r_1，r_2 為相等，$(r_1 = r_2)$，則存在二個線性獨立之解 y_1，y_2 如下：

$$r_1 = r_2 \Rightarrow \ r_1 = r_2 = \frac{1-\bar{a}_0}{2} \quad (1)$$

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r_1} = x^{r_1}(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots), \ c_0 \neq 0 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} y_2(x) &= y_1(x)\ln x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n+r_2} \\ &= y_1(x)\ln x + x^{r_2}(b_1 x + b_2 x^2 + \ldots) \end{aligned} \quad (3)$$

注意：n =**1** ～ ∞

例題：$x^2 y'' + 5xy' + (x+4)y = 0$ (取自 example 4.11, 4.13, O'Neil, 5th Edition)

$$y'' + \frac{5}{x}y' + \frac{x+4}{x^2}y = 0 \quad (4)$$

分母為零， $x = 0$ 為微分方程式(4)之奇異點(singular point)。

$$p(x) = xP(x) = 5 \quad (5)$$

$$q(x) = x^2 Q(x) = x + 4 \quad (6)$$

函數 $p(x)$，$q(x)$ 現為多項式，所以在 $x = 0$ 皆為解析(analytic)。奇異點 $x = 0$ 為微分方程式(4)之規則奇異點(regular singular point)。

規則奇異點➔**Frobenius method**

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)c_n x^{n+r-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-2}$$

$$x^2 y'' + 5xy' + (x+4)y$$

$$\Rightarrow = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} 5(n+r)c_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r+1} + \sum_{n=0}^{\infty} 4c_n x^{n+r} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} 5(n+r)c_n x^{n+r} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} 4c_n x^{n+r} = 0$$

$$\Rightarrow [r(r-1) + 5r + 4]c_0 x^r + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+r)(n+r-1)c_n + 5(n+r)c_n + c_{n-1} + 4c_n]x^{n+r} = 0$$

指標方程式(x^r 的係數，且 $c_0 \neq 0$)➔ $r(r-1) + 5r + 4 = r^2 + 4r + 4 = (r+2)^2 = 0$

➔ $r_1, r_2=-2$ **重根➔只存在一個 Frobenius solution**

令 $r_1=-2$

➔ $(n+r)(n+r-1)c_n+5(n+r)c_n+c_{n-1}+4c_n=0$

➔ $(n-2)(n-3)c_n+5(n-2)c_n+c_{n-1}+4c_n=0$

➔ $$\begin{aligned} c_n &= -\frac{1}{(n-2)(n-3)+5(n-2)+4}c_{n-1} \\ &= -\frac{1}{n^2}c_{n-1} \end{aligned}$$ ， $n=1,\ 2,\ 3,\ldots$

➔ $c_1=-c_0$

➔ $c_2=-\frac{1}{4}c_1=\frac{1}{4}c_0=\frac{1}{(2)^2}c_0$

➔ $c_3=-\frac{1}{9}c_2=-\frac{1}{4\cdot 9}c_0=-\frac{1}{(2\cdot 3)^2}c_0$

➔ $c_4=-\frac{1}{16}c_3=\frac{1}{4\cdot 9\cdot 16}c_0=\frac{1}{(2\cdot 3\cdot 4)^2}c_0$

➔ $c_n=(-1)^n\frac{1}{(n!)^2}c_0$ ， $n=1,\ 2,\ 3,\ldots$

The **Frobenius solution** we have found is

$$\begin{aligned} y_1(x) &= c_0\left[x^{-2}-x^{-1}+\frac{1}{4}-\frac{1}{36}x+\frac{1}{576}x^2+\ldots\right] \\ &= c_0\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(n!)^2}x^{n-2} \end{aligned}$$

注意 $c_0\neq 0$

$\Rightarrow y_2(x) = y_1(x)\ln(x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n-2}$

$$\Rightarrow \begin{aligned} &4y_1 + 2xy_1' + \sum_{n=1}^{\infty} (n-2)(n-3)b_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} 5(n-2)b_n x^{n-2} \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} 4b_n x^{n-2} + \ln(x)\left[x^2 y_1'' + 5xy_1' + (x+4)y_1\right] = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

其中 $y_1(x) = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n!)^2} x^{n-2}$ 爲微分方程式第一個解，所以在式(7)中

$x^2 y_1'' + 5xy_1' + (x+4)y_1 = 0$

而簡單起見，可令式(7)中 $c_0 = 1$

$$\Rightarrow \begin{aligned} &(-2+b_1)x^{-1} \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{4(-1)^n}{(n!)^2} + \frac{2(-1)^n}{(n!)^2}(n-2) + (n-2)(n-3)b_n + 5(n-2)b_n + b_{n-1} + 4b_n \right] x^{n-2} = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

同樣地，在式(8)中每個 x 的係數皆爲零

$\Rightarrow b_1 = 2$

$\Rightarrow \frac{2(-1)^n}{(n!)^2} n + n^2 b_n + b_{n-1} = 0$, $\Rightarrow b_n = -\frac{2(-1)^n}{n \cdot (n!)^2} - \frac{1}{n^2} b_{n-1}$

所以第二個解爲

$\Rightarrow y_2(x) = y_1(x)\ln(x) + \frac{2}{x} - \frac{3}{4} + \frac{11}{108}x - \frac{25}{3456}x^2 + \frac{137}{432000}x^3 + \ldots$

注意這不是 **Frobenius solution.**

因此通解爲

$y(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2$

$= C_1 y_1 + C_2 y_1 \ln(x) + C_2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n+r_2}$

$= \left[C_1 + C_2 \ln(x)\right] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} x^{n-2} + C_2 \left[\frac{2}{x} - \frac{3}{4} + \frac{11}{108}x - \frac{25}{3456}x^2 + \frac{137}{432000}x^3 + \ldots \right]$