Example 3 Losing a Solution 10.8.2005

Solve $\frac{dy}{dx} = y^2 - 4$

➔ the first-order differential equation $\frac{dy}{dx} = y^2 - 4$ is **separable.** **(1)**

➔ $\frac{dy}{y^2 - 4} = dx$ **(2)**

➔ $\left[\frac{1/4}{y-2} - \frac{1/4}{y+2}\right]dy = dx$ **(3)**

➔ $\int \left[\frac{1/4}{y-2} - \frac{1/4}{y+2}\right]dy = \int dx$ **(4)**

➔ $\frac{1}{4}\ln|y-2| - \frac{1}{4}\ln|y+2| = x + c_1$ **(5)**

➔ $\ln\left|\frac{y-2}{y+2}\right| = 4x + c_2$ **(6)**

➔ $\left|\frac{y-2}{y+2}\right| = e^{4x+c_2} = e^{c_2}e^{4x}$ **(7)**

➔ $\frac{y-2}{y+2} = \pm e^{c_2}e^{4x} = ce^{4x}$ **(8)**

➔ **the general solution** $y = 2\frac{1+ce^{4x}}{1-ce^{4x}}$ **(9)**

c is a constant to be determined by the initial condition.

===

討論

1) 本題之微分方程式爲**非線性一階常微分**方程式，式(1)
2) 經過移項處理，可得式(2)， 其中分母中 y=2, y=-2 情況須注意。
3) 經由**部份分式**整理，可得式(3)之簡化型式。
4) 式(4)爲將式(3)之二邊作積分，則可式(5)。
5) 經過自然對數及自然指數函數之運算性質，可得式(6)及式(7)。

6) 仍須注意，自然對數之”引數”須爲正，所以有式(7)之絕對值。
7) 而式(8)在去掉絕對値時，不要忘記正負號，但因爲 c_2 仍是一任意之待定常數，所以簡單起見可令另一之待定常數 $c=\pm e^{c_2}$ 。
8) 式(9)爲本題求解之通解，但你須驗證有無因移項處理(式(2))而”不小心”丟掉其它解。
9) 檢驗式(2)，看看分母爲零時 y=2, y=-2 是不是爲其中之一解，代入原題式 1)，發現 y=2, y=-2 都是其解，爲什麼???
10) 式(9) $c=0$ ，可得 y=2，所以 y=2 仍包含於式(9)之通解。但 y=-2，則無法由設定式(9)之任意常數 c 値得到，所以 y=-2 爲奇異解(singular solution)。

若 $y=2\dfrac{1+ce^{4x}}{1-ce^{4x}}=-2$ ➔ $\dfrac{1+ce^{4x}}{1-ce^{4x}}=-1$ ==> $1+ce^{4x}=-(1-ce^{4x})$ ➔ $1=-1$ 所以不合理.

11) 以下，你須自我練習**部份分式**的演算：

(1) 部份分式應用之時機

如式(2)及式(3)，積分計算時，常有尙爲不可直接積分之**真分式(分母之變數次數>分子之變數次數)**，則須利用部份分式方法來處理。

(2) 例如 $\dfrac{4x-1}{2x^2+x-3}$

本式爲一真分式，若欲對其作積分運算，則可先對分母分作處理如下：

$$\frac{4x-1}{2x^2+x-3}=\frac{4x-1}{(3x-2)(x+1)} \Rightarrow \frac{4x-1}{(3x-2)(x+1)}=\frac{A}{(3x-2)}+\frac{B}{(x+1)}$$

再對上式右邊作通分==> $\dfrac{A}{(3x-2)}+\dfrac{B}{(x+1)}=\dfrac{A(x+1)+B(3x-2)}{(3x-2)(x+1)}$

$$\Rightarrow \frac{4x-1}{(3x-2)(x+1)}=\frac{A}{(3x-2)}+\frac{B}{(x+1)}=\frac{A(x+1)+B(3x-2)}{(3x-2)(x+1)}=\frac{(A+3B)x+A-2B}{(3x-2)(x+1)}$$

➔A+3B=4, A-2B=-1➔A=1, B=1

$$\Rightarrow \frac{4x-1}{2x^2+x-3}=\frac{1}{3x-2}+\frac{1}{x+1}$$

(3) 例如 $\dfrac{-x+14}{2x^2+7x-4}$ ➔ $\dfrac{3}{2x-1}-\dfrac{2}{x+4}$

(4) 例如 $\dfrac{3x+2}{2x^2+x-3}$ ➔ $\dfrac{1}{2x+3}+\dfrac{1}{x-1}$