Example **2005/9/29**

Solve $x^2 y' = 1 + y$ (1)

➔ $x^2 \dfrac{dy}{dx} = 1 + y$, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1+y}{x^2}$ ➔ separable DE (2)

➔ $\dfrac{dy}{1+y} = \dfrac{dx}{x^2}$ (3)

➔ $x \neq 0$, $y \neq -1$ (4)

➔ $\displaystyle\int \frac{dy}{1+y} = \int \frac{dx}{x^2}$ (5)

➔ $\ln|1+y| = -\dfrac{1}{x} + k$ (6)

➔ $|1+y| = e^k e^{-1/x} = Ae^{-1/x}$ ($A = e^k$) (7)

➔ $1 + y = \pm Ae^{-1/x} = Be^{-1/x}$ ($\pm A = B$) (8)

➔ The general solution is $y = -1 + Be^{-1/x}$, B is a constant to be determined by the initial condition.

==

討論

1) 本題之微分方程式爲**線性一階常微分**方程式，式(1)
2) 經過移項處理，可得式(2)， y 之導函數與 x 之函數及 y 之函數可分離，所以本題之微分方程式爲**可分離之微分方程式**。
3) 再移項處理，可得式(3)，但卻引起 $x \neq 0$, $y \neq -1$ 分母不能爲零的額外條件限制。
4) 將式(3)兩邊作積分運算，注意左邊與自然對數有關。
5) 式(6)應該很容易得到,注意的是自然對數之”引數”須爲正，所以取絕對值，而也應不要忘記積分常數項之產生。
6) 式(7)是自然對數與自然指數函數的運算性質。
7) 式(8)在去掉絕對值時，不要忘記正負號，但因爲 A 仍是一任意之待定常數，所以簡單起見可令另一之待定常數 B。
8) 式(8)爲本題求解之通解，但你須驗證有無因移項處理而”不小心”丟掉其它解，如

3)所言。

9) 檢驗式(4)，看看 **y=-1** 是不是爲其中之一解，代入原題式 1)，發現 **y=-1** 果然是其中之一解，爲什麼???

10) 但還不必緊張，因爲你可發現，由式(8)之通解表示式，B=0 時可得 y=-1。

11) 所以 **y=-1 is a solution**, but not a **singular solution**, since it is a special case of the **general solution.**

12)同理，你須自我練習以下例題，確信每一環節(1~11)都沒問題。(不必繳交)

EX:

1)Solve $y' = y^2 e^{-x}$ Ans: $y = \dfrac{1}{e^{-x} - k}$