Example **2005/10/2**

Solve $2xyy' = y^2 - x^2$ (1)

➔ $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{2xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x} - \frac{x}{y}\right)$ (2)

Set $\frac{y}{x} = u,\ \ y = ux$ (3)

➔ $y' = u'x + u$ (4)

➔ $u'x + u = \frac{1}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right)$ (5)

➔ $u'x = -\frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right) = -\frac{u^2+1}{2u}$ (6)

➔ $\frac{2udu}{u^2+1} = -\frac{dx}{x}$ ➔ separable DE (7)

➔ $\ln(u^2+1) = -\ln|x| + A = \ln\frac{1}{|x|} + A$ (8)

➔ $u^2 + 1 = e^{\ln\frac{1}{|x|}+A} = \frac{1}{|x|}e^A = \pm e^A\frac{1}{x} = B\frac{1}{x}$ $(B = \pm e^A)$ (9)

➔ $\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1 = B\frac{1}{x}$ ➔ $y^2 + x^2 = Bx$ or ➔ $(x - \frac{B}{2})^2 + y^2 = \frac{B^2}{4}$ (10)

➔ The general solution is $(x - \frac{B}{2})^2 + y^2 = \frac{B^2}{4}$, B is a constant to be determined by the initial condition.

==

討論

1) 本題之微分方程式爲**非線性一階常微分**方程式，式(1)
2) 經過移項處理，可得式(2)， 其中變數型式爲 y/x or x/y。
3) 經由式(3)之變數轉換，則可簡化式(2)之型式。
4) 式(4)爲準備將式(3)之變數轉換代入原微分方程式，則可式(5)。
5) 經過式(6)及式(7)之整理，可發現得到一變數可分離之微分方程式。
6) 對式(7)進行積分運算，注意自然對數之”引數”須爲正，但式(8)之左手邊本身可確

定爲正，所以可以去掉絕對值。

7) 式(9)爲自然隊數與指數函數之運算性質，而在去掉絕對值時，不要忘記正負號，但因爲 A 仍是一任意之待定常數，所以簡單起見可令另一之待定常數 B。
8) 式(10)爲本題求解之通解，但你須驗證有無因移項處理而”不小心”丟掉其它解。
9) 檢驗式(2)，看看 **y=0** 是不是爲其中之一解，代入原題式 1)，發現 **y=0** 並不是其中之一解，爲什麼???
10) 同理，你須自我練習以下例題，確信每一環節(1~9)都沒問題。(不必繳交)

EX:

1)Solve $xy' = y^2 + y \qquad (y/x = u)$ Ans: $y = x/(c - x)$