EXAMPLE 4 **An Initial-Value Problem**

Solve the initial-value problem $\cos x\ (e^{2y}-y)\ \dfrac{dy}{dx}=e^{y}\sin 2x,\quad y(0)=0$ (1)

Sol:

$$\Rightarrow \frac{(e^{2y}-y)}{e^{y}}dy=\frac{\sin 2x}{\cos x}dx \tag{2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{e^{2y}}{e^{y}}-\frac{y}{e^{y}}\right)dy=\frac{2\sin x\ \cos x}{\cos x}dx \tag{3}$$

$$\Rightarrow \left(e^{2y-y}-ye^{-y}\right)dy=2\sin x\ dx \tag{4}$$

$$\Rightarrow \left(e^{y}-ye^{-y}\right)dy=2\sin x\ dx \tag{5}$$

$$\Rightarrow \int\ e^{y}dy-\int\ ye^{-y}dy=\int\ 2\sin x\ dx \tag{6}$$

$$\Rightarrow \int\ e^{y}\ dy=e^{y}+c_1,\ \ -\int\ ye^{-y}dy=-\left[-ye^{-y}-e^{-y}+c_2\right]=ye^{-y}+e^{-y}-c_2,$$

$$\int\ 2\sin x\ dx=-2\cos x-c_3 \tag{7}$$

General solution $\Rightarrow e^{y}+ye^{-y}+e^{-y}=-2\cos x+c$ (implicit or explicit solution?) (8)

Particular solution

$$\Rightarrow e^{0}+ye^{-0}+e^{-0}=-2\cos 0+c \Rightarrow\ c=4 \Rightarrow\ e^{y}+ye^{-y}+e^{-y}=4-2\cos x \tag{9}$$

討論：

1) 式(1)為一非線性($e^{y}\dfrac{dy}{dx}$?)一階常微分方程式的問題，且 x=0=, y=0 的初始條件。所以本題為一初始值問題(**I**nitial **V**alue **P**roblem)。

2) 經過移項處理，得到式(2)之變數可分離之微分方程式(Separable DE).

3) 式(3)之左手邊為利用指數函數運算性質(乘除為指數加減)之預作準備，而右手邊為三角函數性質之利用。

$\sin(2x)=2\sin(x)\cos(x)$

其它相關三角函數性質(積分運算時會利用到)：

$$\sin(x)\sin(y)=\frac{1}{2}\{\cos(x-y)-\cos(x+y)\}$$

$$\cos(x)\cos(y)=\frac{1}{2}\{\cos(x-y)+\cos(x+y)\}$$

$$\sin(x)\cos(y)=\frac{1}{2}\{\sin(x-y)+\sin(x+y)\}$$

4) 由式 3)之性質，可化簡後得到式 4)、式 5)。

5) 對式 5)作積分運算時，可得到式 6)。

6) 對式 6)之各別項次作積分運算，首先左手邊為指數函數之積分運算，利用 $\frac{d}{dy}e^{y}=e^{y}(\frac{d}{dy}y)=e^{y}$ 之微分性質，可知 $\int e^{y}\,dy=e^{y}+c_1$，注意積分常數項。

至於左手邊第二項，則須利用”部份積分”的運算，

$$\left(f(y)\ g(y)\right)'=f(y)'g(y)+f(y)g(y)' \Rightarrow$$

$$\int \frac{d\left(f(y)\ g(y)\right)}{dy}dy=f(y)\ g(y)=\int f(y)'g(y)dy+\int f(y)g(y)'dy$$

$$\Rightarrow \int f(y)'g(y)dy=f(y)\ g(y)-\int f(y)g(y)'dy$$

$$y=f(y),\ e^{-y}=g'(y) \Rightarrow y=f(y),\ -e^{-y}=g(y)$$

$$\Rightarrow -\int ye^{-y}dy=-\left[-ye^{-y}-e^{-y}+c_2\right]=ye^{-y}+e^{-y}-c_2$$

至於右手邊，則須利用三角函數的微積分運算性質。

$$\frac{d}{dy}\sin(y)=\cos(y),\ \frac{d}{dy}\cos(y)=-\sin(y) \Rightarrow \int 2\sin x\ dx=-2\cos x-c_3$$

最後你可將三個積分常數合併 c，或一開始就只用積分常數 c。

7) 式(8)為含有一個積分常數項 c 之通解，所以代表無數可能的解。式(8)為一 $G(x,y)=0$ 的表示式，所以為一隱式解，若能表示成 $y=\phi(x)$ 則為顯示

解。

8) 再利用 x=0=, y=0 的初始條件,可得到本題初始值問題(**I**nitial **V**alue **P**roblem)的特解，其中積分常數項 c 由 x=0=, y=0 的初始條件決定之。

9) 最後，須討論你運算過程有無造成解(y)的遺失(造成分母為零情況的 y)，若有，則檢查其是否可由通解中得之，若不能由通解中得之則為奇異解(singular solution)。幸運的是，本題運算過程中，並無 y 可造成分母為零的情況，式(3) 左邊分母中指數函數不為零。

==

上述 1)~9)須逐一瞭解，並試著求解以下類似之練習題：

1) $\dfrac{dy}{dx} = \sin(5x)$， $y(0)=0$ Ans: $y = -\dfrac{1}{5}\cos(5x) + c$， c=1/5

2) $\dfrac{dy}{dx} = e^{3x+2y}$， $y(0)=0$ Ans: $-3e^{-2y} = 2e^{3x} + c$， c=−5

練習有問題者，請隨時提問。