、(10)]已相似)

推導

$ax^2y''+bxy'+cy=0$

若令$t=\ln x$ 或 $x=e^t$ ➔ $y(x)=y(e^t)=Y(t)$

➔ $y'(x)=\dfrac{d\,y}{dx}=\dfrac{dY}{dt}\dfrac{dt}{dx}=Y'\dfrac{1}{x}$, ➔ $Y'(t)=xy'(x)$

$$\begin{aligned}
y''(x)&=\frac{d\,y'}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}Y'(t)\right)\\
&=-\frac{1}{x^2}Y'(t)+\frac{1}{x}\frac{d}{dx}Y'(t)\\
➔\quad &=-\frac{1}{x^2}Y'(t)+\frac{1}{x}\frac{dY'}{dt}\frac{dt}{dx}\\
&=-\frac{1}{x^2}Y'(t)+\frac{1}{x}Y''\frac{1}{x}\\
&=\frac{1}{x^2}\left(Y''(t)-Y'(t)\right)
\end{aligned}$$

➔ $x^2y''=Y''(t)-Y'(t)$

➔
$$\begin{aligned}
ax^2y''+bxy'+cy&=a\left(Y''(t)-Y'(t)\right)+bY'(t)+cY(t)\\
&=aY''(t)+(b-a)Y'(t)+cY(t)=0
\end{aligned}$$

➔ $Y''(t)+\left(\dfrac{b}{a}-1\right)Y'(t)+\dfrac{c}{a}Y(t)=0$

例題

1) $x^2y''-xy'-2y=0$

Let $x = e^t$

$$Y(t) = y(e^t),$$

$$Y'(t) = \frac{dY(t)}{dt} = \frac{d\ y(x)}{dx}\frac{dx}{dt} = xy'(x),$$

➔

$$Y''(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dY(t)}{dt}\right) = \frac{d}{dx}\left(xy'(x)\right)\frac{dx}{dt} = (xy'' + y')x = x^2y'' + xy',$$

$$Y''(t) = x^2y'' + Y'(t)$$

➔ $x^2y'' = Y''(t) - Y'(t)$

➔ $x^2y'' - xy' - 2y = 0 ==> Y'' - 2Y' - 2Y = 0$

（或直接 $Y''(t) + \left(\frac{b}{a} - 1\right)Y'(t) + \frac{c}{a}Y(t) = 0$， a=1, b=-1, c=-2)

➔ $\lambda^2 - 2\lambda - 2 = 0$, $\lambda = 1 \pm \sqrt{3}$

$$Y_h = c_1 e^{(1+\sqrt{3})t} + c_2 e^{(1-\sqrt{3})t}$$

$t = \ln x$,（$e^{(1+\sqrt{3})t} = e^{(1+\sqrt{3})\ln x} = e^{\ln x^{(1+\sqrt{3})}} = x^{(1+\sqrt{3})}$, $e^{(1-\sqrt{3})t} = e^{(1-\sqrt{3})\ln x} = e^{\ln x^{(1-\sqrt{3})}} = x^{(1-\sqrt{3})}$）

➔ $y(x) = c_1 x^{1+\sqrt{3}} + c_2 x^{1-\sqrt{3}}$

2) $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0$

a=1, b=2, c=-6

$$Y'' + (\frac{b}{a} - 1)Y' + \frac{c}{a}Y = 0$$

➔ $Y'' + Y' - 6Y = 0$

$$Y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-3t}$$

$t = \ln x$,（$e^{2t} = e^{2\ln x} = e^{\ln x^2} = x^2$, $e^{-3t} = e^{-3\ln x} = e^{\ln x^{-3}} = x^{-3}$）

➔ $y(x) = c_1 x^2 + c_2 x^{-3}$