1. 傅立葉積分

若函數 $f(x)$ 在整個區間內 $[-\infty,\infty]$ 都有定義，且 $f(x)$ 為非週期函數，如何處理？

我們可視為某個週期函數 $g_\ell(x)$，當 $\ell\to\infty$ 時的極限情形。

定義 $g_\ell(x)=f(x)$，$-\ell<x<\ell$，再將 2ℓ 為週期拓展到整個區間 $[-\infty,\infty]$ 上，於是 $g_\ell(x)$ 的傅立葉級數為

$$g_\ell(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{\ell}x+b_n\sin\frac{n\pi}{\ell}x\right) \tag{1}$$

其中

$$a_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(\xi)\cos\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi \quad n=0,1,2,3,\cdots \tag{2}$$

$$b_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(\xi)\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi \quad n=1,2,3,\cdots \tag{3}$$

則

$$g_\ell(x)=\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(\xi)d\xi+\frac{1}{\ell}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\ell}^{\ell}f(\xi)\cos\frac{n\pi}{\ell}(x-\xi)d\xi \tag{4}$$

令 $\omega_n=\dfrac{n\pi}{\ell}$，則 $\Delta\omega=\omega_{n+1}-\omega_n=\dfrac{\pi}{\ell}$，因此

$$\lim_{\ell\to\infty}g_\ell(x)=f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cos\omega(x-\xi)d\xi\right]d\omega \tag{5}$$

利用 $\cos\omega(x-\xi)=\cos\omega x\cos\omega\xi+\sin\omega x\sin\omega\xi$，可得

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left\{\begin{aligned}&\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cos\omega\xi d\xi\right]\cos\omega x\\&+\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\sin\omega\xi d\xi\right]\sin\omega x\end{aligned}\right\}d\omega \tag{6}$$

或改寫為

$$f(x)=\int_0^{\infty}\left[A_\omega\cos\omega x+B_\omega\sin\omega x\right]d\omega \tag{7}$$

其中

$$A_\omega=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cos\omega\xi d\xi \tag{8}$$

$$B_\omega=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\sin\omega\xi d\xi \tag{9}$$

結論:

若 $f(x)$ 在任何區間滿足條件

(1) $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx$ 存在。

(2) $f(x)$ 與 $f'(x)$ 皆為分段連續。

則 $\int_0^{\infty}\left[A_\omega\cos\omega x+B_\omega\sin\omega x\right]d\omega=\frac{1}{2}\left[f(x^+)+f(x^-)\right]$

2. 傅立葉餘弦積分

若函數 $f(x)$ 為偶函數，則

$$f(x)=\int_0^{\infty}A_\omega\cos\omega x d\omega \tag{10}$$

$$A_\omega=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}f(\xi)\cos\omega\xi d\xi \tag{11}$$

3. 傅立葉正弦積分

若函數 $f(x)$ 為奇函數，則

$$f(x)=\int_0^\infty B_\omega \cos\omega x d\omega \tag{12}$$

$$B_\omega=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(\xi)\sin\omega\xi d\xi \tag{13}$$

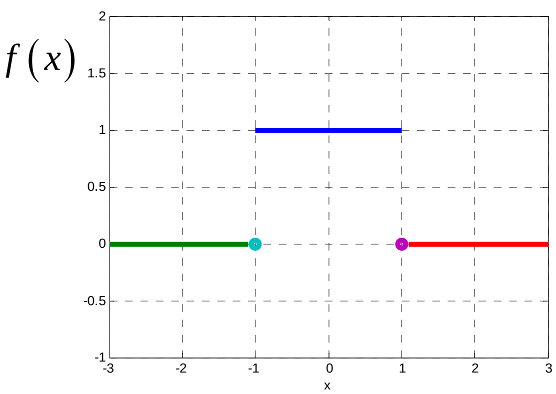
由上顯示，即使 $f(x)$ 之定義域為 $[0,\infty]$，而非 $[-\infty,\infty]$ 時，仍可用類似半幅展開的方式處理。

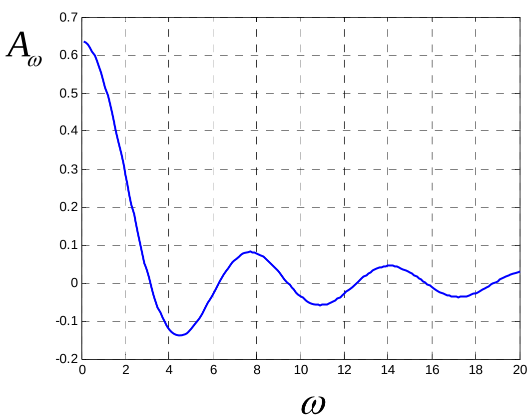
Example 14.1

$f(x)=\begin{cases}1 & -1\le x\le 1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$，試以傅立葉積分式表之。

Ans: $f(x)=\int_0^\infty A_\omega \cos\omega x d\omega$; $A_\omega=\dfrac{2\sin\omega}{\pi\omega}$

$$\int_0^\infty \frac{2\sin\omega}{\pi\omega}\cos\omega x d\omega=\begin{cases}1 & -1<x<1\\ \dfrac{1}{2} & x=\pm 1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$$



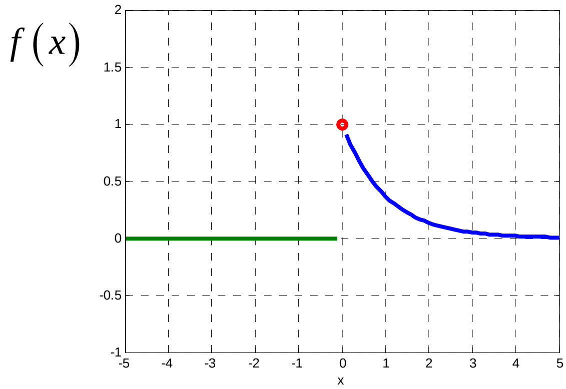


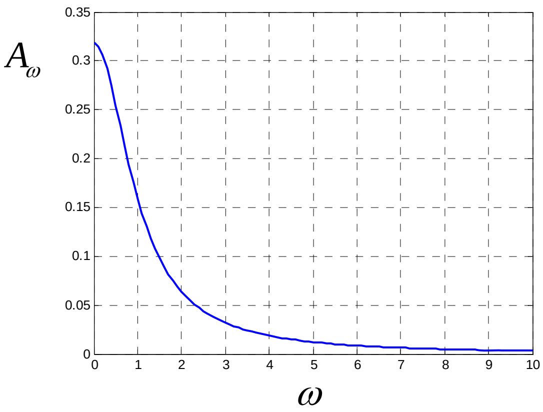
Example

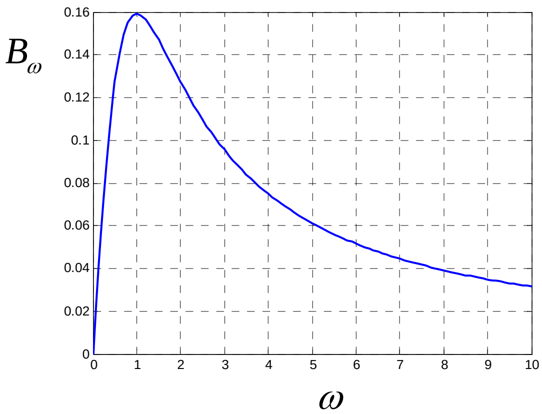
$$f(x)=\begin{cases} e^{-x} & x>0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$$ ，試以傅立葉積分式表之。

Ans: $f(x)=\int_0^{\infty}\left[A_\omega \cos\omega x + B_\omega \sin\omega x\right]d\omega$;

$$A_\omega=\frac{1}{\pi\left(1+\omega^2\right)} \quad ; \quad B_\omega=\frac{\omega}{\pi\left(1+\omega^2\right)}$$







Example

由上述結果，試求 $\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{1+x^2}dx$ 。

Ans: $\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{1+x^2}dx=\frac{\pi e^{-1}}{2}$

Example 14.3

$f(x) = e^{-kx}$ for $x \ge 0$, with k a positive constant.

For the Fourier cosine integral:

$$f(x) = e^{-kx} = \frac{2k}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\omega x}{k^2+\omega^2}\,d\omega$$

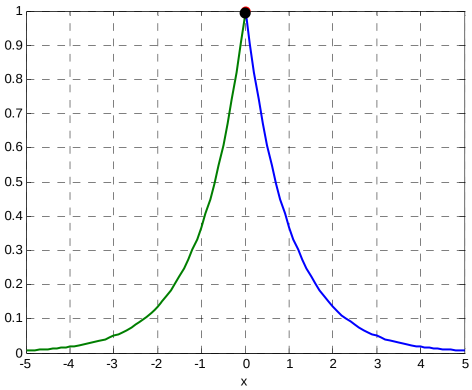
, and $f(x)$ converges to e^{-kx} for $x \ge 0$.

For the Fourier sine integral:

$$f(x) = e^{-kx} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\omega\sin\omega x}{k^2+\omega^2}\,d\omega$$

, and $f(x)$ converges to e^{-kx} for $x > 0$.

偶函數形式展開



奇函數形式展開